PATHFINDER®
Where Aspiration Meets Success

WBJEE : 2023

MATHEMATICS

Question with Solution

Test Booklet Code :

Date : 30.04.2023

Head Office : 96K, S.P. Mukherjee Road, Hazra More, Kolkata -700 026, Phone - 24551840 / 24544817

M-2023

Subject : MATHEMATICS 3011058551

(Booklet Number)

Full Marks : 100

Duration : 2 Hours

INSTRUCTIONS

1. All questions are of objective type having four answer options for each.
2. Category-1: Carries 1 mark each and only one option is correct. In case of incorrect answer or any combination of more than one answer, ¼ mark will be deducted.
3. Category-2: Carries 2 marks each and only one option is correct. In case of incorrect answer or any combination of more than one answer, ½ mark will be deducted.
4. Category-3: Carries 2 marks each and one or more option(s) is/are correct. If all correct answers are not marked and no incorrect answer is marked, then score = 2 × number of correct answers marked ÷ actual number of correct answers. If any wrong option is marked or if any combination including a wrong option is marked, the answer will be considered wrong, but there is **no negative marking** for the same and zero mark will be awarded.
5. Questions must be answered on OMR sheet by darkening the appropriate bubble marked A, B, C, or D.
6. Use only **Black/Blue ink ball point pen** to mark the answer by filling up of the respective bubbles completely.
7. Write Question Booklet number and your roll number carefully in the specified locations of the OMR Sheet. Also fill appropriate bubbles.
8. Write your name (in block letter), name of the examination center and put your signature (as it appeared in Admit Card) in appropriate boxes in the **OMR Sheet**.
9. The OMR Sheet is liable to become invalid if there is any mistake in filling the correct bubbles for Question Booklet number/roll number or if there is any discrepancy in the name/ signature of the candidate, name of the examination center. The OMR Sheet may also become invalid due to folding or putting stray marks on it or any damage to it. The consequence of such invalidation due to incorrect marking or careless handling by the candidate will be the sole responsibility of candidate.
10. Candidates are not allowed to carry any written or printed material, calculator, pen, log table, wristwatch, any communication device like mobile phones, bluetooth device etc. inside the examination hall. Any candidate found with such prohibited items will be **reported against** and his/her candidature will be summarily cancelled.
11. Rough work must be done on the Question Booklet itself. Additional blank pages are given in the Question Booklet for rough work.
12. Hand over the OMR Sheet to the invigilator before leaving the Examination Hall.
13. This Booklet contains questions in both English and Bengali. Necessary care and precaution were taken while framing the Bengali version. However, if any discrepancy(ies) is/are found between the two versions, the information provided in the English version will stand and will be treated as final.
14. Candidates are allowed to take the Question Booklet after examination is over.

Signature of the Candidate : _____
(as in Admit Card)

Signature of the Invigilator : _____

M-2023

59

58-2023

MATHEMATICS

Category-I (Q. 1 to 50)

(Carry 1 mark each. Only one option is correct. Negative marks: -¼)

1. $\lim_{x\to\infty}\left\{x-\sqrt[n]{(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)}\right\}$ where $a_1, a_2, \ldots, a_n$ are positive rational numbers.
The limit

(A) does not exist

(B) is $\frac{a_1+a_2+\ldots a_n}{n}$

(C) is $\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}$

(D) is $\frac{n}{a_1+a_2+\ldots+a_n}$

$\lim_{x\to\infty}\left\{x-\sqrt[n]{(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)}\right\}$ যেখানে $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ধনাত্মক মূলদ সংখ্যা, সীমা হল

(A) সীমাটির অস্তিত্ব নেই

(B) মান $\frac{a_1+a_2+\ldots a_n}{n}$

(C) মান $\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}$

(D) মান $\frac{n}{a_1+a_2+\ldots+a_n}$

2. Suppose $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ be given by $f(x)=\begin{cases}1, & \text{if } x=1\\ e^{(x-1)^2}+(x-1)^2\sin\frac{1}{x-1}, & \text{if } x\neq 1\end{cases}$ then

(A) $f'(1)$ does not exist

(B) $f'(1)$ exists and is zero

(C) $f'(1)$ exist and is 9

(D) $f'(1)$ exists and is 10

মনে করি $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ সিদ্ধভাবে সংজ্ঞাত যাহা $f(x)=\begin{cases}1, & \text{if } x=1\\ e^{(x-1)^2}+(x-1)^2\sin\frac{1}{x-1}, & \text{if } x\neq 1\end{cases}$ তাহলে

(A) $f'(1)$-এর অস্তিত্ব নেই

(B) $f'(1)$-এর অস্তিত্ব আছে ও মান হল 0

(C) $f'(1)$ -এর অস্তিত্ব আছে ও মান হল 9

(D) $f'(1)$-এর অস্তিত্ব আছে ও মান হল 10

M-2023

3. Let $f:[1,3]\to R$ be continuous and be derivable in $(1,3)$ and $f'(x)=[f(x)]^2+4\ \forall x\in(1,3)$. Then

(A) $f(3)-f(1)=5$ holds
(B) $f(3)-f(1)=5$ does not hold
(C) $f(3)-f(1)=3$ holds
(D) $f(3)-f(1)=4$ holds

মনে করি, $f:[1,3]\to R$ অপেক্ষকটি $[1,3]$ ব্যবধিতে সন্তত ও $(1,3)$ তে অবকলনযোগ্য অপেক্ষক।
$f'(x)=[f(x)]^2+4$ সকল $x\in(1,3)$-এর জন্য। সেক্ষেত্রে,

(A) $f(3)-f(1)=5$ সর্বদা
(B) $f(3)-f(1)=5$ সর্বদা নয়
(C) $f(3)-f(1)=3$ সর্বদা
(D) $f(3)-f(1)=4$ সর্বদা

4. $f(x)$ is a differentiable function and given $f'(2)=6$ and $f'(1)=4$, then

$$L=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+2h+h^2)-f(2)}{f(1+h-h^2)-f(1)}$$

(A) does not exist
(B) equal to -3
(C) equal to 3
(D) equal to $3/2$

$f(x)$ একটি অবকলনযোগ্য অপেক্ষক এবং $f'(2)=6$, $f'(1)=4$ দেওয়া আছে।
সেক্ষেত্রে, $L=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+2h+h^2)-f(2)}{f(1+h-h^2)-f(1)}$

(A) এর অস্তিত্ব নেই
(B) -3 এর সমান
(C) 3 এর সমান
(D) $3/2$ এর সমান

5. Let $\cos^{-1}\left(\frac{y}{b}\right)=\log_e\left(\frac{x}{n}\right)^n$, then $Ay_2+By_1+Cy=0$ is possible for

মনে করি, $\cos^{-1}\left(\frac{y}{b}\right)=\log_e\left(\frac{x}{n}\right)^n$। সেক্ষেত্রে $Ay_2+By_1+Cy=0$ সম্ভব যখন

where/যেখানে $y_2=\frac{d^2y}{dx^2}$, $y_1=\frac{dy}{dx}$

(A) $A=2, B=x^2, C=n$
(B) $A=x^2, B=x, C=n^2$
(C) $A=x, B=2x, C=3n+1$
(D) $A=x^2, B=3x, C=2n$

M-2023

6. If $I = \int \frac{x^2 dx}{(x \sin x + \cos x)^2} = f(x) + \tan x + c$, then $f(x)$ is

যদি $I = \int \frac{x^2 dx}{(x \sin x + \cos x)^2} = f(x) + \tan x + c$ হয়, তবে $f(x)$ হবে

(A) $\frac{\sin x}{x \sin x + \cos x}$

(B) $\frac{1}{(x \sin x + \cos x)^2}$

(C) $\frac{-x}{\cos x (x \sin x + \cos x)}$

(D) $\frac{1}{\sin x (x \cos x + \sin x)}$

7. If $\int \frac{dx}{(x+1)(x-2)(x-3)} = \frac{1}{k} \log_e \left| \frac{(x-3)^3 (x+1)}{(x-2)^4} \right| + c$, then the value of k is

যদি $\int \frac{dx}{(x+1)(x-2)(x-3)} = \frac{1}{k} \log_e \left| \frac{(x-3)^3 (x+1)}{(x-2)^4} \right| + c$ হয়, তবে k-এর মান হবে

(A) 4 (B) 6 (C) 8 (D) 12

8. The expression $\frac{\int_0^n [x] dx}{\int_0^n \{x\} dx}$, where $[x]$ and $\{x\}$ are respectively integral and fractional part of x and $n \in \mathbb{N}$, is equal to

$\frac{\int_0^n [x] dx}{\int_0^n \{x\} dx}$ -এর মান হবে (এখানে $[x]$ ও $\{x\}$ যথাক্রমে x-এর যথাক্রমে পূর্ণসংখ্যা মান ও ভগ্নাংশ বুঝাইতেছে)

এখানে $n \in \mathbb{N}$

(A) $\frac{1}{n-1}$ (B) $\frac{1}{n}$ (C) n (D) $n-1$

P.T.O.

M-2023

9. The value of $\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^{2n}}}$ is $(n \in \mathbb{N})$

(A) less than or equal to $\frac{\pi}{6}$
(B) greater than or equal to 1
(C) less than $\frac{1}{2}$
(D) greater than $\frac{\pi}{6}$

$\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^{2n}}}$ $(n \in \mathbb{N})$-এর মান

(A) $\frac{\pi}{6}$-এর চেয়ে ছোট বা সমান
(B) 1-এর চেয়ে বড়ো বা সমান
(C) $\frac{1}{2}$-এর চেয়ে ছোট
(D) $\frac{\pi}{6}$-এর চেয়ে বড়ো

10. If $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \cos nx\,dx$, then $I_1, I_2, I_3 \ldots$ are in

(A) A.P.
(B) G.P.
(C) H.P.
(D) no such relation

যদি $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \cos nx\,dx$, তাহলে $I_1, I_2, I_3 \ldots$

(A) সমান্তর প্রগতিতে থাকবে,
(B) গুণোত্তর প্রগতিতে থাকবে,
(C) বিপরীত প্রগতিতে থাকবে,
(D) এমন কোনো সম্পর্ক থাকবে না

11. If $y = \frac{x}{\log_e |cx|}$ is the solution of the differential equation $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \phi\left(\frac{x}{y}\right)$, then $\phi\left(\frac{x}{y}\right)$ is given by

$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \phi\left(\frac{x}{y}\right)$ অন্তরকল সমীকরণের সমাধান $y = \frac{x}{\log_e |cx|}$ হলে, $\phi\left(\frac{x}{y}\right)$ হবে

(A) $\frac{y^2}{x^2}$
(B) $-\frac{y^2}{x^2}$
(C) $\frac{x^2}{y^2}$
(D) $-\frac{x^2}{y^2}$

M-2023

12. The function $y = e^{kx}$ satisfies $\left(\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx}\right)\left(\frac{dy}{dx} - y\right) = y\frac{dy}{dx}$. It is valid for

(A) exactly one value of k.

(B) two distinct values of k.

(C) three distinct values of k.

(D) infinitely many values of k.

অপেক্ষক $y = e^{kx}$, $\left(\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx}\right)\left(\frac{dy}{dx} - y\right) = y\frac{dy}{dx}$ -কে নিত্য অনুরূপ : এটি বৈধ হবে

(A) k-এর একটি মাত্র মানের জন্য

(B) k-এর দুটি পৃথক পৃথক মানের জন্য

(C) k-এর তিনটি পৃথক পৃথক মানের জন্য

(D) k-এর অসীম সংখ্যক মানের জন্য

13. Given $\frac{d^2y}{dx^2} + \cot x \frac{dy}{dx} + 4y \operatorname{cosec}^2 x = 0$. Changing the independent variable x to z by the substitution $z = \log \tan \frac{x}{2}$, the equation is changed to

$\frac{d^2y}{dx^2} + \cot x \frac{dy}{dx} + 4y \operatorname{cosec}^2 x = 0$: অবাধ চলরাশি x-এর জায়গায় $z = \log \tan \frac{x}{2}$ হলে, সমীকরণটি পরিবর্তিত হবে

(A) $\frac{d^2y}{dz^2} + \frac{3}{y} = 0$

(B) $2\frac{d^2y}{dz^2} + e^y = 0$

(C) $\frac{d^2y}{dz^2} - 4y = 0$

(D) $\frac{d^2y}{dz^2} + 4y = 0$

M-2023

14. Let $f(x) = \begin{cases} x+1, & -1 \le x \le 0 \\ -x, & 0 < x \le 1 \end{cases}$

(A) $f(x)$ is discontinuous in $[-1, 1]$ and so has no maximum value or minimum value in $[-1, 1]$.

(B) $f(x)$ is continuous in $[-1, 1]$ and so has maximum value and minimum value.

(C) $f(x)$ is discontinuous in $[-1, 1]$ but still has the maximum and minimum value.

(D) $f(x)$ is bounded in $[-1, 1]$ and does not attain maximum or minimum value.

অথবা ধরা, $f(x) = \begin{cases} x+1, & -1 \le x \le 0 \\ -x, & 0 < x \le 1 \end{cases}$ হলে,

(A) $f(x)$, $[-1, 1]$-এ অন্তরক ও লেবেসগ সূত্রটির ও সর্বনিম্ন মান পরিমাপ করে না

(B) $f(x)$, $[-1,1]$-এ অন্তরক ও লেবেসগ সূত্রটির ও সর্বনিম্ন মান পরিমাপ করে

(C) $f(x)$, $[-1, 1]$ -এ অন্তরক কিন্তু অসংযুক্ত অপেক্ষকটি সূত্রটির ও সর্বনিম্ন মান পরিমাপ করে

(D) $f(x)$, $[-1,1]$ -এ সীমাবদ্ধ অপেক্ষক এবং সূত্রটির ও সর্বনিম্ন মান পরিমাপ করে না

15. A missile is fired from the ground level rises x metres vertically upwards in t sec. where $x = 100t - \frac{25}{2}t^2$. The maximum height reached is

ভূমি থেকে একটি ক্ষেপণাস্ত্র উল্লম্বভাবে উৎক্ষিপ্ত হয়, যেটি t সেকেন্ডে x মিটার পথ অতিক্রম করে যেখানে $x = 100t - \frac{25}{2}t^2$। ক্ষেপণাস্ত্রটি যে সর্বোচ্চ উচ্চতা পরিক্রম করে তার পরিমাপ

(A) 100 m (B) 300 m (C) 200 m (D) 125 m

16. If a hyperbola passes through the point $P(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ and has foci at $(\pm 2, 0)$, then the tangent to this hyperbola at P is

$P(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ বিন্দুগামী একটি পরাবৃত্তের নাভিদ্বয় $(\pm 2, 0)$ হলে, P বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের সমীকরণ হল

(A) $y = x\sqrt{6} - \sqrt{3}$ (B) $y = x\sqrt{3} - \sqrt{6}$

(C) $y = x\sqrt{6} + \sqrt{3}$ (D) $y = x\sqrt{3} + \sqrt{6}$

M-2023

17. A, B are fixed points with coordinates (0, a) and (0, b) (a > 0, b > 0). P is variable point (x, 0) referred to rectangular axis. If the angle ∠APB is maximum, then

A ও B দুটি স্থির বিন্দু, যাদের স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (0, a) ও (0, b) (a > 0, b > 0)। আয়তাকার অক্ষ বাবস্থায়, P একটি পরিবর্তী বিন্দু (x, 0)। যদি কোণ ∠APB সর্বোচ্চ হয়, তবে

(A) $x^2 = ab$ (B) $x^2 = a + b$

(C) $x = \frac{1}{ab}$ (D) $x = \frac{a+b}{2}$

18. The average length of all vertical chords of the hyperbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, a \le x \le 2a$, is

পরাবৃত্ত $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, a \le x \le 2a$। পরাবৃত্তের সকল উল্লম্ব জ্যা-এর গড় দৈর্ঘ্য হল

* (A) $b\left[2\sqrt{3} + \ln(2+\sqrt{3})\right]$ (B) $b\left[3\sqrt{2} + \ln(3+\sqrt{2})\right]$

(C) $a\left[2\sqrt{3} - \ln(2+\sqrt{3})\right]$ (D) $a\left[5\sqrt{2} + \ln(5+\sqrt{2})\right]$

19. The value of 'a' for which the scalar triple product formed by the vectors

$\vec{\alpha} = \hat{i} + a\hat{j} + \hat{k}$, $\vec{\beta} = \hat{j} + a\hat{k}$ and $\vec{\gamma} = a\hat{i} + \hat{k}$ is maximum, is

$\vec{\alpha} = \hat{i} + a\hat{j} + \hat{k}$, $\vec{\beta} = \hat{j} + a\hat{k}$, $\vec{\gamma} = a\hat{i} + \hat{k}$-এর scalar triple product সর্বোচ্চ হলে 'a'-এর মান হবে

(A) 3 (B) -3

(C) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (D) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

M-2023

20. If the vertices of a square are z_1, z_2, z_3 and z_4 taken in the anti-clockwise order, then $z_3 =$

যদি কোনো বিন্যাসে যেন বিপরীত ঘড়ির কাঁটার দিকে একটি বর্গক্ষেত্রের শীর্ষবিন্দু চারটির অবস্থানগুলি z_1, z_2, z_3 ও z_4 হয়, তবে z_3 হবে

(A) $-iz_1 - (1+i)z_2$ (B) $z_1 - (1+i)z_2$

(C) $z_1 + (1+i)z_2$ (D) $-iz_1 + (1+i)z_2$

21. If the n terms $a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n$ are in A.P. with increment r, then the difference between the mean of their squares & the square of their mean is

n সংখ্যক পদ $a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n$ সমান্তর শ্রেণিভুক্ত (A.P.) হলে, যেখানে সাধারণ অন্তর হল r, সেক্ষেত্রে সংখ্যাগুলির বর্গ সমূহের মধ্যক ও সংখ্যাগুলির মধ্যকের বর্গের অন্তর হল

(A) $\frac{r^2[(n-1)^2-1]}{12}$ (B) $\frac{r^2}{12}$ (C) $\frac{r^2(n^2-1)}{12}$ (D) $\frac{n^2-1}{12}$

22. If $1, \log_9(3^{1-x}+2), \log_3(4.3^x-1)$ are in A.P., then x equals

$1, \log_9(3^{1-x}+2), \log_3(4.3^x-1)$ সমান্তর শ্রেণিভুক্ত হলে x এর মান হবে

(A) $\log_3 4$ (B) $1-\log_3 4$ (C) $1-\log_4 3$ (D) $\log_4 3$

23. Reflection of the line $iz + a\bar{z} = 0$ in the real axis is given by

সরল রেখা $iz + a\bar{z} = 0$ বিষয়ে প্রতিফলন হবে

(A) $az + \bar{a}\bar{z} = 0$ (B) $iz - a\bar{z} = 0$ (C) $az - \bar{a}\bar{z} = 0$ (D) $\frac{z}{z} + \frac{\bar{z}}{\bar{z}} = 0$

M-2023

24. If one root of $x^2 + px - q^2 = 0$, p and q are real, be less than 2 and other be greater than 2, then

$x^2 + px - q^2 = 0$ সমীকরণের (p ও q বাস্তব) একটি বীজ 2-এ চেয়ে ছোটো ও অপরটি 2-এ চেয়ে বড় হলে

(A) $4 + 2p + q^2 > 0$ (B) $4 + 2p + q^2 < 0$

(C) $4 + 2p - q^2 > 0$ (D) $4 + 2p - q^2 < 0$

25. The number of ways in which the letters of the word 'VERTICAL' can be arranged without changing the order of the vowels is

'VERTICAL' শব্দটির বর্ণগুলিকে এদের পরিবর্তন না করে যে শব্দটির স্বরবর্ণগুলির ক্রমানুসারে বিন্যাস করা যায়, তার সংখ্যা হল

(A) $6! \times 3!$ (B) $\frac{8!}{3}$

(C) $6! \times 3$ (D) $\frac{8!}{3!}$

26. n objects are distributed at random among n persons. The number of ways in which this can be done so that at least one of them will not get any object is

n সংখ্যক বস্তুকে যদৃচ্ছভাবে একজন করে মোট n জন ব্যক্তির মধ্যে এমনভাবে বণ্টন করা যায় যে সংখ্যক পদ্ধতিতে, যা হল

(A) $n! - n$ (B) $n^n - n$

(C) $n^n - n^2$ (D) $n^n - n!$

M-3023

27. Let $P(n) = 3^{2n+1} + 2^{n+2}$ where $n \in \mathbb{N}$. Then

(A) $P(n)$ is not divisible by any prime integer

(B) there exists prime integer which divides $P(n)$

(C) $P(n)$ is divisible by 5 for all $n \in \mathbb{N}$

(D) $P(n)$ is divisible by 3 for all $n \in \mathbb{N}$

মনে কর, সকল $n \in \mathbb{N}$ এর জন্য $P(n) = 3^{2n+1} + 2^{n+2}$। তাহলে

(A) $P(n)$ কোন মৌলিক সংখ্যা দ্বারা বিভাজ্য নয়

(B) এমন মৌলিক সংখ্যার অস্তিত্ব রয়েছে যার দ্বারা $P(n)$ বিভাজ্য হয়

(C) সকল $n \in \mathbb{N}$ এর জন্য $P(n)$, 5 দ্বারা বিভাজ্য হয়

(D) সকল $n \in \mathbb{N}$ এর জন্য $P(n)$, 3 দ্বারা বিভাজ্য হয়

28. Let A be a set containing n elements. A subset P of A is chosen, and the set A is reconstructed by replacing the elements of P. A subset Q of A is chosen again. The number of ways of choosing P and Q such that Q contains just one element more than P is

A একটি n সংখ্যক ভিন্ন সেট। P, A -এর একটি উপসেট গঠন করা হল। P উপসেটের সদস্যগুলি নিয়ে A সেটটি পুনরায় গঠন করা হল। Q, A এর আর একটি উপসেট গঠন করা হল। P ও Q যত প্রকার ভাবে গঠন করা যাবে যাতে Q-এর সদস্য সংখ্যা P-এর সদস্য সংখ্যার থেকে একটি বেশী হয় তার সংখ্যা হবে

(A) ${}^{2n}C_{n-1}$ (B) ${}^{2n}C_n$ (C) ${}^{2n}C_{n+1}$ (D) 2^{2n+1}

29. Let A and B are orthogonal matrices and $\det A + \det B = 0$. Then

(A) $A + B$ is singular

(B) $A + B$ is non-singular

(C) $A + B$ is orthogonal

(D) $A + B$ is skew symmetric

মনে কর, A ও B দুটি সম ঘাতীয় বর্গ যার $\det A + \det B = 0$। তাহলে

(A) $A + B$ বিশিষ্ট ঘাতীয়

(B) $A + B$ অবিশিষ্ট ঘাতীয়

(C) $A + B$ একটি সম ঘাতীয়

(D) $A + B$ বিপ্রতিসম ঘাতীয়

12

M-2021

30. Let $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 4 & 7 & 11 \\ 5 & 4 & 8 \end{pmatrix}$. Then

(A) det A is divisible by 11
(B) det A is not divisible by 11
(C) det A = 0
(D) A is orthogonal matrix

মনে করি, $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 4 & 7 & 11 \\ 5 & 4 & 8 \end{pmatrix}$ । সেক্ষেত্রে

(A) det A, 11 দ্বারা বিভাজ্য
(B) det A, 11 দ্বারা বিভাজ্য নয়
(C) det A = 0
(D) A একটি লম্ব মাত্রিক

31. If the matrix M_r is given by $M_r = \begin{pmatrix} r & r-1 \\ r-1 & r \end{pmatrix}$ for $r = 1, 2, 3, \ldots$ then

$\det(M_1) + \det(M_2) + \ldots + \det(M_{2008}) =$

মাত্রিক $M_r = \begin{pmatrix} r & r-1 \\ r-1 & r \end{pmatrix}$, $r = 1, 2, 3, \ldots$ দ্বারা সংজ্ঞাত । সেক্ষেত্রে

$\det(M_1) + \det(M_2) + \ldots + \det(M_{2008}) =$

(A) 2007
(B) 2008
(C) $(2008)^2$
(D) $(2007)^2$

32. Let α, β be the roots of the equation $ax^2 + bx + c = 0$, a, b, c real and $s_n = \alpha^n + \beta^n$ and

$$\begin{vmatrix} 3 & 1+s_1 & 1+s_2 \\ 1+s_1 & 1+s_2 & 1+s_3 \\ 1+s_2 & 1+s_3 & 1+s_4 \end{vmatrix} = k\frac{(a+b+c)^2}{a^2}$$ then k =

মনে করি, α, β সমীকরণ $ax^2 + bx + c = 0$-এর মূল যেখানে a, b, c বাস্তব এবং

$s_n = \alpha^n + \beta^n$ এবং $\begin{vmatrix} 3 & 1+s_1 & 1+s_2 \\ 1+s_1 & 1+s_2 & 1+s_3 \\ 1+s_2 & 1+s_3 & 1+s_4 \end{vmatrix} = k\frac{(a+b+c)^2}{a^4}$ হলে k =

(A) $b^2 - 4ac$
(B) $b^2 + 4ac$
(C) $b^2 + 2ac$
(D) $4ac - b^2$

M-2023

33. Let A, B, C are subsets of set X. Then consider the validity of the following set theoretic statement :

মনে করি, A, B, C তিনটি X-এর উপসেট। সেক্ষেত্রে নিম্নলিখিত সেটতাত্ত্বিক উক্তিগুলির যথার্থতা নির্ণয় কর :

(A) $A \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus (A \cup C)$

(B) $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$

(C) $(A \cup B) \setminus A = A \setminus B$

(D) $A \setminus C = B \setminus C$

34. Let X be a non-void set. If ρ_1 and ρ_2 be the transitive relations on X, then

(A) $\rho_1 \circ \rho_2$ is transitive relation

(B) $\rho_1 \circ \rho_2$ is not transitive relation

(C) $\rho_1 \circ \rho_2$ is equivalence relation

(D) $\rho_1 \circ \rho_2$ is not any relation on X

($\circ$ denotes the composition of relations)

মনে কর, X একটি অশূন্য সেট। যদি ρ_1 ও ρ_2 X-এর সংজ্ঞার সংক্রমণ সম্বন্ধ হয়, তবে

(A) $\rho_1 \circ \rho_2$ সংক্রমণ সম্বন্ধ

(B) $\rho_1 \circ \rho_2$ সংক্রমণ সম্বন্ধ নয়

(C) $\rho_1 \circ \rho_2$ সমতুল্যতা সম্বন্ধ

(D) $\rho_1 \circ \rho_2$, X-এর কোনো সম্বন্ধ সংজ্ঞায়িত করে না

($\circ$ সংযোজক সম্বন্ধ বোঝায়)

35. Let A and B are two independent events. The probability that both A and B happen is $\frac{1}{12}$ and probability that neither A nor B happen is $\frac{1}{2}$. Then

মনে কর, A ও B পরস্পর নিরপেক্ষ দুটি ঘটনা। A ও B উভয়েই ঘটবে এমন সম্ভাবনা হল $\frac{1}{12}$ এবং A ও B -এর একটিও ঘটবে না এমন সম্ভাবনা হল $\frac{1}{2}$। সেক্ষেত্রে

(A) $P(A) = \frac{1}{3}, P(B) = \frac{1}{4}$

(B) $P(A) = \frac{1}{2}, P(B) = \frac{1}{6}$

(C) $P(A) = \frac{1}{6}, P(B) = \frac{1}{2}$

(D) $P(A) = \frac{2}{3}, P(B) = \frac{1}{8}$

M-2023

36. Let S be the sample space of the random experiment of throwing simultaneously two unbiased dice and $E_k = \{(a, b) \in S : ab = k\}$. If $p_k = P(E_k)$, then the correct among the following is :

দুটি নিরপেক্ষ ছক্কা একসঙ্গে ছোড়ার যদৃচ্ছ পরীক্ষণের নমুনা ক্ষেত্র S এবং $E_k = \{(a, b) \in S : ab = k\}$ । যদি $p_k = P(E_k)$ হয়, তবে নিম্নের সম্পর্কগুলির কোনটি ঠিক ?

(A) $p_1 < p_{18} < p_6$ (B) $p_2 < p_9 < p_{14}$

(C) $p_8 < p_5 < p_{17}$ (D) $p_3 < p_{10} < p_1$

37. If $\frac{1}{6}\sin\theta, \cos\theta, \tan\theta$ are in G.P, then the solution set of θ is

যদি $\frac{1}{6}\sin\theta, \cos\theta, \tan\theta$ সমগুণোত্তর শ্রেণিভুক্ত থাকে তবে θ-এর সমাধান সেট হবে

(A) $2n\pi \pm \frac{\pi}{6}$ (B) $2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (C) $n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{3}$ (D) $n\pi + \frac{\pi}{3}$

(Here/এখানে $n \in \mathbb{N}$)

38. The equation $r^2\cos^2\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) = 2$ represents

(A) a parabola (B) a hyperbola

(C) a circle (D) a pair of straight lines

$r^2\cos^2\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) = 2$ সমীকরণ কোন

(A) একটি অধিবৃত্ত (B) একটি পরাবৃত্ত

(C) একটি বৃত্ত (D) সরলরেখা যুগল

P.T.O.

M-2023

39. Let A be the point (0, 4) in the xy-plane and let B be the point (2t, 0). Let L be the midpoint of AB and let the perpendicular bisector of AB meet the y-axis M. Let N be the midpoint of LM. Then locus of N is

(A) a circle
(B) a parabola
(C) a straight line
(D) a hyperbola

xy-তলে A(0, 4) এবং B(2t, 0) । ধরা যাক, L, AB-এর মধ্যবিন্দু এবং ধরা যাক, AB-এর লম্ব সমদ্বিখণ্ডক y-অক্ষকে M বিন্দুতে ছেদ করে । ধরা যাক, N, LM-এর মধ্যবিন্দু । সেক্ষেত্রে N-এর সঞ্চারপথ হবে

(A) একটি বৃত্ত
(B) একটি অধিবৃত্ত
(C) একটি সরলরেখা
(D) একটি পরাবৃত্ত

40. If $4a^2 + 9b^2 - c^2 + 12ab = 0$, then the family of straight lines $ax + by + c = 0$ is concurrent at

(A) (2, 3) or (–2, –3)
(B) (–2, 3) or (2, 3)
(C) (3, 2) or (–3, 2)
(D) (–3, 2) or (2, 3)

যদি $4a^2 + 9b^2 - c^2 + 12ab = 0$ হয়, তবে সরলরেখা পরিবার $ax + by + c = 0$ যে বিন্দুতে সমবিন্দু হবে তা হল

(A) (2, 3) অথবা (–2, –3)
(B) (–2, 3) অথবা (2, 3)
(C) (3, 2) অথবা (–3, 2)
(D) (–3, 2) অথবা (2, 3)

41. The straight lines $x + 2y - 9 = 0$, $3x + 5y - 5 = 0$ and $ax + by - 1 = 0$ are concurrent if the straight line $35x - 22y + 1 = 0$ passes through the point

$x + 2y - 9 = 0$, $3x + 5y - 5 = 0$ ও $ax + by - 1 = 0$ সরলরেখাত্রয় সমবিন্দু হবে, যদি $35x - 22y + 1 = 0$ সরলরেখাটি যে বিন্দুগামী হয়,

(A) (–a, –b)
(B) (a, – b)
(C) (–a, b)
(D) (a, b)

16

M-2023

42. ABC is an isosceles triangle with an inscribed circle with centre O. Let P be the midpoint of BC. If AB = AC = 15 and BC = 10, then OP equals

(A) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$ unit (B) $\frac{5}{\sqrt{2}}$ unit

(C) $2\sqrt{5}$ unit (D) $5\sqrt{2}$ unit

ABC একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ, যার একটি অন্তঃবৃত্ত কেন্দ্রটি O। ধরা যাক, P, BC এর মধ্যবিন্দু। যদি AB = AC = 15 একক হয় এবং BC = 10 একক হয়, তবে OP হবে

(A) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$ একক (B) $\frac{5}{\sqrt{2}}$ একক

(C) $2\sqrt{5}$ একক (D) $5\sqrt{2}$ একক

43. Let O be the vertex, Q be any point on the parabola $x^2 = 8y$. If the point P divides the line segment OQ internally in the ratio 1 : 3, then the locus of P is

ধরা যাক, অধিবৃত্ত $x^2 = 8y$ -এর শীর্ষবিন্দু হল O এবং Q অধিবৃত্তের উপরিস্থ যেকোন একটি বিন্দু। যদি P বিন্দু OQ রেখাংশকে 1 : 3 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে তবে P-এর সঞ্চারপথ হবে

(A) $x^2 = y$ (B) $y^2 = x$ (C) $y^2 = 2x$ (D) $x^2 = 2y$

44. The tangent at point $(a\cos\theta, b\sin\theta), 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, to the ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ meets the x-axis at T and y-axis at T_1. Then the value of $\min_{0<\theta<\frac{\pi}{2}} (OT)\,(OT_1)$ is

উপবৃত্ত $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ -এর $(a\cos\theta, b\sin\theta), 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক x-অক্ষকে T বিন্দুতে ও y-অক্ষকে T_1 বিন্দুতে ছেদ করে। সেক্ষেত্রে $\min_{0<\theta<\frac{\pi}{2}} (OT)\,(OT_1)$ -এর মান হবে

(A) ab (B) 2ab (C) 0 (D) 1

M-2023

45. Let A(2 sec θ, 3 tan θ) and B(2 sec φ, 3 tan φ) where $\theta + \phi = \frac{\pi}{2}$ be two points on the hyperbola $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$. If (α, β) is the point of intersection of normals to the hyperbola at A and B, then β is equal to

মনে কর, A(2 sec θ, 3 tan θ) ও B(2 sec φ, 3 tan φ), $\theta + \phi = \frac{\pi}{2}$ পরাবৃত্ত $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$-এর উপরিস্থ দুটি বিন্দু। যদি A & B দুটি বিন্দুতে অঙ্কিত অভিলম্বদ্বয়ের ছেদ বিন্দুর স্থানাঙ্ক (α, β) হয় তবে β হবে

(A) $\frac{12}{3}$ (B) $\frac{13}{3}$ (C) $-\frac{12}{3}$ (D) $-\frac{13}{3}$

46. If the lines joining the foci of the ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ where a > b, and an extremity of its minor axis is inclined at an angle 60°, then the eccentricity of the ellipse is

উপবৃত্ত $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, a > b$-এর অক্ষিদ্বয় ও উপবৃত্তটির উপাক্ষের একটি প্রান্তবিন্দুর সংযোজকরেখা যদি 60° কোণে নত হয়, উপবৃত্তটির উৎকেন্দ্রতা হবে

(A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{\sqrt{7}}{3}$ (D) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

47. If the distance between the plane $ax - 2y + z = k$ and the plane containing the lines $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4}$ and $\frac{x-2}{3} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-4}{5}$ is $\sqrt{6}$, then $|k|$ is

যদি $ax - 2y + z = k$ ও $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4}$ ও $\frac{x-2}{3} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-4}{5}$ সমতলদ্বয়ের থেকে অন্তরের সংখ্যামান মূলত $\sqrt{6}$ একক হয় $|k|$ হবে

(A) 36 (B) 12 (C) 6 (D) $2\sqrt{3}$

M-2023

48. The angle between a normal to the plane $2x - y + 2z - 1 = 0$ and the X-axis is

X-অক্ষ এবং $2x - y + 2z - 1 = 0$ -তলের অভিলম্বের অন্তর্কোণ হবে

(A) $\cos^{-1}\frac{2}{3}$ (B) $\cos^{-1}\frac{1}{3}$ (C) $\cos^{-1}\frac{3}{4}$ (D) $\cos^{-1}\frac{1}{2}$

49. Let $f(x) = [x^2]\sin \pi x, x > 0$. Then

(A) f is discontinuous everywhere.

(B) f is continuous everywhere.

(C) f is continuous at only those points which are perfect squares.

(D) f is continuous at only those points which are not perfect squares.

মনে করি, $f(x) = [x^2]\sin \pi x, x > 0$ ফলনের,

(A) f সর্বত্রই অসন্তত

(B) f সর্বত্রই সন্তত

(C) যেসব বিন্দু পূর্ণবর্গ, কেবলমাত্র সেইসব বিন্দুতেই f সন্তত হবে

(D) যেসব বিন্দু পূর্ণবর্গ নয়, কেবলমাত্র সেইসব বিন্দুতেই f সন্তত হবে

* Option not matching

50. If $y = \log^n x$, where $\log^n$ means $\log_a \log_a \log_a \ldots$ (repeated n times), then

$x \log x \log^2 x \log^3 x \ldots \log^{n-1} x \log^n x \frac{dy}{dx}$ is equal to

$\log^n$ বলতে $\log_a \log_a \log_a \ldots$ (n-সংখ্যক পদ পর্যন্ত) বোঝায়। যদি $y = \log^n x$ হয়, তবে

$x \log x \log^2 x \log^3 x \ldots \log^{n-1} x \log^n x \frac{dy}{dx}$ -এর মান হবে

(A) $\log x$ (B) x (C) 1 (D) $\log^n x$

M : 2023

Category-2 (Q. 51 to 65)

(Carry 2 marks each. Only one option is correct. Negative marks: −½)

51. $\int_0^{2\pi} \theta \sin^5\theta \cos\theta \, d\theta$ is equal to

$\int_0^{2\pi} \theta \sin^5\theta \cos\theta \, d\theta$-এর মান হল

(A) $\frac{\pi}{16}$ (B) $\frac{3\pi}{16}$ (C) $\frac{16\pi}{3}$ (D) 0

52. If $x = \sin\theta$ and $y = \sin k\theta$, then $(1-x^2)y_2 - xy_1 - ay = 0$, for $a =$

$x = \sin\theta$ ও $y = \sin k\theta$ হলে $(1-x^2)y_2 - xy_1 - ay = 0$ হলে, a-এর মান হবে

(A) k (B) $-k$ (C) $-k^2$ (D) k^2

53. In the interval $(-2\pi, 0)$, the function $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x^3}\right)$

(A) never changes sign.

(B) changes sign only once.

(C) changes sign more than once but finitely many times.

(D) changes sign infinitely many times.

$(-2\pi, 0)$ ব্যবধিতে অপেক্ষক $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x^3}\right)$ অপেক্ষকটি

(A) কখনই চিহ্ন পরিবর্তন করে না

(B) মাত্র একবার চিহ্ন পরিবর্তন করে

(C) একবারের চেয়ে বেশি কিন্তু সসীম সংখ্যক বার চিহ্ন পরিবর্তন করে

(D) অসীম সংখ্যক বার চিহ্ন পরিবর্তন করে

M-2023

54. The average ordinate of $y = \sin x$ over $[0, \pi]$ is

$[0, \pi]$ -এর ওপর $y = \sin x$ বক্ররেখার কোটি সমূহের গড় মান

(A) $\frac{2}{\pi}$ (B) $\frac{3}{\pi}$

(C) $\frac{4}{\pi}$ (D) π

55. The portion of the tangent to the curve $x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{3}}$, $a > 0$ at any point of it, intercepted between the axes

(A) varies as abscissa

(B) varies as ordinate

(C) is constant

(D) varies as the product of abscissa and ordinate

$x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{3}}$, $a > 0$ বক্ররেখার উপরিস্থ কোন বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের যে অংশ অক্ষদ্বয়ের মধ্যে ছেদিত হয়, সেটি

(A) ভুজের সঙ্গে সমানুপাতে থাকে

(B) কোটির সঙ্গে সমানুপাতে থাকে

(C) ধ্রুবক

(D) ভুজ ও কোটির গুণফলের সঙ্গে সমানুপাতে থাকে

M-2023

56. If the volume of the parallelopiped with $\vec{a} \times \vec{b}$, $\vec{b} \times \vec{c}$ and $\vec{c} \times \vec{a}$ as coterminous edges is 9 cu. units, then the volume of the parallelopiped with $(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{b} \times \vec{c})$, $(\vec{b} \times \vec{c}) \times (\vec{c} \times \vec{a})$ and $(\vec{c} \times \vec{a}) \times (\vec{a} \times \vec{b})$ as coterminous edges is

(A) 9 cu. units
(B) 729 cu. units
(C) 81 cu. units
(D) 243 cu. units

৩ ঘন একক আয়তন বিশিষ্ট একটি চতুষ্ফলকের সমসংলগ্নিক বাহুগুলি $\vec{a} \times \vec{b}$, $\vec{b} \times \vec{c}$ এবং $\vec{c} \times \vec{a}$ | ঐ চতুষ্ফলকের সমসংলগ্নিক বাহুগুলি $(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{b} \times \vec{c})$, $(\vec{b} \times \vec{c}) \times (\vec{c} \times \vec{a})$ এবং $(\vec{c} \times \vec{a}) \times (\vec{a} \times \vec{b})$ হলে আয়তন হবে

(A) 9 ঘন একক
(B) 729 ঘন একক
(C) 81 ঘন একক
(D) 243 ঘন একক

57. Given $f(x) = e^{\sin x} + e^{\cos x}$. The global maximum value of $f(x)$

(A) does not exist.
(B) exists at a point in $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ and its value is $2e^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$.
(C) exists at infinitely many points.
(D) exists at $x = 0$ only.

$f(x) = e^{\sin x} + e^{\cos x}$ অপেক্ষকের global সর্বোচ্চ মান

(A) -এর অস্তিত্ব নেই
(B) $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ব্যবধিতে একটি বিন্দুতে অস্তিত্ব আছে এবং তার মান হল $2e^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$
(C) অসীম সংখ্যক বিন্দুতে ঐ সর্বোচ্চ মান বিদ্যমান
(D) শুধুমাত্র $x = 0$ -তে অস্তিত্ব আছে

22

M-2023

58. Consider a quadratic equation $ax^2 + 2bx + c = 0$ where a, b, c are positive real numbers. If the equation has no real root, then which of the following is true?

(A) a, b, c cannot be in A.P. or H.P. but can be in G.P.

(B) a, b, c cannot be in G.P. or H.P. but can be in A.P.

(C) a, b, c cannot be in A.P. or G.P. but can be in H.P.

(D) a, b, c cannot be in A.P., G.P. or H.P.

a, b, c- ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যা হলে $ax^2 + 2bx + c = 0$ দ্বিঘাত সমীকরণটি বিবেচনা করা। সমীকরণটির দ্বিমূলগুলি বাস্তব না হলে, নিম্নলিখিত বিবৃতিগুলির কোনটি সত্য :

(A) a, b, c, A.P. বা H.P. তে থাকতে না কিন্তু G.P. তে থাকতে পারে

(B) a, b, c, G.P. বা H.P. তে থাকতে না কিন্তু A.P. তে থাকতে পারে

(C) a, b, c, A.P. বা G.P. তে থাকতে না কিন্তু H.P. তে থাকতে পারে

(D) a, b, c, A.P., G.P. বা H.P. তে নেই

59. Let $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$ be positive real numbers. Then the minimum value of $\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \ldots + \frac{a_n}{a_1}$ is

ধরা যাক, $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$ ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যা। সেক্ষেত্রে $\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \ldots + \frac{a_n}{a_1}$-এর সর্বনিম্ন মান হবে

(A) 1 (B) n (C) ${}^nC_2$ (D) 2

M-2023

60. Let $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ and $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix}$ be an orthogonal matrix such that $B = PAP^{-1}$ holds. Then

ধরে নাও, $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ও $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix}$ একটি লম্ব মাত্রীক (orthogonal matrix) এরূপ যে $B = PAP^{-1}$ স্থির করে। সেক্ষেত্রে

(A) $x = 1 = y$ (B) $x = 1, y = 0$

(C) $x = 0, y = 1$ (D) $x = -1, y = 0$

61. Let p be a relation defined on set of natural numbers N, as $p = \{(x, y) \in N \times N : 2x + y = 41\}$. Then domain A and range B are

স্বাভাবিক সংখ্যার সেট N-এ সম্পর্ক p সংজ্ঞায়িত হয়ে যে $p = \{(x, y) \in N \times N : 2x + y = 41\}$। সেক্ষেত্রে সংজ্ঞায়ন অঞ্চল A ও X-এ বিস্তার B হল

(A) $A \subset \{x \in N : 1 \le x \le 20\}$ and $B \subset \{y \in N : 1 \le y \le 39\}$

(B) $A = \{x \in N : 1 \le x \le 13\}$ and $B = \{y \in N : 2 \le y \le 39\}$

(C) $A = N, B = Q$

(D) $A = Q, B = Q$

62. From the focus of the parabola $y^2 = 12x$, a ray of light is directed in a direction making an angle $\tan^{-1}\frac{3}{4}$ with x-axis. Then the equation of the line along which the reflected ray leaves the parabola is

অধিবৃত্ত $y^2 = 12x$-এর নাভি থেকে একটি আলোকরশ্মি x-অক্ষের সঙ্গে $\tan^{-1}\frac{3}{4}$ কোণে যত অধিবৃত্তে পতিত হয়। সেক্ষেত্রে প্রতিফলিত রশ্মি যে সরীয় বরাবর অধিবৃত্ত ত্যাগ করে তাহার সমীকরণ হল

(A) $y = 2$ (B) $y = 18$ (C) $y = 9$ (D) $y = 36$

M-2023

63. The locus of points (x, y) in the plane satisfying $\sin^2 x + \sin^2 y = 1$ consists of

(A) a circle centered at origin

(B) infinitely many circles that are all centered at the origin

(C) infinitely many lines with slope ± 1

(D) finitely many lines with slope ± 1

$\sin^2 x + \sin^2 y = 1$ সমীকরণের কিছু অংশ, এখন (x, y) তলস্থিত সকল বিন্দুর সঞ্চারপথ হল

(A) মূল বিন্দুতে কেন্দ্র এবং বৃত্ত

(B) মূল বিন্দুতে কেন্দ্র এবং অসীম সংখ্যক বৃত্ত

(C) শূন্য ± 1 ঢালবিশিষ্ট অসীম সংখ্যক রেখার পরিবার

(D) শূন্য ± 1 ঢালবিশিষ্ট সসীম সংখ্যক রেখার পরিবার

64. The value of $\lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{2^2\cdot 3}\right)+\left(\frac{1}{2^2\cdot 3^2}+\frac{1}{2^3\cdot 3^2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^n\cdot 3^n}+\frac{1}{2^{n+1}\cdot 3^n}\right)\right]$ is

$\lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{2^2\cdot 3}\right)+\left(\frac{1}{2^2\cdot 3^2}+\frac{1}{2^3\cdot 3^2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^n\cdot 3^n}+\frac{1}{2^{n+1}\cdot 3^n}\right)\right]$ এর মান

(A) $\frac{3}{8}$ (B) $\frac{3}{10}$ (C) $\frac{3}{14}$ (D) $\frac{3}{16}$

65. The family of curves $y = e^{x\sin x}$, where 'x' is arbitrary constant, is represented by the differential equation

প্রদত্ত রেখা পরিবার $y = e^{x\sin x}$, 'x' - যদৃচ্ছ ধ্রুবক, যে অবকল সমীকরণ দ্বারা সংজ্ঞায়িত হয় সেটি হল

(A) $y\log y = \tan x\,\frac{dy}{dx}$ (B) $y\log x = \cot x\,\frac{dy}{dx}$

(C) $\log y = \tan x\,\frac{dy}{dx}$ (D) $\log y = \cot x\,\frac{dy}{dx}$

M-2023

Category-3 (Q. 66 to 75)

(Carry 2 marks each. One or more options are correct. No negative marks)

66. Let f be a non-negative function defined on $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ if $\int_0^x (f'(t) - \sin 2t)\,dt = \int_x^0 f(t)\tan t\,dt$,

$f(0) = 1$, then $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx$ is

মনে করি, $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$-তে সংজ্ঞাত f অ-ঋণাত্মক অপেক্ষক।

$\int_0^x (f'(t) - \sin 2t)dt = \int_0^x f(t)\tan t\,dt$, $f(0) = 1$ হলে $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx$ হবে

(A) 3 (B) $3 - \frac{\pi}{2}$ (C) $3 + \frac{\pi}{2}$ (D) $\frac{\pi}{2}$

67. A balloon starting from rest is ascending from ground with uniform acceleration of 4 ft/sec^2. At the end of 5 sec, a stone is dropped from it. If T be the time to reach the stone to the ground and H be the height of the balloon when the stone reaches the ground, then

স্থিতাবস্থা থেকে যাত্রা করে একটি বেলুন 4 ft/sec^2 সুষম ত্বরণে ঊর্ধ্বগামী। 5 সেকেন্ড পরে বেলুনটি থেকে একটি পাথর ছাড়া হলো। যদি পাথরটি T সেকেন্ড পরে ভূমি স্পর্শ করে এবং যখন পাথরটি ভূমি স্পর্শ করে তখন বেলুনটির উচ্চতা H ft হয়, তবে

(A) T = 6 sec (B) H = 112.5 ft
(C) T = 5/2 sec (D) 225 ft

68. If $f(x) = 3\sqrt[3]{x^2} - x^2$, then

(A) f has no extrema.
(B) f is maximum at two points $x = 1$ and $x = -1$.
(C) f is minimum at $x = 0$.
(D) f has maximum at $x = 1$ only.

মনে করি, $f(x) = 3\sqrt[3]{x^2} - x^2$ হলে

(A) f-এর চরম মান নেই
(B) $x = 1, x = -1$ বিন্দুতে f-এর সর্বোচ্চ মান আছে
(C) $x = 0$ বিন্দুতে f-এর সর্বনিম্ন মান বিদ্যমান
(D) শুধুমাত্র $x = 1$ বিন্দুতে f-এর সর্বোচ্চ মান আছে

69. If z_1 and z_2 are two complex numbers satisfying the equation $\left|\frac{z_1+z_2}{z_1-z_2}\right|=1$, then $\frac{z_1}{z_2}$ may be

(A) real positive
(B) real negative
(C) zero
(D) purely imaginary

z_1 ও z_2 দুটি জটিলরাশি যারা $\left|\frac{z_1+z_2}{z_1-z_2}\right|=1$ সমীকরণকে সিদ্ধ করে, তাহলে $\frac{z_1}{z_2}$ হবে

(A) বাস্তব ধনাত্মক
(B) বাস্তব ঋণাত্মক
(C) শূন্য
(D) শুধুমাত্র কাল্পনিক

70. A locker book consists of three rings with 15 different letters. If N denotes the number of ways in which it is possible to make unsuccessful attempts to open the lock, then

(A) 482 divides N
(B) N is the product of two distinct prime numbers
(C) N is the product of three distinct prime numbers
(D) 14 divides N

একটি তালার তালায় তিনটি বলয় আছে। প্রতিটি বলয়ে 15 টি ভিন্ন ভিন্ন অক্ষর আছে। N যদি তালা খুলবার ব্যর্থ প্রচেষ্টার সংখ্যা হয় তবে

(A) N, 482 দ্বারা বিভাজ্য
(B) N, দুটি ভিন্ন মৌলিক সংখ্যার গুণফল
(C) N, তিনটি ভিন্ন মৌলিক সংখ্যার গুণফল
(D) N, 14 দ্বারা বিভাজ্য

M-2023

71. If R and R' are equivalence relations on a set A, then so are the relations

(A) R'

(B) R ∪ R'

(C) R ∩ R'

(D) All of these

যদি A সেট R ও R' সাপেক্ষে সমক সম্বন্ধ হয়, তাহলে সম্বন্ধগুলি হবে

(A) R'

(B) R ∪ R'

(C) R ∩ R'

(D) এর কোনটি নয়

72. Let f be a strictly decreasing function defined on R such that $f(x) > 0$, $\forall x \in R$. Let $\frac{x^2}{f(a^2+5a+3)} + \frac{y^2}{f(a+13)} = 1$ be an ellipse with major axis along the y-axis. The value of 'a' can lie in the interval is

R-এ সর্বত্র ক্রমহ্রাসমান অপেক্ষক যদি $f(x) > 0, \forall x \in R$ হয়, $\frac{x^2}{f(a^2+5a+3)} + \frac{y^2}{f(a+13)} = 1$ উপবৃত্তটির পরাক্ষ y-অক্ষ বরাবর থাকলে 'a' কোন্ ব্যবধিতে থাকতে পারে তা হল

(A) $(-\infty, 0]$

(B) $(-6, 2)$

(C) $(2, \infty)$

(D) $(-\infty, \infty)$

73. A rectangle ABCD has its side parallel to the line $y = 2x$ and vertices A, B, D are on lines $y = 1, x = 1$ and $y = -1$ respectively. The coordinate of C can be

আয়তক্ষেত্র ABCD-এর একটি বাহু $y = 2x$-এর সমান্তরাল এবং শীর্ষবিন্দুত্রয় A, B, D যথাক্রমে $y = 1, x = 1$ ও $y = -1$-এর উপরস্থিত। C-এর স্থানাঙ্ক হতে

(A) $(3, 5)$

(B) $(-3, 5)$

(C) $(-3, -1)$

(D) $(3, -1)$

M-2023

74. Let $f(x) = x^m$, m being a non-negative integer. The value of m so that the equality $f(a+b) = f(a) + f(b)$ is valid for all $a, b > 0$ is

$f(x) = x^m$, m ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা। $f(a+b) = f(a) + f(b)$ হবে, যদি $a, b > 0$ হয়

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

75. Which of the following statements are true ?

(A) If $f(x)$ be continuous and periodic with periodicity T, then $I = \int_a^{a+T} f(x)\,dx$ depend on 'a'.

(B) If $f(x)$ be continuous and periodic with periodicity T, then $I = \int_a^{a+T} f(x)\,dx$ does not depend on 'a'.

(C) Let $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{if } x \text{ is rational} \\ 0, & \text{if } x \text{ is irrational} \end{cases}$ then f is periodic of the periodicity T only if T is rational.

(D) f defined in (C) is periodic for all T.

নিম্নলিখিতগুলির কোনটি সত্য ?

(A) যদি $f(x)$ সন্তত এবং T-পর্যাবৃত্তের একটি পর্যাবৃত্তীয় অপেক্ষক হয়, তবে $I = \int_a^{a+T} f(x)\,dx$, 'a'-এর উপর নির্ভরশীল হবে

(B) যদি $f(x)$ সন্তত এবং T-পর্যাবৃত্তের একটি পর্যাবৃত্তীয় অপেক্ষক হয়, তবে $I = \int_a^{a+T} f(x)\,dx$, 'a'-এর উপর নির্ভরশীল নয়

(C) ধরা যাক, $f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ মূলদ} \\ 0, & x \text{ অমূলদ} \end{cases}$ T-পর্যাবৃত্তের একটি পর্যাবৃত্তীয় অপেক্ষক হবে একমাত্র যদি T মূলদ হয়

(D) সকল T-এর জন্য (C)-এ বর্ণিত f পর্যাবৃত্ত অপেক্ষক হবে

M-2023

Subject : MATHEMATICS

সময়: ২½ ঘণ্টা]

পূর্ণমান : 105

নির্দেশাবলী

1. এই প্রশ্নপত্রে সবসুদ্ধ সত্তরটি (৭০) প্রশ্ন এবং পঁচাত্তরটি (৭৫) মুদ্রিত পৃষ্ঠা আছে।

2. Category 1 : একটি ঠিক উত্তর আছে। প্রতিটি ঠিক উত্তরে 1 নম্বর পাবে। কোন উত্তর দিলে তার জন্য কোন নম্বর কাটা যাবে না।

3. Category 2 : একটি ঠিক উত্তর আছে। প্রতিটি ঠিক উত্তরে 2 নম্বর পাবে। কোন উত্তর দিলে তার জন্য কোন নম্বর কাটা যাবে না।

4. Category 3 : ১+ বা একাধিক ঠিক উত্তর আছে। তার মধ্যে কয়টি ঠিক উত্তর দিলে 2 নম্বর পাবে। যদি কোন ঠিক উত্তর না থাকে তবে কয়টি ভুল উত্তর দিয়েছ তার ওপর নির্ভর করবে তুমি 0 বা কোনো ঋণাত্মক নম্বর পাবে। যদি কোনো ঠিক উত্তর দেওয়া হয় তা প্রতিটি ভুল উত্তরের জন্য 2 নম্বর কাটা যাবে। যদি কোনো ঠিক উত্তর দেওয়া হয় না এবং ভুল উত্তর দেওয়া হয় তবে ঋণাত্মক নম্বর পাবে না, তার ফলে শূন্য নম্বর পাবে।

5. OMR পত্রে A, B, C, D পর্যায়ের প্রতিটি ঘরে কালি দিয়ে ভরাট করতে হবে।

6. OMR পত্রে নম্বর দিতে প্রশ্নপত্রে সঠিক উত্তর চিহ্নিত করা আছে কিনা তা পরীক্ষা করে দেখবার দায়িত্ব তোমার।

7. OMR পত্রে দিয়ে ঘরে ভরাট করা ছাড়া অন্য কোথাও কোন কাজ করো না।

8. OMR পত্রে দিয়ে ঘরে প্রশ্নপত্রের কোড ঠিক আছে কিনা পরীক্ষা করে নিয়ে তবে কালি দিয়ে ভরাট করবে। কোড ভুল থাকলে তোমার উত্তরপত্র মূল্যায়ন করা হবে না।

9. OMR পত্রে দিয়ে ঘরে Paper কোড ও পরীক্ষা কেন্দ্রের নাম লিখতে হবে এবং ভিতরে [Admit Card-এ উল্লিখিত] স্বাক্ষর করতে হবে।

10. প্রশ্নপত্রের শেষে যে ফর্ম দেওয়া আছে তাতে তোমার নাম লিখতে হবে এবং ভিতরে [Admit Card-এ উল্লিখিত] স্বাক্ষর করতে হবে। OMR পত্রটি তীক্ষ্ণ হলে বা তাতে অনাবশ্যক দাগ পড়লে বাতিল হতে পারে। পরীক্ষার শেষে উত্তরপত্র জমা না করলে তোমার বিরুদ্ধে অসদুপায় অবলম্বনের অভিযোগ আনা হতে পারে।

11. ক্যালকুলেটর, লগারিদম, স্লাইড রুল, মোবাইল, ব্লুটুথ, ইয়ারফোন, স্মার্ট ঘড়ি বা যেকোন ধরনের ডিজিটাল যন্ত্রপাতি ব্যবহার করতে পারবে না। এগুলো ব্যবহার করা হলে পরীক্ষার্থীর বহিষ্কার করা হতে পারে।

12. প্রশ্নপত্রে যেসব জায়গায় অঙ্ক কষার জায়গা দেওয়া আছে। সেই সেই জায়গা ছাড়া অন্য কোথাও অঙ্ক কষবে না।

13. পরীক্ষা সংক্রান্ত যাবতীয় বিষয়ে WBJEE পর্ষদের সিদ্ধান্তই চূড়ান্ত বলে গণ্য হবে।

14. এই প্রশ্নপত্রে ইংরেজী ও বাংলা উভয় ভাষাতেই প্রশ্ন দেওয়া আছে। কোন জায়গায় প্রশ্নে কোনরকম অস্পষ্টতা থাকলে এর সঠিকতা যাচাইয়ের জন্য ইংরেজী ভাষাকে প্রাধান্য দেওয়া হবে। এই পৃষ্ঠাটি ভালো করে পড়ে নাও, তোমার উত্তরপত্রে ইংরেজী ও বাংলা দেওয়া প্রশ্নে কোন পার্থক্য হলে ইংরেজী ভাষাকে গ্রহণযোগ্য বলে বিবেচিত হবে।

15. পরীক্ষা শেষে পরীক্ষার্থীরা প্রশ্নপত্রটি নিয়ে যেতে পারবে।

59