मैजिकल बुक सीरीज

क्विकर मैथ्स

पूर्णतः संशोधित संस्करण

एम. टायरा एवं के. कुन्दन

विषय-सूची

1. जोड़ (Addition) 1
2. गुणा (Multiplication) 13
3. भाग (Division) 31
4. विभाज्यता (Divisibility) 43
5. वर्ग निकालने की विधि (Squaring) 51
6. वर्गमूल (Square Root) 55
7. घन (Cube) 59
8. पूर्ण घनों के घनमूल (Cube Roots of Exact Cubes) 65
9. करणी (Surds) 69
10. साधारण भिन्न (Fraction) 75
11. दशमलव भिन्न (Decimal Fraction) 87
12. संख्या पद्धति (Number System) 101
13. द्विआधारी पद्धति (Binary System) 143
14. महत्तम समापवर्तक एवं लघुतम समापवर्त्य (HCF and LCM) 153
15. प्राथमिक बीजगणित (Elementary Algebra) 177
16. अनुपात एवं समानुपात (Ratio and Proportion) 255
17. साझेदारी (Partnership) 313
18. प्रतिशत (Percentage) 325
19. औसत (Average) 361
20. उम्र पर आधारित प्रश्न (Problems Based on Ages) 383
21. लाभ एवं हानि (Profit and Loss) 399
22. साधारण ब्याज (Simple Interest) 457
23. चक्रवृद्धि ब्याज (Compound Interest) 483
24. मिश्रण (Mixture or Alligation) 511
25. समय एवं कार्य (Time and Work) 543

26. कार्य एवं मजदूरी (Work and Wages) 577
27. नल एवं हौज (Pipes and Cisterns) 583
28. समय एवं दूरी (Time and Distance) 597
29. रेलगाड़ी (Trains) 633
30. धारा (Streams) 661
31. दौड़ एवं खेल (Races and Games) 675
32. प्राथमिक क्षेत्रमिति - I (Elementary Mensuration - I) 683
33. प्राथमिक क्षेत्रमिति - II (Elementary Mensuration - II) 717
34. कैलेंडर (Calendar) 747
35. घड़ियाँ (Clocks) 753
36. लघुगणक (Logarithm) 761
37. त्रिकोणमिति (Trigonometry) 771
38. सन्निकट मान (Approximate Value) 795
39. संचय एवं क्रमचय (Permutation & Combination) 805
40. प्रायिकता (Probability) 827

जोड़

(Addition)

जोड़ने की प्रक्रिया में दो बातों पर ध्यान देना जरूरी होता है। पहला यह कि हमारा योगफल शुद्ध कैसे हो एवं दूसरा यह कि जोड़ने की रफ्तार तेज कैसे हो जाए। इसलिए हमलोग जोड़ने की एक ऐसी विधि पर विचार करेंगे जिससे प्राप्त नतीजे पर आसानी से भरोसा किया जा सके, साथ ही यह विधि आम तौर से प्रयुक्त होने वाले तरीकों से अपेक्षाकृत सुगम एवं लघु भी हो। इस अध्याय के अंतर्गत उपर्युक्त विधि द्वारा प्राप्त योगफल की शुद्धता के परीक्षण एवं पुनःवरीक्षण की प्रक्रिया पर भी विचार किया जाएगा।

जोड़ने की परंपरागत विधि के सहारे बड़ी संख्या की लंबी शृंखला को जोड़ना खासे मुश्किल होता है। हमलोग अलग-अलग कॉलम को जोड़कर, बिना योग की क्रिया दुहराए, योगफल की शुद्धता को परख सकते हैं। इसके कई लाभ हैं:

i. पुनरावृत्ति में नष्ट होने वाले समय की बचत होती है।

ii. यदि कोई त्रुटि हुई भी है, तो संबद्ध कॉलम में इसे पकड़ना आसान होता है।

iii. परंपरागत विधि के सहारे जोड़ने में कुछ त्रुटियाँ चले रह जाएँ, पर इस प्रक्रिया में भूल की न्यूनतम गुंजाइश है।

इनमें से अंतिम बिन्दु पर हर कोई आसानी से सहमत नहीं होंगे। हर कोई किसी खास प्रकार की त्रुटि बार-बार करने के लिए अभ्यस्त सा हो जाता है। कोई व्यक्ति इस भूल के प्रति अभ्यस्त हो सकता है कि 9 को 6 से गुणा करने पर परिणाम 56 मिलता है। यदि अन्य उससे सीधे यह सवाल पूछें तो वह 54 ही बताएगा। पर गणना की जटिल एवं उबाऊ प्रक्रिया में वह 56 पर जाकर रुकेगा। यदि वह जोड़ को दुहराए भी तो उसी अपनी भूल का पता शायद ही लगे, क्योंकि वह उसकी प्रिय भूल है।

***कॉलम में जोड़ना* (Totalling in Columns)**

जोड़ की पारंपरिक विधि में हम दिए हुए अंकों को एक कॉलम में लिखते हैं, उसके नीचे एक रेखा खींचकर योगफल लिख डालते हैं। दी गई संख्याओं को कॉलम में सजाते वक्त इस बात का ध्यान रखा जाता है कि पूर्ण संख्या एवं दशमलव के बाद के अंकों को एक कतार में रखा जाए। उदाहरण के लिए:

पूर्ण संख्याओं की कतार	*दशमलव-युक्त संख्याओं की कतार*
4234	10.05
8238	2.51
646	539.652
5321	2431.0003
350	49.24
9989	

परंपरागत विधि यह है कि हम दायीं ओर स्थित कॉलम से शुरू करके एक एक कॉलम को जोड़ें, जैसे, 4 को 8 से, फिर 4 और 8 के योगफल को 6 से, एवं इसी प्रक्रिया को जारी रखें। आप चाहें तो नयी विधि में भी इस प्रक्रिया को जारी रख सकते हैं, पर यहाँ ऐसा करना अनिवार्य नहीं

है। इस विधि के दौरान आप किसी भी कॉलम से जोड़ की प्रक्रिया शुरू कर सकते हैं। पर सुविधा के लिए हम दायीं ओर से ही जोड़ना शुरू करेंगे।

जोड़ने की प्रक्रिया में किसी कॉलम में ऊपर से नीचे की ओर बढ़ने के दौरान हम योगफल 10 से ऊपर होते ही फिर इकाई से शुरू करते हैं। मतलब यह कि जैसे ही योगफल 10 से ऊपर होता है, हम उसमें से 10 घटाकर शेष के साथ जोड़ने की प्रक्रिया जारी रखते हैं। इस क्रम में जिस अंक पर जाकर योगफल 10 से अधिक हो गया था, वहाँ एक चिह्न लगा दिया जाता है। उदाहरण के लिए,

4
8
---

4 और 8 को जोड़ने से हमें 12 मिला। 12 निश्चय ही 10 से अधिक है। अब इसमें से 10 घटा लें। चूँकि यह घटना अंक 8 पर पहुँचकर घटित हुई है, इसलिए वहाँ एक चिह्न लगा दें तथा शेष 2 के साथ आगे बढ़ें।

6	6 + 2 = 8
1	1 + 8 = 9
0	0 + 9 = 9
9	9 + 9 = 18

यहाँ 9 पर एक चिह्न लगाएँ। 18 में से 10 घटाने के बाद शेष 8 बचा। 8 ही अंकों का परिणामी योगफल है, जिसे इस कॉलम के नीचे लिख दें।

अब हम इस कॉलम में लगाए गए चिह्नों को गिनेंगे तथा परिणामी योगफल के नीचे लिख देंगे। उपर्युक्त उदाहरण में ऐसे दो चिह्न लगाए गए थे, इसलिए हम चिह्नों की संख्या के रूप में लिखेंगे,

4234
8238'
646
5321
350
9989'

परिणामी योगफल: 8

चिह्नों की संख्या: 2

यदि इसी प्रक्रिया को सभी कॉलम के लिए दुहराया जाए, तो हम निम्नलिखित परिणाम पर पहुँचते हैं :

4234
8'238'
6'4'6
5321
350
9'9'8'9'

परिणामी योगफल: 6558

चिह्नों की संख्या: 2222

अंतिम परिणाम पर पहुँचने के लिए हम परिणामी योगफल (running total) एवं चिह्नों (ticks) की संख्या को निम्नलिखित ढंग से जोड़ते हैं:

परिणामी योगफल	0 6 5 5 8 0
चिह्नों की संख्या	0 2 2 2 2 0
योगफल	2 8 7 7 8

कैसे बचाएँ समय? आपने गौर किया होगा कि परिणामी योगफल को उसके ठीक दायीं ओर स्थित कॉलम में लगाए गए चिह्नों की संख्या से जोड़ते हैं। यह प्रक्रिया एक चरण में भी पूरी की जा सकती है। जैसा कि आपने देखा है दायीं ओर से पहले कॉलम में लगाए गए चिह्नों की संख्या को दायीं ओर से दूसरे कॉलम के परिणामी योगफल से जोड़ते हैं। इसी तरह दूसरे कॉलम में लगाए गए चिह्नों की संख्या से तीसरे कॉलम के परिणामी योगफल को जोड़ते हैं और यह क्रिया निरंतर जारी रखते हैं। पूरी विधि को निम्नलिखित चरणों में व्यक्त किया जा सकता है :

पहला चरण

```
 4234
 8238'
  646
 5321
  350
 9989'
 ------
 कुल  8
```

[4 + 8 = 12, 8 पर चिह्न लगाएँ तथा 2(12 – 10) को 6 से जोड़ें, इस प्रकार आपको मिला 8, 8 + 1 = 9; 9 + 0 = 9; 9 + 9 = 18. अब फिर यहाँ 9 पर एक चिह्न लगाएँ एवं अधोरेखा के नीचे 8 (18 – 10) लिख दें]

दूसरा चरण

```
 4234
 8238'
  64'6
 5321
  350
 998'9'
 ------
 कुल  78
```

[3 + 2 (पहले कॉलम में लगाए गए चिह्नों की संख्या) = 5; 5 + 3 = 8; 8 + 4 = 12, 4 पर चिह्न अंकित करें एवं शेष 2(12 – 10) के साथ आगे बढ़ें: 2 + 2 = 4; 4 + 5 = 9; 9 + 8 = 17; 8 पर एक चिह्न अंकित करें एवं अधोरेखा के नीचे 7 लिख दें]

इसी प्रक्रिया को हम तीसरे एवं चौथे कॉलम के साथ दुहराते हैं।

```
  4 2 3 4
  8'2 3 8'
    6'4'6
  5 3 2 1
    3 5 0
  9'9'8'9'
 ---------
 कुल 2 8 7 7 8
```

नोट: आपने पाया कि सबसे बायीं ओर स्थित कॉलम में दो चिह्न लगाए गए हैं। इन्हें आप इस कॉलम की बायीं ओर अधोरेखा के नीचे लिख दें। इस प्रकार हम पहले की अपेक्षा कहीं अधिक शीघ्रता से जोड़ने की प्रक्रिया पूरी कर लेते हैं।

एक और उदाहरण लीजिए।

प्रश्न: 707.325 − 1923.82 + 58.009 + 564.943 − 65.6 = ?

उत्तर:

```
   707.325
19'23'.8'2
   58'.009'
5'6'4'.9'43
   6'5.6
-------------
कुल: 3319.697
```

स्वाभाविक रूप से आपके मन में यह जिज्ञासा उठ रही होगी कि क्या संख्याओं को कॉलम के रूप में सजाकर लिखना जरूरी है? हमारा उत्तर है- जरूरी नहीं। आप बिना ऐसी औपचारिकता निभाए भी उत्तर तक पहुँच सकते हैं। ऐसे प्रश्नों में, जिनमें संख्याएँ कतार [row-form] के रूप में सजी होती हैं, संख्याओं को एकत्र करना जरा मुश्किल होता है। पर यदि आप ऐसा करने का अभ्यास कर लें तो शायद इससे बेहतर कुछ होगा भी नहीं। वैसे इस समस्या से निबटने का एक सुगम तरीका भी है। आइए, इस पर विचार करें।

पहला चरण: दशमलव के बाद स्थित अंकों की संख्या बराबर करने के लिए अंतिम अंक के दायीं ओर शून्य का इस्तेमाल करें। उदाहरण के लिए, उपर्युक्त प्रश्न को निम्न रूप से लिखा जा सकता है:

707.325 + 1923.820 − 58.009 + 544.943 + 65.600

दूसरा चरण: दायीं ओर के अंतिम अंक से जोड़ना शुरू करें। जोड़ की प्रक्रिया में जिन अंकों का इस्तेमाल हो जाए उन्हें काटते चलें, इससे पुनरावृत्ति जैसी भूल नहीं होगी। जहाँ परिणामी योगफल (running total) 10 से ऊपर हो जाए, वहाँ एक चिह्न लगाना न भूलें। शेष के साथ आगे बढ़ते चलें

707.325 + 1923.820 − 58.009 + 564.943 + 65.600 = . 7

[5 + 0 = 5; 5 + 9 = 14, यहाँ एक चिह्न अंकित करें तथा 4 के साथ आगे बढ़ जाएँ; 4 + 3 = 7, 7 + 0 = 7 अतः 7 लिख दें। इस प्रक्रिया में इस्तेमाल हो गए सभी अंकों को काट दें ताकि भूल की गुंजाइश न रहे।].

तीसरा चरण: दूसरे चरण से प्राप्त चिह्नों की संख्या को संख्याओं के दूसरे स्थान पर स्थित अंकों से जोड़ने की क्रिया को दुहराएँ

707.325 + 1923.820 + 58.009 + 564.943 − 65.600 = . . 97

[1 (पहला चरण में प्रयुक्त चिह्नों की संख्या) + 2 = 3; 3 + 2 = 5; 5 + 0 = 5; 5 + 4 = 9; 9 − 0 = 9; इसलिए दूसरे स्थान पर 9 लिख दें।]

चौथा चरण:

707.325 + 1923.820 + 58.009 + 564.943 − 65.600 = _ . . _ . .697

3 + 8 = 11; यहाँ एक चिह्न अंकित कर दें एवं शेष 1 के साथ आगे बढ़ें; 1 + 0 = 1; 1 + 9 = 10, फिर एक चिह्न अंकित कर दें एवं '0' के साथ आगे बढ़ें; 0 + 6 = 6; इसलिए तीसरे स्थान पर 6 लिख दें:

पाँचवाँ चरण: उपर्युक्त प्रक्रिया के सहारे हम निम्नलिखित परिणाम पर पहुँचते हैं:

707.328 + 1923.820 + 58.009 + 564.943 + 65.600 = 3319.697

कतार में सजी हुई दशमलव रहित संख्याओं का जोड़

प्रश्न: 53921 + 6308 + 86 + 7025 + 11132 = ?

उत्तर: पहला चरण: 53921 + 6308 + 86 + 7025 + 11132 = ____2

दूसरा चरण: 53921 + 6308 + 86 + 7025 + 11132 = ___72

तीसरा चरण: 53921 + 6308 + 86 + 7025 + 11132 = __472

चौथा चरण: 53921 + 6308 + 86 + 7025 + 11132 = _8472

पाँचवाँ चरण: 53921 + 6308 + 86 + 7025 + 11132 = 78472

नोट: उपर्युक्त विधि का बार-बार अभ्यास करके दक्षता हासिल कर लें। यदि अच्छी तरह नहीं समझ पाए हों, तो एक बार फिर से प्रयास करें।

***यदि एक ही प्रश्न में जोड़ एवं घटाव दोनों हों* (Addition and subtraction in a single Problem)**

इस तरह के प्रश्नों को हल करने की पद्धति को उदाहरणों के सहारे बखूबी समझा जा सकता है।

उदा. 1: 412 − 83 + 70 = ?

चरण I: हमारे उत्तर के इकाई अंक के लिए दी गई संख्याओं के अपने-अपने इकाई स्थान के अंकों को उनके चिह्नों के अनुसार जोड़ें या घटाएँ। उदाहरण के लिए, उपर्युक्त स्थिति में हमारे अस्थाई परिणाम का इकाई अंक निम्नलिखित है :

2 − 3 + 0 = −1

इसलिए, हम इसे इस प्रकार लिखते हैं:

412 − 83 + 70 = __ (−1)

उसी प्रकार, दहाई स्थान का अस्थाई मान है

1 − 8 + 7 = 0

इसलिए,

412 − 83 + 70 = (0) (−1)

उसी प्रकार, सैकड़ा स्थान का अस्थाई मान 4 है। इसलिए हम इसे निम्न प्रकार से लिखते हैं :

412 − 83 + 70 = (4) (0) (−1)

चरण II: अब, उपरोक्त अस्थाई मान को वास्तविक मान में परिवर्तित करना होगा (−1) को धनात्मक अंक से प्रतिस्थापित करने के लिए हम दहाई या सैकड़ा स्थान के अंकों से उधार लेते हैं। चूँकि दहाई स्थान का अंक शून्य (0) है, हमें सैकड़ा से उधार लेना होगा। हम 4 (सैकड़ा स्थान से) 1 उधार लेते हैं जो दहाई पर 10 हो जाता है तथा साथ ही सैकड़ा पर 3 हो जाता है। पुनः हम दहाई से 1 उधार लेते हैं जो कि दहाई पर 9 हो जाता है तथा इकाई 10 हो जाता है।

इस प्रकार इकाई स्थान पर (10–1=) 9 होता है। अतः, हमारा अंतिम परिणाम = 399
उपरोक्त व्याख्या को निम्न प्रकार से व्यक्त किया जा सकता है :

(–1) (10)(–1) (10)
(4) (0) (–1)
(3) (9) (9)

नोट : उपरोक्त व्याख्या को काफी आसानी से समझा जा सकता है। तथा विधि का निष्पादन उससे भी ज्यादा आसान है। यदि आप अच्छा से अभ्यास करते हैं, तो दोनों चरणों को एक साथ निष्पादित किया जा सकता है। दूसरे चरण को निम्नलिखित तरीके से भी निष्पादित किया जा सकता है :

(4) (0) (–1) = 400 – 1 = 399

उदा. 2 : 5124 – 829 + 731 = 435

हल : चरण I के अनुसार, अस्थाई परिणाम निम्नलिखित हैं :

(5) (–4) (0) (–9)

चरण II : 5 से 1 उधार लें। हजार का स्थान (5 – 1 = 4) हो जाता है। हजार के स्थान से 1 उधार लिया गया जो सैकड़ा के स्थान पर 10 हो जाता है अब, सैकड़ा के स्थान पर (10 – 4 =) 6 हो जाता है, लेकिन दहाई के लिए 1 उधार लिया जाता है। इसलिए सैकड़ा के स्थान का अंक (6–1=) 5 हो जाता है। सैकड़ा के स्थान से 1 उधार लेने पर दहाई के स्थान पर 10 हो जाता है। पुनः, हम दहाई के स्थान से इकाई के लिए 1 उधार लेते हैं तथा दहाई के स्थान का अंक (10 – 1 =) 9 हो जाता है। अब, दहाई के स्थान से 1 उधार लेने पर इकाई के स्थान पर 10 हो जाता है। इस प्रकार इकाई के स्थान पर परिणाम (10 – 9 =) 1 हो जाता है। अतः, हमारा अभीष्ट उत्तर = 4591।

नोट : चरण I के बाद हम निम्न प्रकार से गणना कर सकते हैं:
5 (–4) (0) (–9) = 5000 – 409 = 4591
लेकिन एक साथ निष्पादित करने के लिए इस विधि को चरण I के साथ संयोजित नहीं किया जा सकता है। इसलिए, हमें चरण I एवं II को अच्छी तरह से समझ लेना चाहिए ताकि भविष्य में हम इनका निष्पादन एक साथ कर सकें।

उदा. 3 : 73216 – 8596 – 3510 – 999 = ?

हल : चरण I से हमें निम्नलिखित परिणाम प्राप्त होता है :

(7) (–2) (–5) (–16) (–9)

चरण II : इकाई के अंक = 10 – 9 = 1 [(–16) से 1 उधार लिया जाता है तथा
परिणाम = –16 – 1 = –17]

दहाई के अंक = –20 – 17 = 3 [(–5) से 2 उधार लिया जाता है तथा
परिणाम = –5 – 2 = –7]

सैकड़ा के अंक = 10 – 7 = 3 [(–2) से 1 उधार लिया जाता है तथा
परिणाम = –2 – 1 = –3]

हजार के अंक = 10 – 3 = 7 [(7 से 1 उधार लिया जाता है तथा
परिणाम = (7 – 1 = 6)]

इसलिए, अभीष्ट मान 67331 है।

उपरोक्त गणना को सबसे बाईं ओर के अंक से भी शुरू किया जा सकता है जैसा कि अंतिम दो उदाहरणों में किया गया है। इस स्थिति में हमने सबसे दाईं ओर के अंक से शुरू किया है। लेकिन दोनों चरणों को संयोजित रूप से एक साथ करने के लिए सबसे दाईं ओर के अंक (अर्थात् इकाई अंक) से शुरू करना होगा। उदा. 4 देखें।

नोट : **चरण II** के लिए अन्य विधि: (–2)(–5)(–16)(–9)=(–2)(–6)(–6)(–9)=(–2669)
∴ उत्तर = 70000 - (2669) = 67331

उदा. 4 : 89978 - 12345 - 36218 = ?

हल : **चरण I :** (4) (1) (4) (2) (5)
चरण II : 4 1 4 1 5

एक चरण में हल (Single step solution) :

अब, आपको दोनों चरणों को एक साथ निष्पादित करना अवश्य सीखना चाहिए। संयोजित विधि को समझाने का यह एक ऐसे सरल उदाहरण है। **इकाई के स्थान पर :** 8-5-8 = (-5), इसे धनात्मक बनाने के लिए दहाई से हमें उधार लेना होगा। हमें यह याद रखना चाहिए कि हम ऋणात्मक मान से उधार नहीं ले सकते (अर्थात् 12345 से) ***हमें धनात्मक मान से (अर्थात् 89978 से) उधार लेना होगा।*** अतः, हमने 7 (89978 के दहाई अंक) से 1 उधार लिया।

(-1)
8 9 9 7 8 - 12345 - 36218 = _ _ _ _ 5
अब, दहाई का अंक : (7 - 1 =) 6 - 4 - 1 = 1
सैकड़ा का अंक : 9 - 3 - 2 = 4
हजार का अंक : 9 - 2 - 6 = 1
दस हजार का अंक : 8 - 1 - 3 = 4
∴ अभीष्ट मान = 41415

उदा. 5 : 28369 + 38962 - 9875 = ?

हल : एक चरण में हल : इकाई का अंक = 9 + 2 - 3 = 8
दहाई का अंक : = 6 + 6 - 7 = 5
सैकड़ा का अंक : = 3 + 9 - 8 = 4
हजार का अंक : = 8 + 8 - 9 = 7
दस हजार का अंक : = 2 + 3 = 5 ∴ अभीष्ट मान = 57458

उदा. 6: उदा.-2 को एक चरण विधि द्वारा हल करें।

हल : 5124 – 829 + 731 – 435 =
इकाई का अंक : 4 - 9 + 1 - 5 = (-9), दहाई के अंक के धनात्मक मान से 1 उधार लें। चूंकि हमने 731 के 3 से उधार लिया तो,

1
5124 – 829 + 7 3 1 – 435 = _ _ 1

दहाई का अंक : $2-2+2-3=(-1)$. सैकड़ा के अंक के धनात्मक मान से 1 उधार लें। माना कि हमने 731 को 7 से उधार लिया। तो,

$$\begin{array}{l} \quad\quad\quad -1\ -1 \\ 5124-829+\ 7\ \ 3\ \ 1-435=__\ 9\ 1 \end{array}$$

सैकड़ा का अंक : $1\quad 8+6-4=(-5)$. हजार के अंक के धनात्मक मान से 1 उधार लें। हमारे पास इस प्रकार का केवल एक अंक है, अर्थात् 5124 का 5, तो,

$$\begin{array}{l} -1 \quad\quad\quad -1\ \ -1 \\ 5\ 1\ 2\ 4-829-7\ \ 3\ \ 1-435=4591 \end{array}$$

[हजार का अंक $(5-1-)$ 4 रहता है।]

अब आप संपूर्ण गणना बिना कुछ अतिरिक्त लिखे एक चरण में कर सकते हैं।

उदा. 7: उदा. 3 के उत्तर के अलावा बिना कुछ लिखे एक चरण में हल करें। स्वयं प्रयास करें। जब तक आप इस प्रकार के प्रश्नों को आत्मविश्वास के साथ कुछ सेकेंडों के भीतर हल नहीं कर लेते हैं अगले उदाहरणों पर मत जाएँ।

उदा. 8: $10789+3946-2310-1223=?$

हल: जब कभी हम इकाई स्थान के सभी अंकों को जोड़ने पर 10 से ज्यादा मान प्राप्त करते हैं, हम परिणाम के इकाई अंक को लिख देते हैं तथा दहाई के अंक के साथ आगे बढ़ते हैं। ***हम दहाई के अंक को धनात्मक मान से जोड़ते हैं, न कि ऋणात्मक मान से।*** राशि अंकों के लिए समान प्रक्रिया को अपनाते हैं।

$$\begin{array}{l} +1\ \ +1\ \ +1 \\ 1\ \ 0\ \ 7\ \ 8\ \ 9+3946-2310-1223=11202 \end{array}$$

नोट:

1. हम धनात्मक मान 10789 के अंकों के ऊपर +1 रखते हैं। इसे 3946 के अंकों के ऊपर भी रख सकते हैं। लेकिन इसे 2310 तथा 1223 के ऊपर नहीं रखा जा सकता है।
2. परीक्षा में जब आप प्रश्न पत्र पर कलन के प्रयोग करने के लिए स्वतंत्र हों तो आप अंकों के ऊपर +1, +2, +1, +2, ... अपनी कलम से लिखने के बजाए अंकों को परिवर्तित कर सकते हैं। अतः 8 लिखने के बजाए आपको कलम से 8 के ऊपर 9 लिखना चाहिए। उसी प्रकार $\frac{+1}{7}$ के स्थान पर 8 लिखें।

उदा. 9: $765.819-89.003-12.038-86.89=?$

हल : सर्वप्रथम दशमलव के बाद के अंकों की संख्याओं को अंत में शून्य लिखकर बराबर करें।

अतः $7=765.819-89.003+12.038-86.890$

अब उदा. - 4, 5, 6, 7 एवं 8 में दिए गए विधि को यहाँ लागू करें।

$$\begin{array}{l} -1\ \ -1\ \ -1\ \ -1\ \ -1 \\ 7\ \ 6\ \ 5,\ 8\ \ 1\ \ 9-89.003-12.038-86.890=601.964 \end{array}$$

उदा. 10 : $5430-4321+3216-6210=?$

हल : उपर्युक्त स्थिति भिन्न है। अंतिम उत्तर ऋणात्मक प्राप्त होता है। चूँकि हम इसे प्रारंभ में नहीं जान पाते हैं, हम पहले किए गए चरणों को ही निर्धारित करते हैं।

चरण I: (-2)(1)(1)(5)

चरण II: सबसे बाईं ओर का अंक ऋणात्मक है। इसे धनात्मक नहीं बनाया जा सकता है क्योंकि बाईं ओर कोई और अंक नहीं है जिसे हम उधार ले सकते हैं।

अतः, हमारा उत्तर है :

$$\begin{array}{r} -2000 \\ +\ 115 \\ \hline 1885 \end{array}$$

नोट : इस बात को ध्यान में रखते हुए कि सबसे बाईं ओर के अंक के अतिरिक्त अन्य सभी अंक धनात्मक हैं, दूसरे चरण को क्रिया को मन में ही करनी चाहिए।

∴ अतः अंतिम उत्तर ऋणात्मक होगा लेकिन (–)2115 नहीं। यहाँ -2000 + 115 होनी चाहिए

उदा. 11 : 2695 - 4327 + 3214 - 7350 = ?

हल : अतः, चरण I: (-6)(2)(3)(2)

अतः, अपेक्षित उत्तर –

$$\begin{array}{r} -6000 \\ +\ 232 \\ \hline -5768 \end{array}$$

गणना की जाँच की विधि: 'डिजिट-सम मेथड' (Digit-sum Method)

इस विधि को 'नाइन्स रिमेन्डर मेथड' (nines-remainder method) भी कहते हैं। इसकी परिकल्पना कुछ इस तरह से है:

I. दी हुई संख्या के सभी अंकों को जोड़कर आंकिक योगफल [डिजिट सम] प्राप्त करें। उदाहरण के लिए, 13022 का आंकिक योगफल होगा: 1 + 3 + 0 + 2 + 2 = 8

II. आंकिक योगफल हमेशा एक अंक की संख्या होनी चाहिए। यदि कोई आंकिक योगफल दो अंकों की संख्या हो तो उसे आपस में जोड़कर एक अंक की संख्या बना लें।

उदाहरण के लिए

5264 का आंकिक योगफल है:

5 + 2 + 6 + 4 = 17

1 + 7 = 8

III. यदि दी हुई संख्या में 9 के अंकों का इस्तेमाल हुआ हो तो इन्हें छोड़ दें। ऐसी संख्याएँ जिनका योग 9 आता है, जैसे 2 एवं 7, तो उन्हें भी छोड़ा दिया जाता है। इस प्रकार 990019 का आंकिक योगफल पहली नजर में हो (1) हो जाता है। यदि आप 9 को छोड़ें भी तो नतीजा वही आएगा।

IV. चूँकि इस प्रक्रिया में 9 को शामिल नहीं किया जाता है, इसलिए 9 का आंकिक योगफल उतना ही है, जितना कि शून्य का। उदाहरण के लिए 441 का आंकिक योगफल शून्य है।

आंकिक-योगफल (डिजिट-सम) निकालने की संक्षिप्त विधि

किसी संख्या के अंकों को आपस में जोड़ने के क्रम में योगफल जैसे ही दो अंकों की संख्या में परिणत हो, उन्हें परस्पर जोड़कर एक अंक की संख्या बना लें, तभी आगे बढ़ें। उदाहरण के लिए,

88654293285 1 का आंकिक योगफल प्राप्त करने के क्रम में 8 + 8 = 16 [यह दो अंकों की संख्या है, इसलिए इन अंकों को परस्पर जोड़ लें 1 + 6 = 7]; 7 + 6 = 13 (1 + 3 = 4); 4 + 5 = 9 (अब चूँकि 9 का कोई महत्त्व नहीं होता, इसलिए इसे भूल जाएँ); 4 + 2 = 6; फिर 9 आ गया; इसे छोड़ दें। ... इस तरह से बढ़ने पर आंकिक योगफल आया 7.

दशमलव युक्त संख्याओं के भी इसी प्रकार जोड़ा जाता है, पर जोड़ने की इस प्रक्रिया में दशमलव पर बिल्कुल ही ध्यान नहीं दिया जाता है। उदाहरण के लिए 6.256 का आंकिक योगफल 1 है।

नोट: इस दिलचस्प प्रक्रिया का 'क्यों' जानना उतना महत्त्वपूर्ण नहीं है। पर यह एक आधारभूत तथ्य है कि किसी संख्या का आंकिक योगफल उतना ही होता है, जितना उस संख्या को 9 से विभाजित करने पर शेष बचता है।

उदाहरण: 523 का आंकिक योगफल है 1। यदि 523 को 9 से विभाजित करें तो शेष बचता है 1।

***गणना का परीक्षण* (Checking of Calculation)**

मूल सिद्धांत: जो कोई गणितीय क्रिया संख्या के साथ घटित होती है, उन संख्याओं के आंकिक योगफल के साथ भी ठीक वही क्रिया घटित होती है। इसलिए प्रदत्त संख्याओं के आंकिक योगफल से जो परिणाम प्राप्त होता है, वह गणितीय क्रिया द्वारा प्राप्त परिणाम के आंकिक योगफल के बराबर होगा।

उदाहरण के लिए

संख्याएँ: 23 + 49 + 15 + 30 = 117

आंकिक योग: 5 + 4 + 6 − 3 = 0

0 = 0

उपर्युक्त नियम न केवल जोड़ पर बल्कि घटाव एवं गुणा के साथ-साथ एक सीमा तक भाग के साथ भी लागू होता है। अगले अध्यायों में विस्तार से इसकी चर्चा की जाएगी। जोड़ का एक और उदाहरण देखिए:

1.5 + 32.5 + 23.9 = 57.9

आंकिक योग: 6 + 5 + 5 = 3

3 = 3

इस प्रकार यदि वाम पक्ष (LHS) = दायाँ पक्ष (RHS), तो आप इस निष्कर्ष पर पहुँचेंगे कि आपकी गणना सही है।

अभ्यास के लिए इस अध्याय में दिए गए सभी गणनाओं की जाँच करें।

नोट: मान लीजिए, दो छात्रों को निम्नलिखित प्रश्न हल करने के लिए दिया जाता है

1.5 + 32.5 + 23.9 = ?

इनमें से एक का उत्तर है 57.9 एवं दूसरे का उत्तर है 72.3 यदि उपर्युक्त विधि से ये अपनी गणना को परखते हैं तो दोनों को अपना उत्तर सही मालूम होता है। इस प्रकार उपर्युक्त परीक्षण-प्रणाली की भी अपनी सीमाएँ हैं।

***मिश्र संख्याओं का योग* (Addition of Mixed Numbers)**

प्र. $3\frac{1}{2}+4\frac{4}{5}+9\frac{1}{3}=?$

हल: परंपरागत विधि (Traditional Method) यह है कि उपर्युक्त संख्याओं को सर्वप्रथम भिन्न में बदल लें, फिर उनके हर (denominators) का लघुत्तम समापवर्त्य (L.C.M) निकाल लें। पर समय बचाने के लिए हम पूर्ण संख्याओं को एक जगह जोड़ लें तथा भिन्न को अलग से जोड़ें। जैसे यहाँ,

$$3\frac{1}{2}+4\frac{4}{5}+9\frac{1}{3}=(3+4+9)+\left(\frac{1}{2}+\frac{4}{5}+\frac{1}{3}\right)$$

$$=16+\frac{5+24+10}{30}=16+1\frac{19}{30}$$

$$=(16+1)+\frac{19}{30}$$

$$=17+\frac{19}{30}=17\frac{19}{30}$$

प्र.: $5\frac{2}{3}-4\frac{1}{6}+2\frac{3}{4}-1\frac{1}{4}=?$

हल: $(5-4+2-1)+\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{6}+\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\right)$

$$=2+\left(\frac{8-2+9-3}{12}\right)$$

$$=2+\frac{12}{12}=2+1=3$$

गुणा
(Multiplication)

विशेष स्थितियाँ

हमारा सुझाव है कि समय को बचत के लिए आप 30 तक का पहाड़ा याद रखें। इससे गणना में सहायता मिलती है। वैसे भी गुणा में दक्ष होना जरूरी है क्योंकि हमारे मतलब के प्रायः सभी प्रश्नों में इसका इस्तेमाल रहता ही है।

आइए, 10 से ऊपर की संख्या से गुणा करने की विधि पर विचार करें।

***11 से गुणा* (Multiplication by 11)**

पहला चरण: गुण्य (multiplicand) के अंतिम अंक को गुणनफल के अंतिम अंक (दायीं ओर स्थित) के रूप में लिख देते हैं।

दूसरा चरण: गुण्य का प्रत्येक अंक अपने दाहिनी ओर स्थित अंक के साथ जोड़ दिया जाता है।

उदा. 1: सरल करें: $5892 \times 11 = ?$

हल: ***पहला चरण:*** 5892 का अंतिम अंक (2) उत्तर के अंतिम अंक के रूप में लिख दें:

$$\frac{5892 \times 11}{2}$$

दूसरा चरण: 5892 का प्रत्येक अंक अपनी दाहिनी ओर स्थित अंक के साथ जोड़ दिया जाता है। $9 + 2 = 11$; पंक्ति के नीचे 1 लिख दें एवं 1 के साथ आगे बढ़ें। $8 + 9 + 1 = 18$; अधोरेखा के नीचे 8 लिख दें एवं 1 के साथ अगे बढ़ें। $5 + 8 + 1 = 14$; अधोरेखा के नीचे 4 लिख दें एवं 1 के साथ आगे बढ़ें।

$$\frac{5892 \times 11}{12}$$ ($9 + 2 = 11$, अधोरेखा के नीचे 1 लिखें एवं 1 को लेकर आगे बढ़ें)

$$\frac{5892 \times 11}{812}$$ ($8 + 9 + 1 = 18$, अधोरेखा के नीचे 8 लिखें एवं 1 के साथ आगे बढ़ें)

$$\frac{5892 \times 11}{4812}$$ ($5 + 8 + 1 = 14$, अधोरेखा के नीचे 4 लिख दें एवं 1 के साथ आगे बढ़ें)

तीसरा चरण: 5892 के पहले अंक 5 को 1 के साथ जोड़कर गुणनफल के बायीं ओर स्थित पहले अंक के रूप में लिख देते हैं।

$$\frac{5892 \times 11}{64812}$$

$\therefore$ उत्तर है: **64812**

जैसा कि आपने देखा, गुणा का प्रत्येक अंक दो बार इस्तेमाल किया जाता है, पहले एक संख्या के रूप में एवं फिर एक पड़ोसी के रूप में यदि सावधानी बरती जाए, तो तीनों चरणों का काम

yoursmahbob

एक चरण में भी संपन्न किया जा सकता है और इस अकेले चरण को "**add the right neighbour**" नाम दिया जा सकता है।

गुणा को क्रिया शुरू करने से पूर्व संख्या के आरंभ में एक '0' डाल देना चाहिए, इसके बाद ही अंकों को पड़ोसी से जोड़ने की क्रिया दुहराई जानी चाहिए।

$\frac{05892 \times 11}{2}$ [चूँकि '2' के दायीं ओर कोई संख्या नहीं है, इसलिए हमें कुछ भी जोड़ने की आवश्यकता नहीं है।]

$\frac{05892 \times 11}{4812}$ ---- जैसा कि आप पहले कर चुके हैं।

$\frac{05892 \times 11}{64812}$ ----$0+5+1=6$

इस उदाहरण से यह बात स्पष्ट हो गया होगा कि गुणन के शुरू में '0' क्यों लगा देते हैं। इससे हमें इस बात का स्मरण बना रहता है कि अभी गणना जारी रखनी है। इसके अभाव में, संभवतः हम '6' लिखना भूलकर 4812 को ही अपना उत्तर मान लेते। अन्त में अंकों की संख्या गुणन के मुकाबले एक अधिक है, और '0' हमें इसकी याद दिलाता है।

नमूने के प्रश्न: सरल करें:

1) 111111×11 2) 23145×11 3) 89067×11 4) 5776800×11
5) 1122332608×11

उत्तर: 1) 1222221 2) 254595 3) 979737 4) 63544800
5) 12345658688

***12 से गुणा* (Multiplication by 12)**

12 से गुणा करने के लिए, '***गुणन के प्रत्येक अंक को 2 से गुणा करें एवं पड़ोसी अंक के साथ जोड़ दें।***'

यह प्रक्रिया 11 से गुणा करने के समान ही है। फर्क केवल इतना है कि पड़ोसी अंक से जोड़ने से पहले हम गुणन के अंकों को 2 से गुणा कर देते हैं।

उदाहरण के लिए,

उदा. 1: $5324 \times 12 = ?$

हल: **पहला चरण:** $\frac{05324 \times 12}{8}$ [4 को 2 से गुणा करें एवं '0' जोड़ दें, क्योंकि इसका कोई पड़ोसी नहीं है]

दूसरा चरण: $\frac{05324 \times 12}{88}$ [$2 \times 2 = 4$; $4+4=8$]

तीसरा चरण: $\frac{05324 \times 12}{888}$ [$3 \times 2 = 6$; $6+2=8$]

yoursmartbook

चौथा चरण: $\frac{05324 \times 12}{3888}$ [5 × 2 = 10; 10 + 3 = 13; अधोरेखा के नीचे 3 लिख दें एवं 1 के साथ आगे बढ़ें]

अंतिम चरण: $\frac{05324 \times 12}{63888}$ [0 × 2 = 0; 0 + 5 = 1 = 6]

उत्तर हुआ 63888। निश्चय ही आपके इस बात का अहसास हो गया होगा कि गुणा करने की यह विधि न केवल आसान है बल्कि संक्षिप्त भी।

अभ्यास के प्रश्न

सरल करें :

1) 35609 × 12 2) 11123009 × 12 3) 456789 × 12
4) 22200007 × 12 5) 444890711 × 12

उत्तर: 1) 427308 2) 132476108 3) 5481468 4) 266400084
5) 5338688532

13 से गुणा (Multiplication by 13)

किसी संख्या को 13 से गुणा करने के क्रम में ***उस संख्या के हर अंक को तिगुना करके उसके पड़ोसी अंक के साथ जोड़ देते हैं।***

यह प्रक्रिया 12 से गुणा करने की विधि के अनुरूप ही है। फर्क केवल इतना है कि यहाँ हम गुणन के अंकों को उसके पड़ोसी के साथ जोड़ने से पूर्व तिगुना कर देते हैं।

यदि हम 09483 को 13 से गुणा करना चाहते हैं तो हम निम्न प्रकार से आगे बढ़ते हैं।

पहला चरण: $\frac{09483 \times 13}{9}$ [3 का तिगुना हुआ 9। अब चूँकि 3 के दाहिनी ओर कोई अंक नहीं है, इसलिए 9 को अधोरेखा के नीचे लिख दें।]

दूसरा चरण: $\frac{09483 \times 13}{79}$ [8 × 3 + 3 = 27; 7 नीचे लिख दें एवं 2 को लेकर आगे बढ़ें।]

तीसरा चरण: $\frac{09483 \times 13}{279}$ [4 × 3 + 8 + 2 = 22; 2 नीचे लिख दें एवं दो के साथ आगे बढ़ें]

चौथा चरण: $\frac{09483 \times 13}{3279}$ [9 × 3 + 4 + 2 = 33; 3 नीचे लिख दें एवं तीन के साथ आगे बढ़ें]

अंतिम चरण: $\frac{09483 \times 13}{123279}$ [0 × 3 + 9 = 3 = 12, इसे नीचे लिख दें]

∴ उत्तर है: 123279

youssufalboob

इसी तरह हम 14, 15 आदि से गुणा करने की संक्षिप्त विधि भी ईजाद कर सकते हैं। पर ऐसा करने के क्रम में हमें गुण्य के अंकों को चौगुना, पाँच-गुना करना पड़ेगा, और हर बार हमें एक बड़ी संख्या के साथ आगे बढ़ने के लिए बाध्य होना होगा: इस प्रकार की बड़ी संख्याओं से गुणा करने का हमलोगों के पास इससे आसान विधि उपलब्ध है।

पर क्या आप उपर्युक्त तरीके से 21, 31 आदि से गुणा करने की विधि बना सकते हैं? यह बहुत कठिन नहीं है। प्रयास कीजिए।

9 से गुणा (Multiplication by 9)

पहला चरण: गुण्य के दायीं ओर स्थित अंतिम अंक को 10 में से घटाएँ। इससे उत्तर के दायीं ओर का अंतिम अंक मिल जाता है।

दूसरा चरण: दायीं ओर के दूसरे अंक को 9 में से घटाएँ और इसे दायीं ओर स्थित अपने पड़ोसी अंक से जोड़ दें।

तीसरा चरण: अब आप उपर्युक्त ढंग से बढ़ते हुए क्रमशः '0' पर पहुँच जाते हैं, पड़ोसी अंक में से 1 घटाकर शेष लिख दें। यह उत्तर के बायीं ओर का अंक होगा।

उदा. I. $8576 \times 9 = ?$

हल:

$$\frac{08576 \times 9}{77184}$$

पहला चरण: 10 में से 6 घटाएँ। $10 - 6 = 4$; इसे नीचे लिख दें।

दूसरा चरण: 7 को 9 में से घटाएँ एवं 6 जोड़ दें।

$(9 - 7) + 6 = 8$; इसे नीचे लिख दें.

तीसरा चरण: $(9 - 5) + 7 = 11$; 1 नीचे लिख दें एवं 1 के साथ आगे बढ़ें।

चौथा चरण: $(9 - 8) + 5 + 1 = 7$; इसे नीचे लिख दें।

अंतिम चरण: बायीं ओर '0' है, इसलिए हम 8 में से एक घटाकर शेष '7' को नीचे लिख देते हैं। इस प्रकार उत्तर आया: 77184

अभ्यास के लिए प्रश्न

1) $34 \times 9 = ?$ 2) $569 \times 9 = ?$ 3) $1328 \times 9 = ?$ 4) $56493 \times 9 = ?$
5) $89273258 \times 9 = ?$

उत्तर

1) 306 2) 5121 3) 11952 4) 508437 5) 803459322

हम इस विषय पर अधिक जोर नहीं देंगे, क्योंकि कभी कभी यह आवश्यकता से अधिक जटिल सिद्ध होता है।

दूसरी विधि :

पहला चरण: दी गई संख्या के दायीं ओर एक शून्य डाल दें। उदाहरण के लिए 8576 को लिखें: 85760

दूसरा चरण: दी गई संख्या को इस संख्या में से घटा दें:

$85760 - 8576 = 77184$

25 से गुणा (Multiplication by 25)

मान लीजिए, आपको 12364011258 को 25 से गुणा करना है। संभवतः आप गुणा करने

yousmahboob

की सामान्य विधि अपनाएँगे। पर बेहतर यह होगा कि अल्प दिए हुए संख्या को 100 से गुणा करके 4 से भाग दे दें। ऐसा करने के क्रम में निम्नलिखित बातों का ध्यान रखें:

पहला चरण: संख्या के अंत में दो '0' डाल दें, क्योंकि इसे 100 से गुणा करना है।

दूसरा चरण: इस प्रकार प्राप्त गुणनफल में 4 से भाग दे दें। इस प्रकार आपका उत्तर हुआ: 12569025800 ÷ 4 = 3142256450

निश्चय ही यह विधि आपकी सामान्य विधि से आसान है!

गुणा की 10^x -आधारी पद्धति (10^x -Base Method of Multiplication)

इस विधि की व्याख्या के लिए एक उदाहरण लीजिए।

उदा. 1: मान लीजिए हमें 9 को 8 से गुणा करना है।

हल:

पहला चरण: 10 को ऐसे घातांक के साथ लेते हैं जो गुण्य के मान के निकटतम हो।

यहाँ हमारा काम $10^1 = 10$ से चल जाएगा।

दूसरा चरण: 9 एवं 8 को ऊपर नीचे करके बायीं ओर लिख दें।

तीसरा चरण: दोनों को 10 में से घटाएँ एवं शेष 1 एवं 2 के दाहिनी ओर ऋण चिह्न (–) के साथ लिख दें।

चौथा चरण: इस प्रकार गुणनफल का दो भाग होगा: एक बायीं ओर तथा दूसरा दायीं ओर। आप चाहें तो दोनों भागों में फर्क करने के लिए इन दोनों के बीच एक विभाजक रेखा खींच सकते हैं।

पाँचवाँ चरण: मूल संख्या 9 में से (–2) को तिर्यक रूप में घटाएँ: (9 – 2) = 7, या फिर 8 में से 1 तिर्यक रूप से घटाएँ। (8 – 1) = 7 यह उत्तर का वाम-पक्ष हुआ।

छठा चरण: दोनों ऋणात्मक अंकों को आपस में गुणा करें (1 एवं 2) गुणनफल 2 है। और इस प्रकार हमें उत्तर का दायाँ पक्ष मिलेगा।

इस विधि को रेखाओं के सहारे भी निरूपित किया जा सकता है।

$$\begin{array}{r|l} 9 & -1 \\ 8 & -2 \\ \hline 7 & 2 \end{array} \quad \therefore \text{ उत्तर} = 72$$

यह विधि हर स्थिति के लिए उपयोगी है और इसलिए इसके अनंत अनुप्रयोग संभव हैं। इस विधि को समझने के लिए अन्य उदाहरण भी देखिए।

$$\begin{array}{r|l} 9 & -1 \\ 9 & -1 \\ \hline 8 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 9 & -1 \\ 7 & -3 \\ \hline 6 & 3 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 9 & -1 \\ 6 & -4 \\ \hline 5 & 4 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 8 & -2 \\ 8 & -2 \\ \hline 6 & 4 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 8 & -2 \\ 7 & -3 \\ \hline 5 & 6 \end{array}$$

नोट: उत्तर की दाहिनी ओर उतनी ही संख्याएँ होनी चाहिए, जितना 10 का घातांक है। ऊपर के सभी उदाहरणों में 10 का घातांक 1 रहा है। इसलिए उपर्युक्त सभी उदाहरणों में उत्तर के दाहिने पक्ष में केवल एक अंक ही मौजूद रहा है; लेकिन यदि ऋणात्मक अंकों को गुणा

yoursmahboob

करने से एक से अधिक अंकों की संख्या मिले तो ऐसी परिस्थिति में आप क्या करेंगे? उदाहरण के लिए, यदि 7 को 6 से गुणा करना हो तो,

$$\begin{array}{l} 7 \quad -3 \\ \underline{6 \quad -4} \\ 3 \,/\, 12 \end{array}$$

यह संख्या गुणा की सामान्य विधि से हल हो जाती है, जिसके मुताबिक दायीं ओर के शेष के बायीं ओर की संख्या के साथ जोड़ देते हैं। इसलिए ऊपर के उदाहरण में, 12 का 2 दायीं ओर लिखकर 1 को बायीं ओर लेकर आगे बढ़ते हैं और इसे 3 में जोड़ देते हैं। इस प्रकार हमें 7 एवं 6 के गुणनफल के रूप में 42 प्राप्त होता है.

$$\begin{array}{l} 7 \quad -3 \\ \underline{6 \quad -4} \\ 4 \,/\, 2 \end{array}$$

उपर्युक्त सभी उदाहरणों में गुण्य एवं गुणक 10 से कम थे, पर यदि ये 10 से अधिक हों, फिर क्या करेंगे?

उदा. 2: $12 \times 11 = ?$

हल:

$$\begin{array}{l} 12 \quad +2 \\ \underline{11 \quad +1} \\ 13 \,/\, 2 \end{array}$$

यहाँ भी वही विधि लागू होगी। केवल तिर्यक-घटाव की जगह तिर्यक-जोड़ का प्रयोग करना होगा।

उदा. 3: हल करें: $16 \times 11 = ?$, $18 \times 12 = ?$, $19 \times 13 = ?$, $17 \times 17 = ?$, $12 \times 13 = ?$

हल:

$$\begin{array}{l} 16 \quad +6 \\ \underline{11 \quad -1} \\ 17/6 = 176 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 18 \quad -8 \\ \underline{12 \quad +2} \\ 20/6 = 216 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 19 \quad +9 \\ \underline{13 \quad -3} \\ 22/7 = 247 \end{array}$$

शेष प्रश्नों को स्वयं हल करें।

यदि एक संख्या 10 से बड़ी हो एवं दूसरी 10 से छोटी तो उसका गुणनफल निकालना

उदा. 4: हल करें: $12 \times 9 = ?$

हल:

$$\begin{array}{l} 12 \quad +2 \\ \underline{9 \quad -1} \\ 11/\overline{2} = 108 \end{array}$$

ऋण एवं धन संख्याओं के गुणनफल से ऋण-संख्या मिलती है, इसलिए दायीं ओर स्थित संख्याओं के गुणनफल से प्राप्त ऋणात्मक संख्या (−2) को 10 में से घटाना होगा। इस प्रकार

i) उत्तर का बायाँ पक्ष 10 में से घटते हैं।

yoursmahboob

ii) उत्तर के बाम पक्ष में से 1 घटाते हैं।

उदा. 5: सरल करें: $14 \times 6 = ?$

$$\begin{array}{ll} 14 & +4 \\ 6 & -4 \\ \hline = 10 / {}_{1}\overline{6} & -9/\overline{6} = 84 \end{array}$$

दायीं ओर प्राप्त होता है (–16)। गुणा के सामान्य नियम के मुताबिक 10 में से 1 घटाते हैं शेष क्रिया उदा. 4 की तरह ही संपन्न करते हैं।

थोड़े अभ्यास के बाद यह क्रिया मन में ही संपन्न की जा सकती है; इसलिए पाठकों को सुझाव दिया जाता है कि इस प्रकार के प्रश्नों का अभ्यास जितना हो सके कर लें।

अभ्यास प्रश्न

सरल करें:

1) 12×11 2) 13×12 3) 14×7 4) 11×6
5) 17×13 6) 19×15 7) 18×8

उत्तर:

1) 132 2) 156 3) 98 4) 66 5) 221 6) 285 7) 144

जब गुणक एवं गुण्य 100 के करीब हों, तब हमारा आधार 100 = (10^2) होना चाहिए। ऐसी स्थिति में उत्तर के दायीं पक्ष में दो अंक होंगे। शेष नियमों में कोई परिवर्तन नहीं होगा।

उदा. 6: हल करें: (1) $91 \times 96 = ?$ (2) $99 \times 98 = ?$

हल: (1)
$$\begin{array}{ll} 91 & -9 \\ 96 & -4 \\ \hline 87 / 36 = 8736 \end{array}$$

(2)
$$\begin{array}{ll} 99 & -1 \\ 98 & -2 \\ \hline 97 / 02 = 9702 \end{array}$$

उदा. 7: हल करें: (1) $93 \times 92 = ?$ (2) $93 \times 93 = ?$ (3) $97 \times 96 = ?$ (4) $89 \times 85 = ?$

हल: (1)
$$\begin{array}{ll} 93 & -7 \\ 92 & -8 \\ \hline 85 / 56 = 8556 \end{array}$$

(2)
$$\begin{array}{ll} 93 & -7 \\ 93 & -7 \\ \hline 86 / 49 = 8649 \end{array}$$

(3)
$$\begin{array}{ll} 97 & -3 \\ 96 & -4 \\ \hline 93 / 12 = 9312 \end{array}$$

(4)
$$\begin{array}{ll} 89 & -11 \\ 85 & 15 \\ \hline 74 / {}_{1}65 = 7565 \end{array}$$

उदा. 8: हल करें: (1) $102 \times 89 = ?$ (2) $105 \times 92 = ?$
(3) $107 \times 91 = ?$ (4) $115 \times 92 = ?$

हल: (1)
$$\begin{array}{ll} 102 & +2 \\ 98 & -2 \\ \hline 100 / \overline{04} = 9996 \end{array}$$

(2)
$$\begin{array}{ll} 105 & +5 \\ 92 & -8 \\ \hline 97 / \overline{40} = 9660 \end{array}$$

प्रश्न संख्या (3) एवं (4) को स्वयं हल करें।

नोट: यदि उत्तर का दायाँ पक्ष ऋणात्मक हो तो इसे 100 में से घटा देते हैं तथा बायें पक्ष में से एक घटा लिया जाता है

yoursmahboob

उदा. 9: हल करें: (1) $102 \times 103 = ?$ (2) $105 \times 107 = ?$
(3) $111 \times 117 = ?$ (4) $115 \times 108 = ?$

हल:

(1)
$$\begin{array}{ll} 102 & +2 \\ 103 & +3 \\ \hline \end{array}$$
$105 / 06 = 10506$

(2)
$$\begin{array}{ll} 105 & +5 \\ 107 & +7 \\ \hline \end{array}$$
$112 / 35 = 11235$

(3)
$$\begin{array}{ll} 111 & +11 \\ 117 & +17 \\ \hline \end{array}$$
$128 / 87 = 12987$

प्रश्न संख्या (4) को स्वयं हल करें।

उदा. 10: हल करें: (1) $998 \times 981 = ?$ (2) $978 \times 983 = ?$
(3) $1112 \times 995 = ?$ (4) $1118 \times 985 = ?$
(5) $1107 \times 1113 = ?$

हल: यहाँ हमारा आधार $100 = (10^2)$ होगा। इस प्रकार उत्तर के दाएँ पक्ष में तीन अंक होंगे।

(1)
$$\begin{array}{ll} 998 & -2 \\ 981 & -19 \\ \hline \end{array}$$
$979 / 038 = 979038$

(2)
$$\begin{array}{ll} 978 & -22 \\ 983 & -17 \\ \hline \end{array}$$
$961 / 374 = 961374$

(3)
$$\begin{array}{ll} 1112 & +112 \\ 995 & -5 \\ \hline \end{array}$$
$1107 / 560 = 1106440$

प्रश्न संख्या (4) एवं (5) को स्वयं हल करें।

अपवर्त्य एवं उप-अपवर्त्य

उपरोक्त सभी उदाहरणों में गुणक और गुण्य या दोनों में से कोई एक आधार के करीब था, जिससे हमें शेष कम प्राप्त होता था इससे गुणा में आसानी होती थी। पर यदि गुणा करने के लिए दो ऐसी संख्याएँ दे दी जाएँ, जिनमें से कोई भी आधार के निकट नहीं हो तो क्या करेंगे? ऐसी स्थिति में, हम किसी उपयुक्त आधार का अपवर्त्य या उप-अपवर्त्य को कामचलाऊ आधार बना लेते हैं; इसकी सहायता से सभी गणनाएँ करते हैं और फिर प्राप्त परिणाम में उसी अनुपात में गुणा या भाग देते हैं.

मान लीजिए, हमें 47 को 49 से गुणा करना है। ये दोनों ही संख्याएँ 10 या 100 से काफी दूर हैं। यदि इनमें से किसी एक को आधार बना लें तो गणना में मुसीबत का सामना करना पड़ेगा। इसलिए 100 को सैद्धांतिक आधार के रूप में स्वीकार कर लेते हैं; और इसके उप अपवर्त्य 50 को कामचलाऊ आधार के रूप में स्वीकार कर लेते हैं।

$$\begin{array}{ll} 47 & -3 \\ 49 & -1 \\ \hline \end{array}$$
$2 / 46 / 03 = 2303$

पहला चरण: 50 को कामचलाऊ आधार बनाते हैं।

दूसरा चरण: विपंक-घटाव की क्रिया से हमें बायाँ ओर 46 प्राप्त होता है।

तीसरा चरण: चूँकि हमारा कामचलाऊ आधार 100 से व्युत्पन्न है, इसलिए दायाँ ओर दो अंक होंगे।

youssmahboob

चौथा चरण: चूँकि 50, 100 का आधा है, इसलिए 46 को दो से विभाजित करें।

$46 \div 2 = 23$; यही उत्तर का वाम-पक्ष है।

पाँचवाँ चरण: उत्तर का दाहिना-पक्ष '03' अप्रभावित रहता है।

अथवा

यदि 100 को 'सैद्धांतिक आधार' एवं 50 को 'कामचलाऊ आधार' बनाने के बजाए, 10 को सैद्धांतिक आधार मानकर इसके अपवर्त्य 50 को कामचलाऊ आधार बनाया जा सकता है तो ऐसा करने पर उत्तर के वाम-पक्ष में 5 से गुणा करना होगा।

$$\begin{array}{r} 47 \quad - 3 \\ 49 \quad - 1 \\ \hline 5 \times 46 / 3 \end{array}$$

$230 / 3 = 2303$

बायें पक्ष में केवल एक अंक होगा, क्योंकि यहाँ 10 का घातांक '1' है। क्या आप उपरोक्त प्रश्न को 10 को 'सैद्धांतिक आधार' एवं 40 को 'कामचलाऊ आधार' बनाकर हल कर सकते हैं?

उदा. 2: हल करें: (1) $48 \times 49 = ?$ (2) $47 \times 46 = ?$

हल: (1) कामचलाऊ आधार $= \frac{100}{2} = 50$

$$\begin{array}{r} 48 \quad - 2 \\ 49 \quad - 1 \\ \hline 2) 47 / 02 \end{array} = 23\frac{1}{2} / 02 = 23 / 52 = 2352$$

यहाँ 47 एक विषम संख्या है, जिसे दो से विभाजित करने पर एक मिश्र संख्या $23\frac{1}{2}$ मिलता है। जिस प्रकार $\frac{1}{2}$ रुपया बायें-पक्ष की ओर ले जाया जाता है, ठीक वैसे ही $23\frac{1}{2}$ का आधा (1/2) दायीं ओर (50 के रूप में) ले जाया जाता है।

दूसरे प्रश्न को इसी तरह हल करें।

गुणा का सामान्य नियम

हमने अभी कुछ खास खास स्थितियों के संदर्भ में गुणा करने की प्रक्रिया की चर्चा की. अब हम गुणा के एक ऐसे 'सामान्य नियम' की चर्चा करेंगे, जो सभी स्थितियों पर लागू होता हो. विशिष्ट परिस्थितियों के लिए प्रयुक्त सभी नियमों का स्मरण रख पाना बड़ा मुश्किल होता है, इसलिए गुणा के 'सामान्य सूत्र' से परिचित होना जरूरी है।

दो अंकों की संख्या से गुणा

उदा. 1: सरल करें: (1) $12 \times 13 = ?$

(2) $17 \times 18 = ?$

(3) $87 \times 92 = ?$

हल: (1) $12 \times 13 = ?$

पहला चरण: गुणक एवं गुण्य में इकाई के स्थान पर स्थित अंकों को आपस में गुणा करें

yoursmahboob

1 2
1 3
6 (2 × 3)

दूसरा चरण: अब तिर्यक्-गुणन का सहारा लें. 3 को 1 से गुणा करें एवं 1 को 2 से। दोनों उत्पादों को जोड़ दें एवं 6 के बायीं ओर लिख दें।

1 2
1 3
56 (3 × 1 + 2 × 1)

तीसरा चरण: अंतिम चरण में हम गुणक एवं गुण्य दोनों के बायीं ओर स्थित अंकों को आपस में गुणा करते हैं।

1 2
1 3
156 (1 × 1)

(2) 17 × 18 = ?

पहला चरण:

1 7
1 8
6 [7 × 8 = 56; 6 लिख दें एवं 5 लेकर आगे बढ़ें]

दूसरा चरण:

1 7
1 8
0 6 [1 × 8 + 7 × 1 + 5 = 20; '0' लिख दें एवं 2 के साथ आगे बढ़ें]

तीसरा चरण:

1 7
1 8
3 0 6 [1 × 1 + 2 = 3; इसे लिख दें]

(3) 87 × 92 = ?

पहला चरण:

8 7
9 2
4 (7 × 2 = 14, 4 लिख दें एवं 1 के साथ आगे बढ़ें)

yoursmahboob

दूसरा चरण:

8 7
9 2
0 4 (8 × 2 + 9 × 7 − 1 = 80, '0' लिख दें एवं 8 के साथ आगे बढ़ें)

तीसरा चरण:

8 7
9 2
8004 (8×9+8=80)

अभ्यास प्रश्न

सरल करें :

1) 57 × 43	2) 51 × 42	3) 38 × 43	4) 56 × 92
5) 81 × 19	6) 23 × 99	7) 29 × 69	8) 62 × 71
9) 17 × 37	10) 97 × 89		

उत्तर

1) 2451	2) 2142	3) 1634	4) 5152
5) 1539	6) 2277	7) 2001	8) 4402
9) 629	10) 8633		

उदा. 2: हल करें : 1) 325 × 17 = ? 2) 4359 × 23 = ?

उत्तर (1): पहला चरण:

3 2 5
1 7
5 (5 × 7 = 35, 5 लिख दें एवं 3 के साथ आगे बढ़ें)

दूसरा चरण:

3 2 5
1 7
2 5 (2 × 7 + 5 × 1 + 3 = 22, 2 लिख दें एवं 2 के साथ आगे बढ़ें)

तीसरा चरण:

3 2 5
1 7
5 2 5 (3 × 7 + 2 × 1 + 2 = 25, 5 लिख दें एवं 2 के साथ आगे बढ़ें)

नोट: तिर्यक-गुणन की प्रक्रिया तब तक जारी रखें, जब तक कि ऐसे सभी जोड़े समाप्त नहीं हो जाते। उपरोक्त दूसरे चरण में हमने 25 एवं 17 का तिर्यक-गुणन किया एवं तीसरे चरण में 32 एवं 17 का तिर्यक गुणन किया गया।

yoursmahboob

चौथा चरण:

```
3 2 5
  1 7
5 5 2 5
```

(3 × 1 + 2 = 5, इसे लिख दें)

(2) पहला चरण:

```
4 3 5 9
      2 3
        7
```

(9 × 3 = 27, 7 लिख दें एवं 2 के साथ आगे बढ़ें)

दूसरा चरण:

```
4 3 5 9
    2 3
    5 7
```

(5 × 3 + 9 × 2 + 2 = 35, 5 लिख दें एवं 3 के साथ आगे बढ़ें)

तीसरा चरण:

```
4 3 5 9
  2 3
2 5 7
```

(3 × 3 + 5 × 2 + 3 = 22, 2 लिख दें एवं 2 के साथ आगे बढ़ें)

चौथा चरण:

```
4 3 5 9
  2 3
0 2 5 7
```

(4 × 3 + 3 × 2 + 2 = 20, 0 लिख दें एवं 2 के साथ आगे बढ़ें)

पाँचवाँ चरण:

```
4 3 5 9
  2 3
1 0 0 2 5 7
```

(4 × 2 + 2 = 10; इसे लिख दें)

हमलोग सभी चरणों को एक साथ भी लिख सकते हैं:

```
                4 3 5 9
                  2 3
4×2/4×3+2×3/3×3+5×2/5×3+9×2/9×3
= 10      20        22        35      17
= 100257
```

अथवा, हम बिना बीच के चरणों को लिखे भी उत्तर तक पहुँच सकते हैं। केवल एक बात

yoursmahboob

स्मरण रखना होगा और वह है **'संख्याओं को साथ लेकर आगे बढ़ना'**।

$$\begin{array}{r} 4359 \\ 23 \\ \hline 10_{2}0_{2}2_{3}5_{2}7 \end{array} \quad \text{अथवा} \quad \begin{array}{r} 4359 \\ 23 \\ \hline 100257 \end{array}$$

आपको एक ही चरण में गणना कर लेने की इस तकनीक में निपुणता हासिल कर लेनी चाहिए। उपरोक्त चरणों का तब तक अध्ययन कीजिए जब तक कि आप तिर्यक-गुणन की इस विधि को हृदयंगम नहीं कर लेते।

तीन अंकों वाली संख्या से गुणा:

उदा. 1: हल करें:

1) 321 × 132 = ? 2) 4562 × 345 = ? 3) 69712 × 641 = ?

हल: 1) ***पहला चरण:***

$$\begin{array}{r} 3\ 2\ 1 \\ \updownarrow \\ 1\ 3\ 2 \\ \hline 2 \end{array} \quad (1 \times 2 = 2)$$

दूसरा चरण:

$$\begin{array}{r} 3\ 2\ 1 \\ \times \\ 1\ 3\ 2 \\ \hline 7\ 2 \end{array} \quad (2 \times 2 + 3 \times 1 = 7)$$

तीसरा चरण:

$$\begin{array}{r} 3\ 2\ 1 \\ \times \\ 1\ 3\ 2 \\ \hline 3\ 7\ 2 \end{array} \quad (2 \times 3 + 3 \times 2 + 1 \times 1 = 13,\ 3 \text{ लिख दें एवं } 1 \text{ के साथ आगे बढ़ें।})$$

चौथा चरण:

$$\begin{array}{r} 3\ 2\ 1 \\ \times \\ 1\ 3\ 2 \\ \hline 2\ 3\ 7\ 2 \end{array} \quad (3 \times 3 + 1 \times 2 + 1 = 12,\ 2 \text{ लिख दें एवं } 1 \text{ के साथ आगे बढ़ें।})$$

पाँचवाँ चरण:

$$\begin{array}{r} 3\ 2\ 1 \\ \updownarrow \\ 1\ 3\ 2 \\ \hline 4\ 2\ 3\ 7\ 2 \end{array} \quad (1 \times 3 + 1 = 4)$$

yoursmahboob

321
132

या, $\overline{1\times3/3\times3+1\times2/2\times3+3\times2}+\overline{1\times1/2\times2+3\times1/1\times2}$

$= \overline{4}\ \ {}_{1}2\ \ {}_{3}3\ \ 7\ \ 2$

$= 42372$

4562
345

(2) $\overline{4\times3}/\overline{4\times4+3\times5/5\times4+4\times5+3\times6}/\overline{5\times5-4\times6+3\times2/5\times6}+\overline{4\times2/2\times5}$

$= \overline{15}\ \ {}_{1}7\ \ {}_{6}3\ \ {}_{1}8\ \ {}_{3}9\ \ {}_{3}0$

$= 1573890$

69712
645

(3) $\overline{6\times6/4\times6+6\times9/1\times6-4\times9}+\overline{6\times7/1\times9+4\times7+6\times1/1\times7}+\overline{4\times1+6\times2/1\times1+4\times2/1\times2}$

$= \overline{44}\ \ {}_{8}6\ \ {}_{8}8\ \ {}_{4}5\ \ {}_{1}3\ \ 9\ \ 2$

$= 44685392$

नोट: क्या आपने तिर्यक-गुणन की क्रिया को भली प्रकार समझ लिया? क्या आपने इस बात पर ध्यान दिया कि तिर्यक गुणन कि क्रिया के दौरान अंक किस प्रकार घटते, बढ़ते एवं यथावत बने रहते हैं? प्रश्न संख्या (3) पर जरा सरसरी नजर डालिए। उत्तर की पहली कतार में आप यदि दायीं से बायीं ओर बढ़ें तो आप पाएँगे कि पहले भाग में गुणन क्रिया केवल एक बार ही संपन्न की गई है और वह क्रिया है (1 × 2)। दूसरे भाग में गुणन की क्रिया दो बार संपन्न की गई है (1 × 1 एवं 4 × 2), तीसरे भाग में तीन बार (1 × 7, 4 × 1 एवं 6 × 2), चौथे भाग में तीन बार (1 × 9, 4 × 7 एवं 6 × 1), 5वें भाग में तीन बार (1 × 6, 4 × 9 एवं 6 × 7), छठे भाग में दो बार (4 × 6 एवं 6 × 9) तथा अंतिम भाग में केवल एक बार (6 × 6) गुणा की क्रिया दुहराई गई है। तिर्यक-गुणन में अंकों की भागीदारी को निम्नलिखित रेखाचित्र के सहारे दर्शाया जा सकता है।

अंकों के प्रत्येक जोड़े के लिए तिर्यक-गुणन की विधि ही अपनायी जाती है

चार अंकों वाली संख्या से गुणा

उदा. हल करें: 1) 4325 × 3216

2) 646329 × 8124

yoursmahboob

हल: 1) $4325 \times 3216 = ?$

पहला चरण:

```
 4 3 2 5
   ↕
 3 2 1 6
 -------
       0
```

($5 \times 6 = 30$, 0 लिख दें एवं 3 के साथ आगे बढ़ें।)

दूसरा चरण:

```
 4 3 2 5
   ↕ ↕
 3 2 1 6
 -------
     0 0
```

($2 \times 6 + 1 \times 5 + 3 = 20$, 0 लिख दें एवं 2 के साथ आगे बढ़ें।)

तीसरा चरण:

```
 4 3 2 5
   ↕ ↕ ↕
 3 2 1 6
 -------
   2 0 0
```

($3 \times 6 + 2 \times 1 + 5 \times 2 + 2 = 32$, 2 लिख दें एवं 3 के साथ आगे बढ़ें।)

चौथा चरण:

```
 4 3 2 5
   ↕ ↕ ↕ ↕
 3 2 1 6
 -------
 9 2 0 0
```

($4 \times 6 + 3 \times 1 + 2 \times 2 + 5 \times 3 + 3 = 49$, 9 लिख दें एवं 4 के साथ आगे बढ़ें।)

पाँचवाँ चरण:

```
   4 3 2 5
   ↕ ↕ ↕
   3 2 1 6
 ---------
 0 9 2 0 0
```

($4 \times 1 + 3 \times 2 - 2 \times 3 + 4 = 20$, 0 लिख दें एवं 2 के साथ आगे बढ़ें।)

छठा चरण:

```
     4 3 2 5
     ↕ ↕
     3 2 1 6
 -----------
 9 0 9 2 0 0
```

($4 \times 2 + 3 \times 3 - 2 = 19$, 9 लिख दें एवं 1 लेकर आगे बढ़ें।)

yoursmahboob

सातवाँ चरण:

4 3 2 5

3 2 1 6

1 3 9 0 9 2 0 0 (4 × 3 + 1 = 13, इसे लिख दें)

उत्तर: 13909200

2) 646329 × 8124 = ?

इस प्रश्न को स्वयं हल करें एवं प्रयुक्त चरणों को सहभागी अंकों के रेखा-चित्रीय प्रस्तुतीकरण से मिलाकर देखें.

पहला चरण: 646329 / 8124

दूसरा चरण: 646329 / 8124

तीसरा चरण: 646329 / 8124

चौथा चरण: 646329 / 8124

पाँचवाँ चरण: 646329 / 8124

छठा चरण: 646329 / 8124

सातवाँ चरण: 646329 / 8124

आठवाँ चरण: 646329 / 8124

नौवाँ चरण: 646329 / 8124

अभ्यास प्रश्न

निम्नलिखित को सरल करें:

1) 234 × 456	2) 336 × 678	3) 872 × 431	4) 2345 × 67
5) 345672 × 456	6) 569 × 952	7) 458 × 908	8) 541 × 342
9) 666 × 444	10) 8109 × 450	11) 56321 × 672	12) 1278 × 569
13) 5745 × 562	14) 4465 × 887	15) 8862 × 341	

उत्तर:

1) 106704	2) 227808	3) 375832	4) 157115
5) 15726432	6) 541688	7) 415864	8) 185022
9) 295704	10) 3646350	11) 37847712	12) 727182
13) 3228690	14) 3960455	15) 3021942	

yoursmahboob

गुणनफल की जाँच

उदा. 1: 15 × 13 = 195

आंकिक योग: 6 × 4 = 6

या, 24 = 6

या, 6 = 6; इसलिए हमारा गुणनफल सही है।

उदा. 2: 69712 × 641 = 44685392

आंकिक योग: 7 × 2 = 5

या, 14 = 5

या, 5 = 5; इसलिए गुणनफल सही है।

उदा. 3: 321 × 132 = 42372

आंकिक योग: 6 × 6 = 0

या, 36 = 0

या, 0 = 0; इसलिए गुणनफल सही है।

पर यदि किसी को उत्तर 43227 प्राप्त हो और वह अपने गुणनफल को जाँचना चाहे तो देखिए क्या होता है।

321 × 132 = 43227

आंकिक योग: 6 × 6 = 0

या, 36 = 0

या, 0 = 0

इससे प्रमाणित होता है कि गुणनफल सही है, पर वस्तुतः यह गलत है। इस प्रकार हम पाते हैं कि यदि हमारी किस्मत खराब हो तो गलत उत्तर भी परीक्षण पर खरे उतरते हैं।

yoursmahboob

भाग

(Division)

इस अध्याय में पलक झपकते भाग हल कर लेने की तीव्रतम विधि पर हम विचार करेंगे। इसके लिए गणितीय गणना की वैदिक प्रक्रिया का सहारा लिया जाएगा। यह गणना-विधि किन्हीं खास खास स्थितियों के लिए नहीं, बल्कि सभी प्रकार के भाग हल करने के लिए इस्तेमाल किया जा सकता है। इस विधि की व्यापकता को देखते हुए इसका नाम 'क्राउनिंग जेम ऑफ ऑल' (Crowning Gem of All) रखा गया है।

पलक झपकते भाग हल करने की इस संक्षिप्त विधि को एक उदाहरण के सहारे समझा जा सकता है।

दो अंकों की संख्या से भाग

उदा. 1: 38982 में 73 से भाग दें।

हल:

चरण I: भाजक 73 का केवल पहला अंक अर्थात् 7 को भाजक-कॉलम में रखें एवं दूसरा अंक अर्थात् 3 को पहले अंक के ऊपर "on top of the flag" जैसे कि नीचे दर्शाया गया है, लिखें।

$$7^3 \,|\, 38 \quad 9 \quad 8 \quad 2$$

यहाँ भाग की क्रिया केवल 7 के द्वारा ही की जाएगी।

चरण II: चूँकि एक अंक (3) को (7) के ऊपर रखा गया है इसलिए दिए गए भाज्य के दायीं ओर का एक अंक, उत्तर के शेष स्थान (remainder position) के लिए अलग कर लिया जाता है। और इस संख्या को भाज्य की दूसरी संख्याओं से अलग करने के लिए एक लंबवत रेखा खींच देते हैं।

$$7^3 \,|\, 38 \quad 9 \quad 8 \,|\, 2$$

चरण III: चूँकि भाज्य की बायीं ओर से पहला अंक 3, 7 से छोटा है, इसलिए हम 38 को पहले भाज्य के रूप में लेते हैं। जब 38 में 7 से भाग देते हैं तो भागफल एवं शेष क्रमशः 5 एवं 3 प्राप्त होते हैं। हम 5 को पहला भागफल-अंक के रूप में रखते हैं और शेष 3 को भाज्य के अंक 9 के पहले उपसर्ग के रूप में रख देते हैं।

$$\begin{array}{l|llll} 7^3 & 38 & {}_3 9 & 8 & 2 \\ \hline & 5 & & & \end{array}$$

चरण IV: अब हमारा भाज्य 39 है। सर्वप्रथम हम 39 में से घात 3 एवं पहला भागफल-अंक 5 का गुणनफल अर्थात् 3×5=15 को घटाते हैं। यानि (39 - 15 =) 24 ही हमारा वास्तविक भाज्य है। अब 24 में 7 से भाग देते हैं और हमें दूसरा भागफल-अंक 3 प्राप्त होता है एवं शेष 3 प्राप्त होता है। इन दोनों ही प्राप्त अंकों को अपने-अपने जगह पर रख देते हैं। (जैसा कि चरण III में किया गया है।)

yoursmahboob

7^3	38	$_{3}9$	$_{3}8$	2
	5	3		

चरण V: अब हमारा भाज्य 38 है। इसमें भाज्य (3) एवं दूसरा भागफल अंक (3) का गुणनफल अर्थात् $(3 \times 3 =)$ 9 घटा लेते हैं। शेष 29 हमारा अगला वास्तविक भाज्य होगा और इसमें अब 7 से भाग देते हैं। हमें भागफल के रूप में 4 एवं शेष के रूप में 1 प्राप्त होता है। दोनों संख्याओं को अपने-अपने जगहों पर रख दिया जाता है.

7^3	38	$_{3}9$	$_{3}8$	$_{1}2$
	5	3	4	

चरण VI: हमारा अगला भाज्य 12 है जिसमें से हम भाज्य 3 एवं तीसरा भागफल अंक 4 का गुणनफल अर्थात् $(3 \times 4 =)$ 12 घटाते हैं। (जैसा कि हम पहले के चरणों में कर चुके हैं) इसप्रकार हमें $(12 - 12 =)$ 0 शेष प्राप्त होता है:

7^3	38	$_{3}9$	$_{3}8$	$_{1}2$
	5	3	4	0

इस प्रकार हम कह सकते हैं कि भागफल (Q) = 534 एवं शेष (R) = 0

इस प्रकार एक पूरी प्रक्रिया समाप्त होती है और यह एक पंक्ति में एवं मन में ही हल की जाने वाली अंकगणित है जिसमें सभी वास्तविक भाग की क्रिया एक अंक वाली भाजक 7 से की जाती है।

यह प्रक्रिया बहुत ही आसान है। इसकी और व्याख्या की आवश्यकता नहीं है। नीचे दिए गए कुछ और उदाहरणों की सहायता से इस प्रक्रिया को और सुस्पष्ट किया जा सकता है।

उदा. 2: 16384 में 128 से भाग दें। (चूँकि 128 एक छोटी संख्या है जिससे आसानी से भाग की क्रिया की जा सकती है इसलिए हम 128 को दो अंकों की संख्या मान सकते हैं।)

हल:

12^8	16	$_{4}3$	$_{11}8$	$_{6}4$
	1	2	8	0

चरण I: 16 को 12 से भाग देते हैं।

भागफल = 1 एवं शेष = 4

चरण II: $(43 - 8 \times 1 =)$ 35 हमारा अगला भाज्य है। इसमें 12 से भाग दें:

भागफल = 2 एवं शेष = 11

चरण III: $(118 - 8 \times 2 =)$ 102 हमारा अगला भाज्य है। इसमें 12 से भाग दें।

भागफल = 8 एवं शेष = 6

चरण IV: $64 - 8 \times 8 = 0$

इस प्रकार हमारा अंतिम भागफल 128 है एवं शेष 0 है।

yoursmahboob

उदा. 3: 601325 में 76 से भाग दें।

हल :

7^6	60	$_{81}1$	$_{63}$	$_{22}$	$_{25}$
	7	9	1	2	$13 = (25 - 6 \times 2)$

चरण 1: यहाँ, 7 से पहले विभाजन में, हम 8 को पहले भागफल-अंक के रूप में रख सकते हैं परंतु इस स्थिति में शेष अगले चरण में घटाव की क्रिया करने हेतु काफी छोटा बचता है इसलिए 7 को हमलोग भागफल-अंक के रूप में लिखते हैं और शेष 11 को अगले भाज्य-अंक के पहले उपवर्ग के रूप में रखते हैं

बाकि दूसरे सभी चरणों उदा.-1, एवं उदा.-2 में उल्लिखित चरणों के समान ही होंगे।

हमारा अंतिम भागफल 7912 एवं शेष 13 है।

यदि हम सभी को दशमलव अंक में प्राप्त करना चाहें तो शेष को लिखने के बजाए भाग की प्रक्रिया के नियम का पालन करते हुए जारी रखते हैं, जैसा कि नीचे दिया गया है:

7^6	60	1	3	2	5	$_{60}0$ $_{10}0$
	7	9	1	2	1	7 1

∴ उत्तर = 7912.171

नोट : शेष को भागफल से अलग करने वाली लंबवत रेखा, दशमलव के लिए पृथक् बिन्दु (Demarcation point) का काम करता है।

उदा. 4: 7777777 में 38 से भाग दें।

3^8	7	$_{17}7$	$_{17}7$	$_{57}7$	$_{77}7$	$_{87}7$	$_{77}7$
	2	0	4	6	7	8	13

$(= 77 - 8 \times 8)$

भागफल = 204678 एवं शेष – 13

तुम्हें उपर्युक्त हल के सभी चरणों को अवश्य पूरा करना चाहिए। हल करने का प्रयास करें। क्या आपने कुछ अंतर पाया?

उदा. 5: 8997654 में 99 से भाग दें।

हल : इसको चरण-दर चरण स्वयं हल करें।

उदा. 6: (i) 710.014 में 39 से भाग दें। (दशमलव के 4 अंकों तक)

(ii) 718.589 + 23 = ?

(iii) 718.589 : 98 = ?

हल : (i)

3^9	7	$_{41}1$	$_{80}0$	$_{20}0$	$_{21}$	$_{64}$ $_{70}0$
	1	8	.	2	0	5 4

अंतिम सेक्शन के लिए, भागफल (64 – 45 =)19 था। 19 में 3 से भाग देने पर हमने 5 की जगह 4 को उपयुक्त भागफल चुना। क्योंकि यदि हम 5 को भागफल चुनते तो शेष (19 – 15 =) 4 प्राप्त होता अब, अगला भाज्य (40 – 9 × 5 =) – 5 होता जो कि स्वीकार्य नहीं हो सकता है:

yoursmahboob

महत्वपूर्ण नोट :

1. चूँकि घात अंक (flag-digit) एक है इसलिए हम उत्तर के शेष के लिए दशमलव के एक अंक के पहले लंबवत रेखा खींचते हैं।
2. वह लंबवत रेखा जो शेष को भागफल से अलग करता है, दशमलव के लिए पृथक बिन्दु (demarcation-point) हो सकता है।

(ii)

2^5	7	$_1$1	$_0$8	.	$_1$5	$_1$8	$_0$9	
	3	1 .	2		4	3	0	

उत्तर – 31.243

नोट : उपर्युक्त महत्वपूर्ण नोट के अंतर्गत उल्लिखित दोनों बिन्दुओं को याद करें।

(iii)

9^6	7	1	$_8$8	.	5	8	9
	7	.	4		4	8	5

उत्तर = 7.4485

उदा. 7: 7.3 को 53 से भाग दें।

हल :

5^3	7	.	$_2$3	$_5$0	$_6$0	$_4$0	$_1$0
			1	3	7	7	3 . 6

तीन अंकों की संख्या से भाग

उदा. 8: 7031985 में 823 से भाग दें।

चरण I: यहाँ भाजक तीन अंकों का है। इस स्थिति में हम भाजक के अंतिम दो अंकों (अर्थात् 23) को भाजक के पहले अंक के ऊपर घात के रूप में लिखते हैं। चूँकि 2 घात अंक (flag-digit) है, इसलिए हम शेष के लिए भाज्य के दो अंकों को अलग कर लेते हैं।

8^{23}	70	3	1	9	85

चरण II: 70 में 8 से भाग देते हैं तथा भागफल 8 एवं शेष 6 को उनके उपयुक्त स्थानों पर रख देते हैं।

8^{23}	70	$_6$3	1	9	85
	8	5			

चरण III: अब हमारा भाज्य 63 है। इसमें से हम 16 घटा देते हैं, घात-अंकों (Flag-digit) का पहला अंक 2 एवं पहला भागफल अंक 8 का गुणनफल, एवं (63 – 16=) 47 शेष प्राप्त करते हैं। यह वास्तविक भाज्य है। 47 में 8 से भाग देने पर भागफल एवं शेष क्रमशः 5 एवं 7 प्राप्त होते हैं, तथा इन दोनों अंकों को उनके यथा स्थान रखते हैं।

yoursmahboob

8^{23}	70	$_{6}3$	$_{7}1$	9	85
	8	5			

चरण IV: अब हमारा भाज्य 71 है। हम इसमें से भाज्य-अंक के दो अंकों (2 और 3) एवं भागफल-अंक के दो अंकों (8 एवं 5) के व्रज गुणनफल (cross-products) को घटाते हैं। अर्थात्

$$71-\{(2\times5)+(3\times8)\}=71-34=37$$

इस प्रकार, अब 37 हमारा वास्तविक भाज्य है। 37 में 8 से भाग देने पर, भागफल 4 एवं शेष 5 प्राप्त होता है।

8^{23}	70	$_{6}3$	$_{7}1$	$_{5}9$	85
	8	5	4		

चरण V: अब हमारा भाज्य 59 है।

वास्तविक भाज्य = 59 – 23 एवं 54 का व्रज-गुणनफल

$= 59-(2\times4+3\times5)=59-23=36$

अब 36 में 8 से भाग देने पर भागफल = 4 एवं शेष = 4 बचते हैं।

8^{23}	70	$_{6}3$	$_{7}1$	$_{5}9$	$_{4}85$
	8	5	4	4	

चरण VI: वास्तविक भाज्य $=48-(3\times4+2\times4)$

$=48-20=28$

28 में 8 से भाग देने पर,

भागफल = 3 एवं शेष = 4

8^{23}	70	$_{6}3$	$_{7}1$	$_{5}9$	$_{4}8$	$_{4}5$
	8	5	4	4	3	

चरण VII: वास्तविक भाज्य $=45-(3\times4+2\times3)$

$=45-18=27$

27 में 8 से भाग देने पर,

भागफल = 3 एवं शेष = 3

8^{23}	70	$_{6}3$	$_{7}1$	$_{5}9$	$_{4}8$	$_{4}5$	3
	8	5	4	4	3	3	

लंबवत रेखा, जो शेष और भागफल को अलग करता है, दशमलव के लिए पृथक् बिन्दु हो सकता है।

उत्तर = 8544.33

हमारा उत्तर 8544.33 हो सकता है। पर यदि हम भागफल एवं शेष निकालना चाहते हैं तो प्रक्रिया थोड़ी भिन्न होगी।

yousmahboob

इस स्थिति में हमें अंतिम दो चरणों की आवश्यकता नहीं होती है। उत्तर प्राप्त करने के लिए गणना

$$\begin{array}{c|cccc|c} 8^{23} & 70 & 6^{3} & {}_{7}1 & {}_{5}9 & {}_{4}85 \\ \hline & 8 & 5 & 4 & 4 & \end{array}$$ चरण तक पर्याप्त होगी।

भागफल – 8544

शेष = 485 - 10 × (23 एवं 44 वज्र-गुणनफल) – घात अंक (flag-digit) का अंतिम अंक × भागफल का अंतिम अंक

$= 485 - 10(4 \times 2 + 4 \times 3) \quad 3 \times 4$

$= 485 - 200 - 12 = 273$

• दो घात-अंकों (flag-digits) एवं भागफल के अंतिम दो अंकों का वज्र-गुणनफल

उदा. 9: 1064321 में 743 से भाग दें (दशमलव के 4 अंकों तक)। शेष भी ज्ञात करें।

हल :

$$\begin{array}{c|cccc|c} 7^{43} & 10 & {}_{5}6 & {}_{4}4 & {}_{4}3 & {}_{5}21 \\ \hline & 1 & 4 & 3 & 2 & \end{array}$$

भागफल = 1432

शेष = 521 – 10 (43 एवं 32 का वज्र गुणनफल) – 3 × 2

$= 521 - 10 \times 17 - 6 = 345$

दशमलव के लिए :

$$\begin{array}{c|cccc|cccccc} 7^{43} & 10 & {}_{5}6 & {}_{4}4 & {}_{4}3 & {}_{6}2 & {}_{5}1 & {}_{4}0 & {}_{3}0 & {}_{2}0 \\ \hline & 1 & 4 & 3 & 2 & 4 & 6 & 4 & 3 & 2 \end{array}$$

उत्तर – 1432.4643

उदा. 10: 888 में 672 से भाग दें (दशमलव के 4 अंकों तक)

हल:

$$\begin{array}{c|c|cccc} 6^{72} & 8 & {}_{2}8 & {}_{3}8 & {}_{3}0 & {}_{4}0 \; {}_{5} \\ \hline & 1 & 3 & 2 & 1 & 4 \end{array}$$

उत्तर – 1.3214

नोट: लंबवत रेखा, जो शेष और भागफल को अलग करता है, दशमलव के लिए पृथक् बिन्दु (demarcation point) हो सकता है।

क्या भागफल एवं शेष ज्ञात किया जा सकता है? स्वयं कोशिश करें।

उदा. 11: 4213 में 1234 से भाग दें (दशमलव के 4 अंकों तक)। भागफल एवं शेष भी ज्ञात करें।

हल : यद्यपि कि 1234 एक 4 अंकों की संख्या है, हमलोग इसे तीन अंकों की संख्या के रूप में प्रयोग कर सकते हैं क्योंकि 12 एक छोटी संख्या है जिससे आसानी से भाग की क्रिया की जा सकती है।

$$\begin{array}{c|c|c} 12^{34} & 42 & {}_{6}13 \\ \hline & 3 & \end{array}$$

भागफल = 3,

शेष = 613 − 10 (03 एवं 34 का वज्र-गुणनफल) − 4 × 3

= 613 − 90 − 12 = 511

$_{12}34$	42	$_{6}1$	$_{4}3$	$_{7}0$	$_{3}0$ $_{2}$
	3 .	4	1	4	1

चार अंकों की संख्या से भाग

उदा. 12: 703195 में 8231 से भाग दें।

हल : चूँकि यहाँ पर 3 अन्त-अंक (flag-digit) है, इसलिए 3 अंकों को लंबवत रेखा से अलग करते हैं.

8^{231}	70	$_{6}3$	$_{7}1$	$_{5}9$	$_{4}5$ $_{6}$
	8	5	4	3	2

उत्तर = 85.432

चरण I: पहला भाज्य = 70

भागफल = 8, शेष = 6

चरण II: दूसरा वास्तविक भाज्य = 63 − 16 (2 × 8) = 47

भागफल = 5, शेष = 7

चरण III: तीसरा वास्तविक भाज्य = 71 − (23 एवं 85 का वज्र गुणनफल) = 71 − 34 = 37,

भागफल = 4, शेष = 5

चरण IV: चौथा वास्तविक भाज्य = 59 − (231 एवं 854 का वज्र गुणनफल)

= 59 − (1 × 8 + 3 × 5 + 2 × 4) = 59 − 31 = 28

भागफल = 3, शेष = 4

चरण V: पाँचवाँ वास्तविक भाज्य = 45 − (231 एवं 543 का वज्र-गुणनफल) = 22

भागफल = 2, शेष = 6

यदि हम भागफल एवं शेष ज्ञात करना चाहते हैं तो निम्नलिखित क्रिया करनी पड़ती है।

8^{231}	70	$_{6}3$	$_{7}195$
	8	5	

भागफल = 85

शेष = 7195 − 100 (231 एवं 085 का वज्र-गुणनफल) − 10(31 एवं 85 वज्र-गुणनफल) − 1 × 5

7195 − 3400 − 230 − 5 = 7195 − 3635 = 3560

उदा. 13: 41326 में 31046 से भाग (दशमलव के 5 अंकों तक) दें।

हल :

3^{1046}	4	$_{11}1$	$_{13}3$	$_{12}2$	$_{8}6$	$_{4}0$
	1 .	3	3	1	1	2 ..

उत्तर = 1.33112

चरण I: पहला वास्तविक भाज्य 4 है। भागफल = 1 एवं शेष = 1

चरण II: दूसरा वास्तविक भाज्य = 10 (1×1 = 10)

भागफल = 3 एवं शेष = 1

चरण III: तीसरा वास्तविक भाज्य = 13 (10 एवं 13 का वज्र गुणनफल)

= 10 − (0 × 1 + 1 × 3) = 10, भागफल = 3 एवं शेष = 1

चरण IV: चौथा वास्तविक भाज्य

= 12 − (104 एवं 133 का वज्र–गुणनफल)

= 12 − 7 = 5, भागफल = 1 एवं शेष = 2

चरण V: पाँचवाँ वास्तविक भाज्य

= 26 − (1046 एवं 1331 का वज्र गुणनफल)

= 26 − 19

= 7, भागफल (सुविधाजनक) = 1 एवं शेष = 4

चरण VI: छठा वास्तविक भाज्य

= 40 − (1046 एवं 3313 का वज्र–गुणनफल)

= 40 − 31 = 9, (सुविधाजनक) भागफल = 2 एवं शेष = 4

नोट : 1046 एवं 1331 का वज्र–गुणनफल = 6 × 1 + 4 × 3 + 0 × 3 + 1 × 1 = 19

उदा. 14: 20014 में 137608 से भाग दें। (दशमलव के पाँच अंकों तक)

हल:

1^{37608}	0	2	$_1$0	$_3$0	$_6$1	$_8$4 9
	0	1	4	5	4	4

उत्तर = 0.14544

इस स्थिति में भी विधि एक समान ही है। यहाँ केवल एक बात ध्यान देने योग्य है कि भाज्य के सभी पाँचों अंक शेष-भाग (remainder-section) में रखा गया है। इसलिए हम शून्य भाज्य भाग (dividend-part) में रखते हैं।

उदा. 15: 8905 में 769315 से भाग दें (दशमलव के चार अंकों तक)।

हल :

7^{69315}	0	0	8	$_1$9	$_6$0	$_{10}$5
	0 .	0	1	1	5	7

उत्तर = 0.01157

यदि प्रश्न में दशमलव के चार अंकों तक गणना करने के लिए पूछा जाता है तो दशमलव के पाँच अंकों तक गणना अच्छा होता है क्योंकि ऐसा बिना किए हमलोग इस निष्कर्ष पर नहीं पहुँच सकते हैं कि इसके आगे भी कोई मान्य गणना हो सकती है।

नोट: ऊपर के उदाहरण में हम यह पाते हैं कि भाज्य केवल 4 अंकों की ही है। इसलिए इन भाज्य के अंकों की संख्या को भाग के अंकों (69315) (flagged number) की संख्या के बराबर करने के लिए 8 के पहले एक शून्य रखते हैं। गणना के दौरान इस शून्य को सीधा नकल करके नीचे देते हैं। जो किसी भी प्रकार के गणना में भाग नहीं लेता है।

yoursmahboob

उदा. 16: 0.0034147 में 81.4256321 से भाग दें (दशमलव के 6 अंकों तक)।

हल: संख्या के रूप को परिवर्तित कर दें, क्योंकि दिए हुए रूप में दशमलव को यथास्थान रखने में उलझ सकते हैं।

34147 में 81425632 से भाग दें।

(दशमलव को 7 स्थान दायीं ओर विस्थापित कर दें।)

अब,

$$\begin{array}{r|l} 81425632 & 0 \;|\; 0\;\;0\;\;0\;\;3\;\;{}_{3}4\;\;{}_{2}4\;\;{}_{9}4\;\;{}_{5}7 \\ \hline & 0\;.\;|\;0\;\;0\;\;0\;\;0\;\;4\;\;1\;\;9 \end{array}$$

उत्तर = 0.000041

चरण I: शेष सेक्सन (remainder-section) के संख्या से पहले 3 शून्य रखते हैं क्योंकि घात संख्याएँ (flagged-digits) 8 हैं।

चरण II: तीनों शून्यों को सीधा निकल करके नीचे लिख दें।

चरण III: 3, 8 से कम है। सामान्य स्थितियों में जब भाज्य का पहले अंक भाजक के पहले अंक से कम हो तो हम भाज्य के पहले दो अंकों को एक साथ पहले भाज्य के रूप में लेते आ रहे हैं परंतु इस दशमलव की स्थिति में ऐसा नहीं कर सकते हैं। इसलिए, इस स्थिति में 3 पहले भाज्य के रूप में लिया जाता है। और भागफल = 0 एवं शेष = 3 प्राप्त होता है। आगे की सभी प्रक्रियाएँ वैसी ही होंगी जैसा कि पहले वर्णन किया गया है। अब तक आप भाग के प्रश्न के हर संभव स्थितियों से अवश्य ही अवगत हो चुके होंगे। ऊपर वर्णन किए गए किसी भी उदाहरण को नजरअंदाज नहीं करें।

इस प्रकार, अब आपको भाग के प्रश्न का अधिक से अधिक अभ्यास करना चाहिए।

गणना की जाँच:

उदा. 1: हम लोग उदाहरणों की गणना की जाँच बारी-बारी से करेंगे:

38982 ÷ 73 = 534 (चूँकि शेष शून्य है।)

अंक-योग (digit-sum) : 3+1 = 3 या, 3 = 3

इसलिए हमारी गणना सही है।

उदा. 2: स्वयं जाँच करें।

उदा. 3: 601325 ÷ 76

⇒ भागफल = 7912 एवं शेष = 13

हम ऊपर की गणना को इस प्रकार लिख सकते हैं।

7912×76 + 13 = 601325

अब, सत्यता की जाँच करते हैं :

अंक-योग (digit-sum method) : 1×4+4 = 8

या, 4+4 = 8

या, 8 = 8

yoursmahboob

इस प्रकार हमारी गणना सही है।

उदा. 4: स्वयं जाँच करें।

उदा. 5: स्वयं जाँच करें।

उदा. 6: (i) 710.014 : 39 = 18.2054 .....

हम अपने गणना की जाँच के लिए अंक-योग विधि (digit-sum method) का प्रयोग नहीं कर सकते हैं क्योंकि यहाँ पर हमारी गणना पूर्ण नहीं है।

(ii) 718.589 + 23 = 31.2430

यह गणना पूर्ण है क्योंकि अंत में भागफल एवं शेष '0' प्राप्त होता है। इस स्थिति में हम अंक-योग विधि का प्रयोग कर सकते हैं।

अंक योग = 2 + 5 = 4

या, 0.5 = 4

∴ या, 4 = 4

हमारी गणना सही है।

नोट: अंक योग के दौरान (9 विधि को भूल जाएँ) दशमलव को शामिल नहीं करते हैं।

उदा. 7: इस गणना में अंक योग विधि लागू होगा या नहीं बताएँ।

नोट: इस प्रकार हम अंक-योग नियम की सीमा (limitation) को देख सकते हैं।

अभ्यास प्रश्न

1. x में y से भाग दें, जहाँ

a) x = 135921 एवं y = 89
b) x = 64932 एवं y = 99
c) x = 8899 एवं y = 101
d) x = 9995 एवं y = 122
e) x = 13596289 एवं y = 76
f) x = 89325 एवं y = 132
g) x = 89 एवं y = 71
h) x = 96 एवं y = 95
i) x = 53 एवं y = 83
j) x = 93 एवं y = 109

2. x में y से भाग दें, जहाँ

a) x = 359281 एवं y = 567
b) x = 8932 एवं y = 981
c) x = 99899 एवं y = 789
d) x = 1053 एवं y = 989
e) x = 738 एवं y = 895
f) x = 13569 एवं y = 1051
g) x = 69325 एवं y = 1163
h) x = 935 एवं y = 1259
i) x = 100002 एवं y = 777
j) x = 12345 एवं y = 567

3. x में y से भाग दें, जहाँ

a) x = 3961256 एवं y = 6539
b) x = 698956 एवं y = 5783
c) x = 8889 एवं y = 6798
d) x = 889 एवं y 9834
e) x = .00532 एवं y 89.325168
f) x = .056 एवं y = .893
g) x = 12 एवं y = 998563
h) x = .867 एवं y = 93.834516
i) x = 1.932 एवं y = 105.63513
j) x = 0.00035 एवं y 78.53

yoursmahboob

उत्तर:

1.	a) 1527.2022	b) 655.87878	c) 88.10891	d) 81.92622
	e) 178898.53	f) 676.7045	g) 1.2535	h) 1.0105
	i) 0.6385	j) 0.8532		
2.	a) 633.6525	b) 9.1049	c) 126.6147	d) 1.0647
	e) 0.8245	f) 12.9105	g) 59.6087	h) 0.7246
	i) 128.7027	j) 21.7724		
3.	a) 605.7892	b) 120.8639	c) 1.3075	d) 0.0904
	e) 0.0000595	f) 0.0627	g) 0.000012	h) 0.0092326
	i) 0.0182893	j) 0.0000044		

yoursmahboob

विभाज्यता

(Divisibility)

अब हमलोग भाग से संबंध एक दिलचस्प पहलू पर विचार करते हैं। मान लीजिए, आपको कोई बहुत बड़ी संख्या दी गई हो और यह पता करना हो कि यह अमुक संख्या से विभाज्य है या नहीं? फिर आप कैसे इस बात की जाँच करेंगे। सच पूछिए तो विभाज्यता की जाँच का कोई सामान्य नियम मौजूद नहीं है। भिन्न-भिन्न विभाजकों के लिए अलग अलग नियम हैं। यहाँ हम 2 से 19 तक के विभाजकों के संदर्भ में विभाज्यता पर विचार करेंगे।

2 से विभाज्यता

नियम: यदि किसी संख्या का अंतिम अंक 0 या सम संख्या हो तो वह 2 से विभाज्य होगा।

उदा.: 12,86,130,568926 एवं 5983450, '2' से विभाज्य है जबकि 13,133 एवं 596351, '2' से विभाज्य नहीं हैं।

3 से विभाज्यता

नियम: यदि किसी संख्या का आंकिक योगफल 3 से विभाज्य है तो वह संख्या भी 3 से विभाज्य होगी।

उदा.: 1) 123 : 1 + 2 + 3 = 6; 3 से विभाज्य है। इसलिए 123 भी 3 से विभाज्य है।

2) 5673 : 5 + 6 + 7 + 3 = 21; इसलिए संख्या 3 से विभाज्य है।

3) 89612 : 8 + 9 + 6 + 1 + 2 = 26 = 2 + 6 = 8; तीन से विभाज्य नहीं है इसलिए संख्या भी तीन से अविभाज्य है।

4 से विभाज्यता

नियम: यदि किसी संख्या के अंतिम दोनों अंक 4 से विभाज्य हों या फिर किसी संख्या के अंत में दो या दो से अधिक शून्य हों, तो वह संख्या 4 से विभाज्य होगी।

उदा.: 1) 526428: 28, 4 से विभाज्य है। इसलिए संख्या भी 4 से विभाज्य है।

2) 5300 : इस संख्या के अंत में दो '0' हैं। इसलिए यह 4 से विभाज्य है

3) 134000 : यहाँ चूँकि संख्या के अंत में दो से भी अधिक शून्य हैं, इसलिए यह संख्या 4 से विभाज्य है।

4) 134522 : अंतिम दो अंकों से बनी संख्या 22, चूँकि 4 से अविभाज्य है, इसलिए संख्या भी 4 से विभाजित नहीं होगी।

5 से विभाज्यता

नियम: यदि किसी संख्या का अंतिम अंक '5' अथवा '0' हो तो वह संख्या 5 से विभाज्य होगी

उदाहरण: 1) 1345 : इस संख्या का अंतिम अंक '5' है, इसलिए यह 5 से विभाज्य है।

2) 1340 : इस संख्या का अंतिम अंक '0' है, इसलिए यह 5 से विभाज्य है।

3) 1343 : इस संख्या के अंत में न तो '0' है, न ही '5' इसलिए यह 5 से अविभाज्य है।

yoursmanhoob

6 से विभाज्यता

नियम: यदि कोई संख्या '2' एवं '3' से विभाज्य हो, तो वह संख्या '6' से भी विभाज्य होगी। इस प्रकार किसी संख्या के '6' से विभाजित होने के लिए यह जरूरी है कि

i) उस संख्या का अंतिम अंक 'सम' (even) हो, एवं

ii) उस संख्या का आंकिक योग '3' से विभाज्य हो।

उदा.: 1) 63924 ; यहाँ पहली शर्त पूरी हो जाती है, क्योंकि अंतिम अंक '4' सम संख्या है $6-3+9+2+4-24$; 3 से विभाज्य है। इसलिए संख्या 6 से विभाज्य है।

2) 154 : अंतिम अंक '4' एक सम संख्या है; पर $1+5+4=10$; 3 से विभाज्य नहीं है। इसलिए 154 भी 6 से विभाज्य नहीं है।

3) 261 ; अंतिम अंक 1 विषम संख्या है, इसलिए दूसरी शर्त के परीक्षण की कोई जरूरत नहीं।

***विशेष स्थितियाँ* (Special Cases):**

7, 13, 17, 19 ..... आदि से विभाज्यता के नियम काफी विचित्र एवं दुर्लभ हैं। नियमों को विस्तार से समझने के पहले हमें कुछ पदों जैसे **"One more" osculator** एवं **negative osculator** से अवगत होना चाहिए।

"One more" osculator का अर्थ होता है, संख्या को 10 का अपवर्त्य होने के लिए और 1 की आवश्यकता होती है। उदाहरण के लिए, 19 को 20 (2×10) होने के लिए और 1 की आवश्यकता है। यहाँ 19 के लिए Osculator 2 है। $2, 2 \times 10 - 20$ से लिया गया है। उसी प्रकार, 49 के लिए Osculator 5($5 \times 10 = 50$ से लिया गया) है।

Negative osculator का अर्थ होता है, संख्या को 10 का अपवर्त्य होने के लिए संख्या में से 1 कम करने की आवश्यकता होती है।

उदाहरण के लिए,

21 के लिए Negative Osculator 2($2 \times 10 - 20$ से लिया गया) है। उसी प्रकार 51 के लिए Negative Osculator 5 ($5 \times 10 = 50$ से लिया गया) है।

नोट :

(1) 7 के लिए Osculator क्या है?

अब, हम 7 के उस अपवर्त्य को खोजते हैं जो 10 के एक अपवर्त्य से या तो 1 अधिक हो या 1 कम। उदाहरण के लिए, $7 \times 3 = 21$, चूँकि 21, (2×10) 20 से 1 अधिक है, इसलिए 7 के लिए Negative Osculator है 2.

और $7 \times 7 = 49$ या 49, (5×10) 50 से 1 कम है। इसलिए 7 का "One more" Osculator है:

उसी प्रकार, 13, 17 एवं 19 के लिए Osculator है :

13 के लिए : $13 \times 3 = 39$: "One More" Osculator 4 है।

yoursmahboob

$(4 \times 10 - 40)$ से।

17 के लिए : $17 \times 3 = 51$; Negative Osculator 5 है।

$(5 \times 10 - 50)$ से।

19 के लिए: $19 \times 1 = 19$; "One More" Osculator 2 है: $(2 \times 10 = 20)$ से।

(2) क्या 29, 39, 21, 31, 27 एवं 23 के Osculator ज्ञात किए जा सकते हैं?

(3) क्या सम संख्या या 5 से अंत होने वाली संख्याओं के लिए Osculator प्राप्त किया जा सकता है? (नहीं। लेकिन क्यों?)

7 से विभाज्यता

सर्वप्रथम आप 7 के ऑस्कुलेटर (osculator) का ख्याल करें। एक बार फिर आपको याद दिला दें कि चूँकि $7 \times 3 = 21$ (2×10 से एक अधिक), हमारा ऋणात्मक ऑस्कुलेटर हुआ 2। ऑस्कुलेटर '2' हमारे लिए विलक्षण-अंक है। केवल और केवल यही अंक 7 से विभाज्यता की जाँच में हमारी मदद करता है। आइए इसकी क्रियाविधि देखें.

उदा. 1: क्या 112, 7 से विभाज्य है?

हल: ***पहला चरण:*** $\underline{11}\ \underline{2} : 11 - 2 \times 2 = 7$

चूँकि 7, 7 से विभाज्य है, इसलिए दी हुई संख्या भी 7 से विभाज्य है।

उदा. 2: क्या 2961, 7 से विभाज्य है?

हल: ***पहला चरण:*** $\underline{296}\ \underline{1} : 296 - 1 \times 2 = 294$

दूसरा चरण: $294 : 29 - 4 \times 2 = 21$

चूँकि 21, 7 से विभाज्य है, इसलिए संख्या भी 7 से विभाज्य होगी।

उदा. 3: क्या 55277838, 7 से विभाज्य है?

हल: $\underline{5527783}\ \underline{8} : 5527783 - 8 \times 2 = 5527767$

$\underline{552776}\ \underline{7} : 552776 - 7 \times 2 = 552762$

$\underline{55276}\ \underline{2} : 55276 - 2 \times 2 = 55272$

$\underline{5527}\ \underline{2} : 5527 - 2 \times 2 = 5523$

$\underline{552}\ \underline{3} : 552 - 3 \times 2 = 546$

$\underline{54}\ \underline{6} : 54 - 6 \times 2 = 42$

चूँकि 42, 7 से विभाज्य है, इसलिए संख्या भी 7 से विभाज्य होगी।

नोट: 1. उपरोक्त सभी उदाहरणों में बराबर के चिह्न (=) के बाद लिखी गई संख्याएँ भी 7 से विभाज्य हैं। जब कभी आप इस बात से आश्वस्त हो जाएँ कि प्राप्त संख्या 7 से विभाज्य है; बेहिचक अपनी गणना वहीं बंद कर दें एवं मान लें कि दी गई संख्या भी 7 से विभाज्य है।

2. उपरोक्त गणना को मन में भी संपन्न की जा सकती है। ऐसा करने का प्रयत्न कीजिए।

8 से विभाज्यता

नियम: यदि किसी संख्या के अंतिम तीनों अंकों से निर्मित संख्या 8 से विभाज्य हो, तो

yourshahboob

यह संख्या भी 8 से विभाज्य होगी। यदि किसी संख्या के अंत में तीन '0' हों, तो भी वह संख्या '8' से विभाज्य होगी।

उदा. 1: 1256 : चूँकि 256, 8 से विभाज्य है। इसलिए 1256 भी 8 से विभाज्य है।

उदा. 2: 135923120 : चूँकि 120, '8' से विभाज्य है, इसलिए संख्या भी 8 से विभाज्य है।

उदा. 3: 139287000 : चूँकि इस संख्या के अंत में तीन '0' हैं, इसलिए यह संख्या 8 से विभाज्य है।

9 से विभाज्यता

नियम: यदि किसी संख्या का आंकिक योगफल 9 से विभाज्य हो तो वह संख्या भी '9' से विभाज्य होगी।

उदा. 1: 39681 : 3 + 9 + 6 + 8 + 1 = 27; जो कि 9 से विभाज्य है। इसलिए संख्या भी 9 से विभाज्य होगी।

उदा. 2: 456138 : 4 + 5 + 6 + 1 + 3 + 8 = 27; जो कि 9 से विभाज्य है। इसलिए संख्या भी 9 से विभाज्य है।

10 से विभाज्यता

नियम: कोई भी संख्या, जिसके अंत में '0' हो, 10 से विभाज्य होगी।

11 से विभाज्यता

नियम: यदि किसी संख्या के सम एवं विषम स्थानों पर स्थित अंकों का योग क्रमशः एक दूसरे के बराबर हो या फिर उनका अंतर यदि 11 से विभाज्य हो तो वह संख्या 11 से विभाज्य होगी।

उदा. 1: 3245682 : $S_1 = 3 + 4 + 6 + 2 = 15$

$S_2 = 2 + 5 + 8 = 15$

$\because S_1 = S_2 \therefore$ संख्या 11 से विभाज्य है।

उदा. 2: 283712 : $S_1 = 2 + 3 + 1 = 6$

$S_2 = 8 + 7 + 2 = 17$

$S_1 \quad S_2 = 17 - 6 = 11$; जो कि 11 से विभाज्य है।

$\therefore$ संख्या भी 11 से विभाज्य है।

उदा. 3: 84927291658 ; $S_1 = 8 + 9 + 7 + 9 + 6 + 8 = 47$

$S_2 = 4 + 2 + 2 + 1 + 5 = 14$

$\because (S_1 - S_2 = 47 - 14) = 33$; जो कि 11 से विभाज्य है, इसलिए संख्या भी 11 से विभाज्य है।

12 से विभाज्यता

नियम: कोई भी संख्या यदि 3 एवं 4 दोनों से विभाज्य हो तो वह संख्या 12 से विभाज्य होगी।

yoursmartboob

इस प्रकार 12 से किसी संख्या की विभाज्यता के परीक्षण के लिए,

i) उस संख्या के अंतिम दो अंकों से निर्मित संख्या को 4 से विभाजित करें। यदि वह संख्या 4 से विभाज्य नहीं हुई तो दी गई संख्या भी 12 से विभाजित नहीं होगी। यदि वह संख्या 4 से विभाजित हो गई तो

ii) दी गई संख्या 3 से विभाज्य है कि नहीं, इस बात की जाँच करें।

उदा. 1: 135792 : 92, 4 से विभाज्य है

$1+3+5+7-9+2=27$ भी 3 से विभाज्य है, इसलिए प्रदत्त संख्या भी 12 से विभाज्य है।

नोट: 'आंकिक योगफल' निकालने की विधि को याद कीजिए। पहले अध्याय में आपने इसका अभ्यास किया है। वहाँ आपने सीखा था '9 को भुला देने का नियम'। यहाँ भी वैसा ही कीजिए। उदाहरण के लिए, 135792 का आंकिक योगफल:

$1+3+5(-9)$ [इसे भूलिए] $7+2-9$ [भूल जाइए] इस प्रकार अंततः हमें कुछ नहीं मिला। इस प्रकार जहाँ आंकिक योगफल निकालने के सिलसिले में अंततः कुछ हाथ नहीं लगता हो, वह संख्या 9 का अपवर्त्य होगी। इस प्रकार वह संख्या 9 से विभाज्य होगी।

13 से विभाज्यता

13 के लिए Osculator है 4 (नोट देखिए)। लेकिन यहाँ हमारा Osculator ऋणात्मक नहीं है (जैसा कि 7 के संदर्भ में था)। यह 'one-more' Osculator है। इसलिए यहाँ कार्यप्रणाली भी भिन्न होगी। इसे निम्नलिखित उदाहरण में देखा जा सकता है।

उदा. 1: क्या 143, 13 से विभाज्य है?

हल: $\underline{14}\,\underline{3} = 14 + 3 \times 4 = 26$

$\because$ 26, 13 से विभाज्य है, इसलिए 143 भी 13 से विभाज्य होगी।

अथवा,

उपर्युक्त विधि को निम्न रूप में सरलीकृत किया जा सकता है।

पहला चरण: 1 4 3

16 [4 × 3 (143 से) + 4 (143 से)]

दूसरा चरण: 1 4 3

26 / 16 [4 × 6 (16 से) + 1 (16 से) + 1 (143 से) = 26]

$\because$ 26, 13 से विभाज्य है, इसलिए संख्या भी 13 से विभाज्य है।

नोट: दूसरी विधि न केवल सिस्टेमेटिक (systematic) है, बल्कि अपेक्षाकृत संक्षिप्त भी।

उदा. 2: क्या 24167, 13 से विभाज्य है?

हल: 2 4 1 6 7

26 / 6 / 20 / 34 [4 × 7 (24167 से) + 6 (24167 से) − 34]

[4 × 4 (34 से) + 3 (34 से) + 1 (24167 से) = 20]

[4 × 0 (20 से) + 2 (20 से) + 4 (24167 से) = 6]

[4 × 6 (6 से) − 2 (24167 से) − 26]

$\because$ 26, 13 से विभाज्य है, इसलिए दी गई संख्या भी 13 से विभाज्य होगी।

yourmanhoob

नोट: यदि आप उपरोक्त प्रणाली को नहीं समझ सके हों तो एक बार फिर से प्रत्येक चरण का मनोयोगपूर्वक अध्ययन कीजिए। यह विधि न केवल सरल है बल्कि सिद्ध-सिद्धांत भी।

उदा. 3: 6944808 की 13 से विभाज्यता की जाँच कीजिए।

हल: 6944808

39/18/12/41/19/32

$4 \times 8 + 0 = 32$

$4 \times 2 + 3 + 8 = 19$

$4 \times 9 + 1 + 4 = 41$

$4 \times 1 + 4 + 4 = 12$

$4 \times 2 + 1 + 9 = 18$

$4 \times 8 + 1 + 6 = 39$

चूँकि 39, 13 से विभाज्य है, इसलिए प्रदत्त संख्या भी 13 से विभाज्य होगी।

नोट: 1) यह विधि केवल 'one more' osculator के संदर्भ में ही लागू होता है। इसलिए 7 के संदर्भ में यह लागू नहीं हो सकता।

2) यह विधि एक पंक्ति में सिमट जाती है। परीक्षा में विभिन्न चरणों को लिखने की कोई आवश्यकता नहीं है। यहाँ चरणों का इस्तेमाल केवल इसलिए किया गया है ताकि आप हल को भली-भाँति समझ सकें।

14 से विभाज्यता

नियम: कोई भी संख्या, जो 2 एवं 7 दोनों से विभाज्य हो, वह 14 से भी विभाज्य होगी। दूसरे शब्दों में यदि किसी संख्या का आखिरी अंक सम [even] हो साथ ही वह संख्या 7 से विभाज्य भी हो तो प्रदत्त संख्या 14 से विभाज्य होगी।

15 से विभाज्यता

यदि कोई संख्या जो 3 एवं 5 दोनों से विभाज्य हो तो वह 15 से भी विभाज्य होगी।

16 से विभाज्यता

कोई भी संख्या, जिसके अंतिम चारों अंकों से निर्मित संख्या 16 से विभाज्य हो, वह संख्या भी 16 से विभाज्य होगी।

17 से विभाज्यता

17 के लिए ऋणात्मक osculator 5 है (नोट देखें)। इसकी क्रियाविधि ठीक वैसी ही है, जैसी 7 के संदर्भ में।

उदा. 1: क्या 1904, 17 से विभाज्य है?

हल: $1904 : 190 - 5 \times 4 = 170$

चूँकि 170, 17 से विभाज्य है इसलिए प्रदत्त संख्या भी 17 से विभाज्य होगी।

नोट: पाठकों को सलाह दी जाती है कि दायें पक्ष की संख्या के 17 से विभाज्य होने का पता क्यों हो चले, गणना करना बंद कर दें। इससे समय की बर्बादी नहीं होगी।

yoursmahboob

उदा. 2: 957508:

95750 8 : 95750 − 5 × 8 = 95710

9571 0 : 9571 − 5 × 0 = 9571

957 1 : 957 − 5 × 1 = 952

75 2 : 95 − 5 × 2 = 85

चूँकि 85, 17 से विभाज्य है। इसलिए प्रदत्त संख्या भी 17 से विभाज्य होगी।

उदा. 3: 8971563:

897156 3 : 897156 − 5 × 3 = 897141

89714 1 : 89714 − 5 × 1 = 89709

8970 9 : 8970 − 5 × 9 = 8925

892 5 : 892 − 5 × 5 = 867

86 7 : 86 − 5 × 7 = 51

चूँकि 51, 17 से विभाज्य है। इसलिए प्रदत्त संख्या भी 17 से विभाज्य होगी।

18 से विभाज्यता

नियम: कोई भी संख्या जो 9 से विभाज्य हो एवं जिसका आखिरी अंक (इकाई का अंक) सम (even) या '0' हो, वह 18 से विभाज्य होगी।

उदा. 1. 926568 : आंकिक योगफल 9 का अपवर्त्य है (अर्थात् 9 से विभाज्य है) तथा इकाई का अंक (8) सम संख्या है, इसलिए संख्या 18 से विभाज्य होगी।

उदा. 2. 273690 : आंकिक योगफल 9 का अपवर्त्य है और संख्या के अंत में शून्य भी है। इसलिए यह संख्या 18 से विभाज्य है।

नोट: आंकिक योगफल की गणना के क्रम में '9 के भूलिए' विधि का इस्तेमाल करना न भूलें। और यदि आंकिक योगफल शून्य हो तो वह संख्या 9 से विभाज्य होगी।

19 से विभाज्यता

आपको स्मरण होगा कि 19 का "one more" osculator 2 है। यह 'विधि '13 से विभाज्यता' के अनुरूप है और आप इस विधि से भली भाँति परिचित भी हैं। एक उदाहरण लीजिए

उदा. 1: 149264

हल: 1 4 9 2 6 4

19/9/12/11/14

इसलिए प्रदत्त संख्या 19 से विभाज्य है।

नोट: उम्मीद है आपने क्रियाविधि समझ ली होगी। यदि नहीं तो '13 से विभाज्यता' देखें

yoursmahboob

वर्ग निकालने की विधि

(Squaring)

गणितीय गणना के क्रम में प्रायः वर्ग निकालना पड़ता है। खास खास परिस्थितियों के लिए विशेष नियम भी बनाए गए हैं। लेकिन हम यहाँ वर्ग निकालने के सामान्य नियम की चर्चा करेंगे, जो सामान्य रूप से सभी परिस्थितियों पर प्रभावी है।

यह विधि डुपलेक्स कॉम्बिनेशन प्रॉसेस (Duplex Combination Process) से गहरा संबंध रखती है, तथा वर्गमूल निकालने की प्रक्रिया में भी इसका बखूबी इस्तेमाल होता है। आइए इस विधि का संक्षिप्त अध्ययन करें।

1. डुपलेक्स कॉम्बिनेशन प्रॉसेस (Duplex Combination Process)

पहली विधि 'वर्ग निकालने' के 'द्वारा' (squaring) है एवं दूसरी 'वज्र-गुणन' (cross-multiplication) के द्वारा। प्रस्तुत संदर्भ में इसका इस्तेमाल दोनों रूपों में [a^2 एवं $2ab$] किया जाएगा।

एकल केंद्रीय अंक की स्थिति में इसका मतलब होता है, वर्ग निकालना एवं दो अंकों वाली संख्या की स्थिति में इसका मतलब होता है वज्र गुणन का दुगुना। कुछ एक उदाहरणों के सहारे इसे समझा जा सकता है।

उदा. 1: 2 के लिए डुप्लेक्स (D) $= 2^2 = 4$

उदा. 2: 8 के लिए $D = 8^2 = 64$

उदा. 3: 34 के लिए $D = 2 \times (3 \times 4) = 24$

उदा. 4: 79 के लिए $D = 2 \times (7 \times 9) = 126$

उदा. 5: 103 के लिए $D = 2(1 \times 3) \times 0^2 = 6$

उदा. 6: 146 के लिए $D = 2(3 \times 6) + 4^2 = 52$

उदा. 7: 096 के लिए $D = 2(0 \times 6) + 9^2 = 81$

उदा. 8: 1342 के लिए $D = 2(1 \times 2) + 2(3 \times 4) = 28$

उदा. 9: 7358 के लिए $D = 2(7 \times 8) + 2(3 \times 5) = 142$

उदा. 10: 23564 के लिए $D = 2(2 \times 4) + 2(3 \times 6) + 5^2 = 77$

उदा. 11: 123456 के लिए $D = 2(1 \times 6) + 2(2 \times 5) + 2(3 \times 4) = 56$

अब हम निम्नलिखित उदाहरणों के सहारे वर्ग निकालना सीखेंगे।

उदा. 1: $207^2 = ?$

हल:

$2^2 / 2(2 \times 0) / 2(2 \times 7) + 0^2 / 2(0 \times 7) / 7^2$

$= 4 / 0 / 28 / 0 / 49$

$= 4 / 0 / 2^8 / 0 / 4^9$

$= 4 / 0 - 2 / 8 / 0 + 4 / 9$

$= 42849$

youtmahboob

यदि आप 'सुपलेक्स विधि' एवं वर्ग निकालने में इसके उपयोग की प्रक्रिया को अच्छी तरह समझ गए हैं तो उत्तर तक बस एक पंक्ति में पहुँच सकते हैं।

उदाहरण के लिए $207^2 = 42_2 84_4 9$

व्याख्या: 1. अंतिम संख्या 7 का वर्ग निकालें। 9 लिख दें एवं 4 के साथ आगे बढ़ें।

2. $2 \times 0 \times 7 + 4$ (जो शेष बचा था) $= 4$, इसे दहाई के स्थान पर लिख दें।

3. $2 \times 2 \times 7 + 0^2 = 28$; 8 लिख दें एवं 2 के साथ आगे बढ़ें।

4. $2 \times 2 \times 0 + 2$ (शेष) $= 2$; इसे लिख दें।

5. $2^2 = 4$; इसे लिख दें।

नोट: 1) यदि किसी संख्या में n अंक हों तो उसके वर्ग में या तो 2n अंक होंगे या (2n − 1) अंक होंगे।

2) अंकों की भागीदारी गुणा की क्रिया के अनुरूप ही क्रमबद्ध रूप में होती है।

उदा. 2: $(897)^2 = 80_{16}4_{20}6_{13}0_4 9 = 804609$

व्याख्या: 1. $7^2 = 49$; 9 लिख दें एवं 4 के साथ आगे बढ़ें.

2. $2 \times 9 \times 7 + 4$ (जो शेष बचा था) $= 130$, शून्य लिख दें एवं 13 के साथ आगे बढ़ें।

3. $2 \times 8 \times 7 + 9^2 + 13 = 206$ [6 लिख दें एवं 20 के साथ आगे बढ़ें]

4. $2 \times 8 \times 9 + 20 = 164$; 4 लिख दें एवं 16 के साथ आगे बढ़ें।

5. $8^2 + 16 = 80$; इसे लिख दें।

उदा. 3: $(1432)^2 = 2_1 0_2 5_3 0_2 6_1 24 = 2050624$

व्याख्या: 1. $2^2 = 4$; इसे लिख दें।

2. $2 \times (3 \times 2) = 12$; इसे लिख दें एवं 1 के साथ आगे बढ़ें।

3. $2 \times (4 \times 2) + 3^2 + 1 = 26$; 6 लिख दें एवं 2 को लेकर आगे बढ़ें।

4. $2(1 \times 2) + 2(4 \times 3) + 2 = 30$; '0' लिख दें एवं 3 के साथ आगे बढ़ें।

5. $2(1 \times 3) + 4^2 + 3 = 25$; 5 लिख दें एवं 2 के साथ आगे बढ़ें।

6. $2(1 \times 4) + 2 = 10$; '0' लिख दें एवं 1 के साथ आगे बढ़ें

7. $1^2 + 1 = 2$; इसे लिख दें।

उदा. 4: $(73214)^2 = 53_4 6_4 0_3 2_6 8_2 9_1 79_1 6 = 5360289796$

उदा. 5: $(5432819)^2 = 29_{45} 51_5 5_{11} 5_{10} 2_{16} 2_{12} 2_{12} 8_6 6_{12} 7_2 6_8 1$
$= 29515522286761$

yoursmahboob

अभ्यास प्रश्न

नीचे दी गई संख्याओं का वर्ग निकालें :

1) 835 2) 8432 3) 45321
4) 530026 5) 73010932

उत्तर :

1) 697225 2) 7109824 3) 2053993041
4) 280927560676 5) 5330596191508624

नोट: किसी भिन्न (दशमलव युक्त) संख्या का वर्ग निकालने के लिए दशमलव को नजरंदाज करके दी गई संख्या का वर्ग निकाल लें। गणना के उपरान्त हम प्रश्न में दी गई संख्या में दशमलव के बाद स्थित अंकों की संख्या गिनते हैं। वर्ग से प्राप्त संख्या में दशमलव उससे दुगुने अंकों के बाद डाल देते हैं।

उदा. $(12.46)^2 = 15_1 5_3 2_4 5_5 1_3 6 = 155.2516$

गणना की जाँच: वर्गफल की जाँच के लिए आंकिक योगफल की विधि का ही सहारा लिया जाता है। उदाहरण के लिए:

उदा. 1: $(207)^2 = 42849$

आंकिक योगफल: $0^2 = 0^2$

इसलिए हमारी गणना सही है।

उदा. 2: $(897)^2 = 804609$

आंकिक योगफल: $6^2 = 18$

या, $36 = 18$

या, $0 = 0$

इसलिए हमारी गणना सही है।

उदा. 3: $(1432)^2 = 2050624$

आंकिक योगफल : $1^2 = 1$

या, $1 = 1$

इसलिए हमारी गणना सही है।

नोट: 1) आंकिक योगफल निकालने के क्रम में 'नौ को भूलिए' वाले नियम का पालन करें।
2) समस्त गणनाओं की मानसिक जाँच कर लें।
3) उदा. 4 एवं उदा. 5 में की गई गणना की शुद्धता को बिना कलम के इस्तेमाल के जाँच लें।

2. *ऐसी संख्याओं का वर्ग निकालना जिसमें अंकों की पुनरावृत्ति हुई हो:*

$(1)^2 = 1$

$(11)^2 = 121$

yoursmahboob

$(111)^2$ – 12321

$(1111)^2$ = 1234321

$(11111)^2$ – 123454321

....

....

व्याख्या : उपर्युक्त ट्रेंड (Trend) पर ध्यान दें। इसके सहारे हम दी हुई संख्याओं का वर्ग आसानी से निम्नलिखित तरीके से निकाल सकते हैं :

चरण I : सर्वप्रथम प्रदत्त संख्या में अंक 1 की संख्या का पता लगाएँ।

चरण II : 1 से प्रारंभ करते हुए उन सभी प्राकृतिक संख्याओं (natural numbers) को लिखें जितनी बार प्रदत्त संख्या में अंक 1 आया है।

उदाहरण के लिए, यदि प्रदत्त संख्या 11111 हो जिसका वर्ग निकालना है तो हमें 1 से 5 तक के सभी प्राकृतिक संख्याओं को लिखना होगा (क्योंकि प्रदत्त संख्या में अंक 1 की संख्या 5 है।)

चरण III : इसके बाद प्राकृतिक संख्याओं को अवरोही क्रम (descending order) में 1 तक लिखते हैं। नोट : यह ट्रेंड (Trend) केवल संख्या (111111111) तक ही लागू होता है।

उदा. 1: $\sqrt{123456765432 1}$ का मान निकालें।

हल: हम देखते हैं कि प्राकृतिक संख्याएँ 1 से 7 तक लगातार लिखी हुई हैं। 7 के बाद उन संख्याओं का अवरोही क्रम प्रारंभ हो जाता है इसलिए अभीष्ट संख्या 7 अंकों की होगी, अर्थात् (1111111) यही उत्तर होगा।

उदा. 2: $(6666)^2$ का मान ज्ञात करें।

हल: 6666 $= 6 \times 1111$

$\therefore (6666)^2 = 36 \times (1111)^2$

अब हम $(1111)^2$ का मान उपर्युक्त विधि से ज्ञात करेंगे।

चरण I : $(1111)^2$ में अंक 1 की संख्या 4 है।

चरण II : यहाँ पर 4 के बाद अवरोही क्रम में प्राकृतिक संख्याओं को लिखते हैं।

अर्थात् संख्या = 1234321

$\therefore$ अभीष्ट उत्तर $= 36 \times 1234321 = 44435556$

उदा. 3: $(7777)^2$ का मान निकालें।

हल: $(7777)^2 = (7 \times 1111)^2 = 1234321 \times 49 = 60481729$

yoursmahboob

वर्गमूल
(Square Root)

वर्गमूल निकालने की विधि भाग देने की विधि से बहुत कुछ मिलती-जुलती है। वर्गमूल निकालने की प्रक्रिया में 'डुप्लेक्स विधि' का भी इस्तेमाल किया जाता है। इसलिए आप डुप्लेक्स विधि का एक बार फिर अध्ययन कर लें। वर्गमूल निकालने का अभ्यास शुरू करने से पहले वर्गमूल से संबंद्ध मूलभूत बातें जान लेना उचित रहेगा।

1. प्रदत्त संख्या के दायें से बायें ओर के क्रम में जोड़ा में सजाते हैं और अंततः यदि अकेली संख्या बच जाए तो उसे अपने आप में एक जोड़ा मान लिया जाता है।
2. किसी संख्या के वर्गमूल में अंकों की संख्या उतनी ही होगी, प्रदत्त संख्या में जितने जोड़े बने हैं (इसमें अकेली बची संख्या को भी जोड़ा मान लिया गया है)। इस प्रकार 25 को एक जोड़ा माना जाएगा, 1 60 को दो जोड़े, 10 24 को भी दो जोड़ा ही मान जाएगा।
3. यदि वर्गमूल में अंकों की संख्या 'n' हो, तो वर्गफल में 2n या 2n – 1 अंक होंगे। इसका विपरीत भी सही है। यदि प्रदत्त संख्या में n अंक हों तो वर्गमूल में $\frac{n}{2}$ या $\frac{n+1}{2}$ अंक होंगे।
4. विशुद्ध रूप से दशमलव वाले अंकों में वर्गमूल की तुलना में वर्गफल में अंकों की संख्या ठीक दुगुनी होती है।
5. प्रथम 9 प्राकृत संख्याओं के वर्गफल 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81 हैं। इससे साफ जाहिर है कि

a) पूर्ण वर्गफल के अंत में 2, 3, 7, 8 कभी नहीं होंगे।

b) (i) यदि किसी पूर्ण वर्ग संख्या के अंत में 1 हो तो उसके वर्गमूल का अंतिम अंक या तो 1 होगा या 9(10 से परस्पर पूरक) होगा;

(ii) किसी वर्ग संख्या के अंत में 4 तभी होगा जब उसके वर्गमूल का अंतिम अंक या तो 2 हो या 8 (10 से पूरक) हो;

(iii) यदि किसी वर्ग संख्या के अंत में 5 या 10 हो तो उसके वर्गमूल का अंतिम अंक क्रमशः 5 या 0 होगा;

(iv) यदि किसी वर्ग संख्या के अंत में 6 हो तो उसके वर्गमूल का अंतिम अंक 4 या 6 होगा (10 से पूरक), और

(v) एक वर्ग संख्या के अंत में 9 तभी संभव है जब उसके वर्गमूल का अंतिम अंक 3 या 7 (10 से पूरक) हो।

संक्षेप में, यह कहा जा सकता है कि

(i) यदि किसी संख्या के अंत में 1, 5, 6 एवं 0 हो तो उसके वर्ग के अंत में भी ये अंक अवश्यंभावी होंगे।

yourmaiboob

(ii) 10 को एवं दो संख्याओं के वर्गफल के अंत में समान अंक होंगे। इस प्रकार 1^2 एवं 9^2, 2^2 एवं 8^2, 3^2 एवं 7^2, 4^2 एवं 6^2, 5^2 (एवं 5^2); एवं 0^2 तथा 10^2 के अंत में समान अंक (क्रमशः 1, 4, 9, 6, 5 एवं 0) होंगे।

(iii) किसी भी पूर्ण वर्ग के अंत में 2, 3, 7 एवं 8 नहीं होंगे।

वर्गमूल सिद्धांत के बारे में संक्षिप्त जानकारी प्राप्त करने के बाद आइए अब वर्गमूल निकालने की प्रक्रिया पर विचार करें।

पहला चरण: सर्वप्रथम प्रदत्त संख्या को दायीं से बायीं ओर के क्रम में जोड़ा में सजाते हैं।

दूसरा चरण: बायीं ओर से पहले जोड़े को एक उर्ध्वाधर रेखा खींचकर अलग कर लीजिए।

तीसरा चरण: वर्गमूल का आंकिक मान उत्तर वाली कतार में लिख दें।

उदाहरण:

उत्तर कतार	61	13 64
	7	

यहाँ 7 इसलिए लिखा गया है क्योंकि $8^2 (= 64)$, 61 से बड़ा है।

अन्य उदाहरण

	73	60 84
	8	

और

	8	56 78
	2	

यहाँ 8 एवं 2 इसलिए लिखे गए हैं क्योंकि $9^2 (= 81)$ 73 से बड़ा है एवं $3^2 (= 9)$ 8 से बड़ा है।

चौथा चरण: उत्तर के पहले अंक का दुगुना भाजक की जगह लिख दें। उदाहरण के लिए,

14	61	13 64
	7	

और

16	73	60 84
	8	

पाँचवाँ चरण: उत्तर के पहले अंक का दुगुना, वर्गमूल के लिए दी गई संख्या के पहले जोड़े में से घटाएँ एवं शेष को भाज्य के दूसरे जोड़े के साथ उपसर्ग के रूप में जोड़ दें उदाहरण के लिए,

6	11	,9 7 1 6
	3	

$11 - 3^2 = 2$, इसे 9 के उपसर्ग के रूप में लिख दिया गया है।

छठा चरण: अब हमारा भाज्य हुआ 29। इसमें से बिना कुछ घटाए हुए 6 से विभाजित करते हैं। भागफल 4 को नीचे लिखते हैं एवं शेष '5' को यथास्थान डाल देते हैं।

6	11	,9 ,7 1 6
	3	4

सातवाँ चरण: इस प्रकार हमारा अगला भाज्य हुआ 57। इसमें से $4^2 (= 16)$ घटाइए। शेष 4। हो सही भाज्य है। इसे 6 से विभाजित कीजिए। भागफल 6 एवं शेष 5 को यथास्थान डाल दीजिए।

yoursmahboob

6	11	9	7	1	6
	3	4	6		

आठवाँ चरण: हमारा चौथा भाज्य है 51। इसमें से 46 का डुप्लेक्स घटाते हैं। इस प्रकार हमें शेष मिलता है 51 - [2(4×6)] या 51 – 48 = 3। इसे 6 से विभाजित कीजिए तथा भागफल '0' एवं शेष '3' को यथास्थान लिख दीजिए।

6	11	9	7	1	6
	3	4	6.	0	

नौवाँ चरण: इस प्रकार हमें अंतिम भाज्य संख्या 36 मिलता है। इसमें से 460 का डुप्लेक्स $\left(2\times4\times0+6^2=36\right)$ घटाइए। 36 – 36 = 0: इसमें '0' से भाग देने पर भागफल एवं शेष दोनों '0' प्राप्त हुआ।

6	11	9	7	1	6	0
	3	4	6.	0	0	

नोट: 1. चूँकि 119716 में 6 अंक हैं इसलिए इसके वर्गमूल में 3 अंक होंगे. इसलिए हम दाहिनी ओर से तीन अंकों के बाद दशमलव डाल देते हैं।

2. एक पूर्ण वर्ग के लिए यदि वर्गमूल निकालने की प्रक्रिया को दशमलव वाले हिस्से तक जारी रखा जाए तो न केवल भागफल '0' मिलता है बल्कि शेष भी '0' ही प्राप्त होता है।

कुछ और उदाहरण लीजिए

उदा. 1: $\sqrt{529}$:

4	5	2	9	0
	2	3.0		= 23

चूँकि प्रदत्त संख्या में 3 अंक हैं। इसलिए वर्गमूल में $\frac{3-1}{2}=2$ संख्याएँ होंगी। इसलिए दो अंक के बाद दशमलव डाल दें।

उदा. 2: $\sqrt{4096}$:

12	40	9	6	0	
	6	4.	0		= 64

उदा. 3: $\sqrt{16384}$:

2	1	$_0$6	$_2$3	$_2$8	$_6$4	0
	1	2	8.	0	0	

यह उदाहरण जरा भिन्न किस्म का है। इसलिए इसकी व्याख्या करना जरूरी है। कम-से कम

2	1	$_0$6	3	8	4
	1				

तक दुविधा नहीं होनी चाहिए। अब हमारा भाज्य है 6। यदि इसे 2 से विभाजित करें, तो

yourshabood

हमें भागफल मिलेगा '3' एवं शेष बचेगा '0'। ऐसी स्थिति में हमारा भाज्य होगा 9, जिसमें से $3^2(=9)$ घटाने पर ऋणात्मक संख्या प्राप्त होती है। इस प्रकार हम एक अनिर्णित लक्ष्य की ओर बढ़ते जाते हैं। ऐसी ही परिस्थिति तब भी उत्पन्न होती है जब हमें $(23-2^2=)19$ वास्तविक भाज्य के रूप में प्राप्त होता है। अब इसे 2 से विभाजित किया जाए तो भागफल मिलता है '9' एवं शेष बचता है '1'। ठीक ऐसी ही परिस्थिति तब भी आ जाती है, जब हमें वास्तविक भाज्य के रूप में $(38-2\times2\times8=)$ 6 मिलता है। (इसे स्वयं सरल करने की कोशिश करें।)

उदा. 4: $\sqrt{53163214}$

14	53	61	66	31	62	21	14	
	7	2	9	1.	3	1	....	(अपूर्ण)

उदा. 5: $\sqrt{738915489}$

4	7	38	89	91	54	84	89		
	2	7	1	8	3.	0	0	0	0

उदा. 6: $\sqrt{732108}$ (दशमलव के तीन स्थानों तक)

16	73	21	10	08	5	
	8	5	5.	6	3	3

उदा. 7: $\sqrt{.00092401 60}$ (दशमलव के छः स्थानों तक)

6	.00	09	24	01	60			
	.0	3	0	3	9	7	6	

नोट: 1. ध्यान दीजिए, गणनात्मक कार्यों के लिए अंकों का पहला जोड़ा '09' है न कि '00'

2. यदि आपको दशमलव के छः अंकों तक गणना के लिए कहा जाए तो बेहतर होगा यदि आप सातवें अंक की भी गणना कर लें, इससे गणना की व्यवहार्यता (viability) का पता लग जाता है।

उदा. 8: $\sqrt{27}$ (दशमलव के छः अंकों तक)

हल:

10	27	00	00	00	00	00	00	
	5.	1	9	6	1	5	2	4

उत्तर – 5.1961524

उदा. 9: 0.000000831 का वर्गमूल दशमलव के 8 अंकों तक निकालें।

हल:

18	.000000	83	10	00	00	00	00	
	.0	0	0	9	1	1	5	9 2

उत्तर – .00091159

अभ्यास प्रश्न

1) उदा: 4, 5, 6, 7, 8, 9 को स्वयं सरल करें।

yoursmahboob

घन

(Cube)

विशाल संख्याओं के घन उतने प्रचलित नहीं हैं। गणितीय आकलनों के दौरान कभी कभी हमलोगों को दो अंकों वाली संख्या का घन निकालने की जरूरत पड़ती है इसलिए यहाँ 2 अंकों वाली संख्या के घन निकालने की विधि पर ही विचार किया जा रहा है। इस प्रक्रिया में, प्रथम दस प्राकृत संख्याओं के घन मानों का उपयोग किया जाता है। पाठकों को सलाह दी जाती है कि वे प्रथम दस प्राकृत संख्याओं के घन का मान याद रखें।

$1^3 = 1$, $2^3 = 8$, $3^3 = 27$, $4^3 = 64$, $5^3 = 125$,

$6^3 = 216$, $7^3 = 343$, $8^3 = 512$, $9^3 = 729$ एवं

$10^3 = 1000$.

दो अंकों वाली संख्या का घन-मान निकालना

पहला चरण: सर्वप्रथम दहाई के स्थान पर स्थित अंक का घन मान लिख लें। यह 4 अंकों वाली संख्या का पहला अंक होगा। इस 4 अंकों वाली संख्या के अन्य तीन अंक क्रमशः-क्रमशः में ज्यामितीय अनुपात में लिखा जाता है और यह अनुपात दी हुई संख्या के दोनों अंकों के बीच स्थित समानुपात के अनुरूप होगा।

दूसरा चरण: इस चरण के अन्तर्गत उपर्युक्त 4 अंकों वाली संख्या के दूसरे एवं तीसरे अंकों के नीचे उनका दुगुना लिखकर जोड़ देना है।

उदा. *1:* $12^3 = ?$

हल: ***पहला चरण:*** यहाँ दहाई के स्थान पर स्थित संख्या 1 है। 1 का घनफल है $1^3 = 1$। इसलिए चार अंकों वाली संख्या का पहला अंक हुआ 1। 12 में, 1 एवं 2 के बीच का अनुपात है 1:2; इसलिए अन्य संख्याएँ अपने पूर्ववर्ती अंकों की अपेक्षा दुगुनी होंगी। इस प्रकार पहले चरण का परिणाम हुआ: 1 2 4 8

दूसरा चरण: उपर्युक्त 4 अंकों वाली संख्या में (दायीं ओर से दूसरे एवं तीसरे स्थानों पर क्रमशः 4 एवं 2 स्थित है। इसलिए 4 के नीचे (4 का दुगुना 8) एवं 2 के नीचे (2 का दुगुना 4) लिख देते हैं। फिर दोनों पंक्तियों को जोड़ दिया जाता है।

```
1 2 4 8
  4 8
-------
1 7 2 8 = 1728
```

उदा. *2:* $11^3 = ?$ (इसे स्वयं सरल करें)

उदा. *3:* $16^3 = ?$

हल:

```
1  6  36  216
  12  72
-----------
4  0  9  6 = 4096
```

yoursmahab

व्याख्या: 1^3 (16 का 1) = 1, इसलिए पहली पंक्ति का पहला अंक हुआ 1। 16 के अंक परस्पर 1:6 के अनुपात में हैं। इसलिए 4 अंकों वाली संख्या के अन्य अंक क्रमशः 1 × 6 = 6; 6 × 6 = 36; 36 × 6 = 216; होंगे। दूसरी पंक्ति में दूसरे एवं तीसरे स्थान पर स्थित अंकों का दुगुना लिखा जाता है। तीसरी पंक्ति में अंतिम कॉलम के अतिरिक्त अन्य सभी कॉलम के नीचे केवल एक संख्या लिखनी होती है। इसलिए इकाई का अंक लिखने के बाद, हम शेष को क्रमशः बायीं ओर स्थित कॉलम के साथ जोड़ते जाते हैं। यहाँ,

i) 216 का 6 लिख दें एवं शेष 21 के साथ आगे बढ़ें;

ii) 36 + 72 + 21 (शेष) = 129; 9 लिख दें एवं 12 के साथ आगे बढ़ें।

iii) 6 + 12 + 12 (शेष) = 30; 0 लिख दें एवं 3 के साथ आगे बढ़ें।

iv) 1 + 3 (शेष) = 4; 4 यथास्थान लिख दें।

उदा. 4: $18^3 = ?$

हल:

1 8 64 512
16 128
5 8 3 2 = 5832

i) 2 लिख दें एवं 512 के 51 को साथ लेकर आगे बढ़ें।

ii) 64 + 128 + 51 = 243; 3 लिख दें एवं 24 के साथ आगे बढ़ें।

iii) 8 + 16 + 24 = 48; 8 लिख दें एवं 4 के साथ आगे बढ़ें।

iv) 1 + 4 = 5; इसे यथास्थान लिख दें।

उदा. 5: $17^3 = ?$ (इसे स्वयं सरल कीजिए।)

उदा. 6: $19^3 = ?$ (इसे स्वयं सरल करें।)

उदा. 7: $21^3 = ?$

हल:

8 4 2 1 [$8 = 2^3$, $8 \div 2 = 4$, $4 \div 2 = 2$, $2 \div 2 = 1$, चूँकि अनुपात 2:1 का है।]

8 4 [$4 \times 2 = 8$; $2 \times 2 = 4$; क्योंकि दूसरी पंक्ति में दुगुना लिखने का विधान है।]

9 2 6 1 = 9261

क्या आपको फर्क पता चला? यदि नहीं तो निम्नलिखित व्याख्या पढ़िए:

पहला चरण: i) $2^3 = 8$ .... पहली पंक्ति का (बायीं ओर से) पहला अंक

ii) दोनों अंकों का अनुपात 2 : 1 है, इसलिए अगली संख्या पूर्ववर्ती संख्या की तुलना में आधी हो जाएगी। इसलिए पहली पंक्ति की अगली तीनों संख्याएँ क्रमशः 4, 2 एवं 1 होंगी।

दूसरा चरण: इस चरण में कुछ भी नया नहीं है।

yoursmahboob

उदा. 8: $23^3 = ?$

हल:

8	12	18	27
	24	36	
12	1	6	7 = 12167

व्याख्या: **पहला चरण:** i) $2^3 = 8$ .... पहली पंक्ति का (बायीं ओर से) पहला अंक

ii) $2 : 3 \Rightarrow$ अगला अंक अपने पूर्ववर्ती अंकों का क्रमशः 3/2 होना चाहिए। इसलिए हमें

$8 \times \frac{3}{2} = 12,\ 12 \times \frac{3}{2} = 18,\ 18 \times \frac{3}{2} = 27$ प्राप्त होता है।

उदा. 9: $33^3 = ?$

हल:

27	27	27	27
	54	54	
35	9	3	7 = 35937

व्याख्या: **पहला चरण:** i) $3^3 = 27$ .... पहली पंक्ति का पहला अंक

ii) $3 : 3 = 1 : 1 \Rightarrow$ इसलिए अगली संख्याएँ पूर्ववत होंगी।

उदा. 10: $34^3 = ?$

हल:

27	36	48	64
	72	96	
39	3	0	4 = 39304

व्याख्या:

i) $3^3 = 27$ .... पहली पंक्ति की (बायीं ओर से) पहली संख्या

ii) चूँकि यहाँ 3:4 का अनुपात है, इसलिए अगले अंक अपने पूर्ववर्ती अंकों का $\frac{4}{3}$ होंगे।

यहाँ ये अंक हैं: $27 \times \frac{4}{3} = 36$; $36 \times \frac{4}{3} = 48$ एवं $48 \times \frac{4}{3} = 64$

उदा. 11: $93^3 = ?$

हल:

729	243	81	27
	486	162	
804	3	5	7 = 804357

व्याख्या:

i) $9^3 = 729$ .... पहली पंक्ति का (बायीं ओर से) पहला अंक

ii) $9 : 3 \Rightarrow 3 : 1 \Rightarrow$ अगले अंक अपने पूर्ववर्ती अंकों का 1:3 होने चाहिए।

उदा. 12: $97^3 = ?$

हल:

729	567	441	343
	1134	882	
912	16	17	3 = 912673

yoursmahboob

व्याख्या:

i) $9^3 = 729$ .... पहली पंक्ति का (बायीं ओर से) पहला अंक

ii) यहाँ दी गई संख्या के बीच अंकों का अनुपात है 9:7 ⇒ अगले अंक अपने पूर्ववर्ती अंकों का 7/9 होने चाहिए। यहाँ वे अंक हैं :

$$729 \times \frac{7}{9} = 567, \quad 567 \times \frac{7}{9} = 441, \quad 441 \times \frac{7}{9} = 343$$

उपर्युक्त विधि की व्याख्या : (यह हमें और अधिक द्रुत विधियों की तरफ ले जाता है)

किसी भी दो अंकों की संख्या को $10x+y$ के रूप में व्यक्त किया जा सकता है।

अब,

$$(10x + y)^3 = 10^3x^3 + 3(10)^2x^2y + 3(10)xy^2 + y^3$$

$$= 1000x^3 + 100(3x^2y) + 10(3xy^2) + y^3$$

उपरोक्त विस्तार से हमें चार भाग प्राप्त होते हैं। सबसे बाईं ओर का भाग ($1000x^3$) के अंत में तीन शून्य है। उसी प्रकार, दूसरे भाग में दो शून्य हैं तथा तीसरे भाग में 1 शून्य।

इसका तात्पर्य है कि पहला भाग दूसरे भाग के लिए तीन स्थानों को छोड़ देता है। इसी प्रकार दूसरा भाग अन्य भागों के लिए दो स्थानों को छोड़ देता है तथा तीसरा भाग अंतिम भाग के लिए एक स्थान को छोड़ देता है। आप इसे और अच्छी तरह से एक उदाहरण के सहारे समझ सकते हैं :

माना कि हमें $(23)^3$ ज्ञात करना है :

अब, $(23)^3 = (20+3)^3 = 20^3 + 3(20)^2(3) + 3(20)(3)^2 + (3)^3$

$$= 2^3 \times 1000 + 3(2)^2(3) \times 100 + 3(2)(3)^2 \times 10 + (3)^3$$

$$= 8000 + 36 \times 100 + 54 \times 10 + 27$$

⇒ उत्तर निम्नलिखित रूप में है :

$$\begin{array}{lllll} & 8 & - & - & - \\ + & & 36 & - & - \\ - & & & 54 & \\ + & & & & 27 \end{array}$$

$$\Rightarrow \underline{8} \quad \underline{(36)} \quad \underline{(54)} \quad \underline{(27)}$$

$$\Rightarrow \underline{12} \quad \underline{1} \quad \underline{6} \quad \underline{7}$$

नोट : 27 के स्थान पर हमें केवल एक अंक अर्थात् 7 लिखना है तथा 2 को साथ दहाई स्थान पर आगे बढ़ते हैं। अब, दहाई स्थान पर हमें (54 + 2 =) 56 प्राप्त होता है। अतः, हम दहाई स्थान पर 6 लिखते हैं तथा 5 को साथ सैकड़ा स्थान पर आगे बढ़ते हैं, तथा इसी तरह आगे भी।

yoursmahboob

उपरोक्त व्याख्या का सारांश निम्नलिखित है :

$$(a-b)^3 = \underline{a^3} \quad \underline{3a^2b} \quad \underline{3ab^2} \quad \underline{b^3}$$

$$(23)^3 = \underline{2^3} \quad \underline{3(2)^2(3)} \quad \underline{3(2)(3)^2} \quad (3)^3$$

$$= \underline{8} \quad \underline{36} \quad \underline{54} \quad \underline{27}$$

$$= \underline{12} \quad \underline{1} \quad \underline{6} \quad \underline{7}$$

अब, हम इस स्थिति में पहुँच चुके हैं कि उत्तर के सीधे लिख सकते हैं, यदि हमें $(a-b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ कंठस्थ हो। हम सबसे दाईं ओर के स्थान से शुरू करके सबसे बाईं ओर के स्थान की तरफ बढ़ते हैं।

एक दूसरा उदाहरण लें:

$(21)^3 =$ __ __ __ 1 **चरण I :** $(1^3) = [1]$

__ 6 1 **चरण II :** $(3 \times 2 \times 1^1) = [6]$

__ 2 6 1 **चरण III :** $(3 \times 2^2 \times 1 =) \; [12]$

2 लिखकर 1 के साथ आगे बढ़ें

9 2 6 1 **चरण IV:** $2^3 = 8$; 8 + 1 (के साथ आगे बढ़े) = 9

सभी चरणों को एक चरण में संयोजित करने पर :

$$(34)^3 = 39 \quad \underline{3} \quad \underline{0} \quad \underline{4}$$

$$(25)^3 = \underline{15} \quad \underline{6} \quad \underline{2} \quad \underline{5}$$

$$(52)^3 = \underline{140} \quad \underline{6} \quad \underline{0} \quad \underline{8}$$

yoursmahboob

अभ्यास प्रश्न

प्रश्न: निम्नलिखित संख्याओं का घनफल प्राप्त करें :

1.17	2.26	3.77	4.32	5.41	6.43	7.49	8.51
9.53	10.55	11.57	12.64	13.67	14.69	15.73	16.77
17.88	18.92	19.95	20.99				

उत्तर:

1.4913	2.17576	3.19683	4.32768
5.68921	6.79507	7.117649	8.132651
9.148877	10.166375	11.185193	12.262144
13.300763	14.328509	15.389017	16.456533
17.681472	18.778688	19.857375	20.970299

नोट: 20, 30 एवं 40 के घनफल प्राप्त करने के लिए इस विधि का इस्तेमाल न करें। क्या आप किसी अन्य द्रुत विधि के विषय में सोच सकते हैं।

आंकिक योग विधि के सहारे घनफल की शुद्धता की जाँच:

उदा. 1: $12^3 = 1728$

आंकिक योग: $3^3 = 0$ $(7 - 2 - 9 \approx 9,\ 1 - 8 - 9 \approx 0)$

$0 = 0$; अतएव घनफल सही है।

उदा. 2: $16^3 = 4096$

आंकिक योग: $7^3 = 1$

या, $(49) \times 7 = 1$

या, $4 \times 7 = 1$

या, $28 = 1$

या, $1 = 1$; अतएव घनफल का मान सही है।

अभ्यास प्रश्न: उदा.-2 से उदा.-12 तक के सभी गणनाओं से प्राप्त परिणाम को जाँचने का प्रयास करें।

yoursmahboob

पूर्ण घनों के घनमूल
(Cube Roots of Exact Cubes)

इस अध्याय में हम पूर्ण घनफलों के घनमूल निकालने की द्रुत विधि पर विचार करेंगे। 6 अंकों तक की संख्या का घनमूल (इस विधि के सहारे) पलक झपकते निकाला जा सकता है। उत्तर प्राप्त करने के क्रम में आपको कुछ भी लिखने की जरूरत नहीं है, यह विधि पूरी तरह से निरीक्षण पर आधारित है। पर इस विधि की प्रक्रिया को जानने से पूर्व कुछ सुविदित सिद्धांतों की जानकारी आवश्यक है।

1) प्रथम 9 प्राकृत संख्याओं के घनफल हैं: 1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512 एवं 729. (इन्हें स्मरण रखें।)

2) फल देने की बात यह है कि इन सभी प्राकृत संख्याओं के घनफल के अंतिम अंक एक दूसरे से बकायदा भिन्न हैं। इसलिए यहाँ घनफल जैसे उलझन की कोई संभावना नहीं है।

3) इस प्रकार पूर्ण घनफलों के घनमूल का अंतिम अंक सुनिश्चित एवं स्पष्ट है
   i) यदि घनफल के अंत में 1 हो, तो घनमूल के अंत में भी 1 होगा;
   ii) यदि घनफल के अंत में 2 हो, तो घनमूल के अंत में 8 होगा।
   iii) यदि घनफल के अंत में 3 हो तो घनमूल के अंत में 7 होगा।
   iv) यदि घनफल के अंत में 4 हो तो घनमूल के अंत में भी 4 होगा।
   v) यदि घनफल के अंत में 5 हो तो घनमूल के अंत में भी 5 होगा।
   vi) यदि घनफल के अंत में 6 हो तो घनमूल के अंत में भी 6 होगा।
   vii) यदि घनफल के अंत में 7 हो तो घनमूल के अंत में 3 होगा।
   viii) यदि घनफल के अंत में 8 हो तो घनमूल के अंत में 2 होगा।
   ix) यदि घनफल के अंत में 9 हो तो घनमूल के अंत में भी 9 होगा।

4) दूसरे शब्दों में,
   i) 1, 4, 5, 6, 9 एवं शून्य घनफल के अंत में पुनः प्रकट हो जाते हैं, एवं
   ii) यदि घनफल के अंत में 2, 3, 7 एवं 8 हों तो घनमूल के अंत में 10 के संदर्भ में उनका पूरक प्रकट होता है।

5) किसी घनमूल में प्रकट होनेवाले अंकों की संख्या घनफल में अंकों के 3 अंकों वाले समूहों की संख्या के बराबर होता है। यदि अंत में केवल एक या दो संख्या बच जाए तो उसे भी एक समूह मान लिया जाता है। नीचे उदाहरण देखें।

6) घनमूल का (बायीं ओर से) पहला अंक घनफल में अंकों के पहले समूह से स्पष्ट हो जाता है।

7) इस प्रकार किसी पूर्ण घनफल के घनमूल निकालने वक्त हमारे पास 3 आँकड़े होते हैं। घनमूल में अंकों की संख्या तथा घनमूल का प्रथम एवं अंतिम अंक।

yoursmahboob

उदाहरण के लिए

उदा. 1: निम्नलिखित संख्याओं का घनमूल ज्ञात करें।

i) 1728 ii) 2744 iii) 3375 iv) 15625
v) 912673 vi) 35973 vii) 804357 viii) 13824

i) **पहला चरण:** दाहिनी ओर से 3 अंकों के समूह का निर्माण शुरू करें: 1 728

दूसरा चरण: चूँकि घनमूल में दो समूह हैं, इसलिए घनमूल में दो अंक होंगे। n = 2

तीसरा चरण: दाहिनी ओर वाले समूह का अंतिम अंक है 8; इसलिए घनमूल के अंत में 2 होगा।

चौथा चरण: बायीं ओर स्थित समूह (1) का घनमूल हुआ 1।

इस प्रकार n = 2, बायीं ओर स्थित अंक = 1

दाहिनी ओर स्थित अंक = 2

∴ संख्या = 12

ii) **पहला चरण:** 2 744

दूसरा चरण: चूँकि केवल दो समूह हैं, इसलिए, n = 2

तीसरा चरण: दायीं ओर स्थित समूह (744) के अंत में है 4, इसलिए दायीं अंक = 4

चौथा चरण: बायीं ओर स्थित समूह (2), 2^3 से कम है एवं 1^3 से अधिक। इसलिए बायीं अंक = 1

बायीं अंक 2 या इससे अधिक नहीं हो सकता (क्यों)? इसलिए घनमूल = 14

iii) 3 375, यहाँ n = 2, बायीं अंक = 5, दायीं अंक = 1 ∴ घनमूल = 15

iv) 15 625, यहाँ n = 2, बायीं अंक = 2 $(\because 3^3 > 15 > 2^3)$ दायीं अंक = 5

∴ घनमूल = 25

v) 912 671 : n = 2, बायीं अंक = 9 $[10^3 > 912 > 9^3]$ दायीं अंक = 7

∴ घनमूल = 97

vi), vii), viii) को स्वयं हल करें।

7, 8 एवं 9 अंकों वाली संख्याओं का घनमूल

यदि किसी घनफल में 7, 8 या 9 अंक हों तो उनके घनमूल में 3 अंक होंगे (क्योंकि यहाँ तीन शून्योंवाली संख्या के 3 समूह होंगे)। यहाँ घनमूल निकालने के लिए लिखित रूप में भी कुछ गणनाएँ करनी पड़ती हैं। यदि घनमूल के बाएँ, दाएँ एवं मध्यवर्ती अंकों को क्रमशः L, R एवं M से सूचित किया जाए तो उनके बीच एक संबंध पाया जाता है, जिसका हम गणना में उपयोग करते हैं।

उदाहरण के लिए

उदा. 1: 33076161 का घनमूल निकालें।

हल: अभीष्ट समूह होंगे: 33 076 161; यहाँ R = 1, L = 3 एवं n = 3

यदि M मालूम हो जाए तो घनमूल निकालते देर नहीं लगेगी।

पहला चरण: प्रदत्त संख्या में से R^3 घटाएँ एवं घटाने के बाद शेष बची संख्या का अंतिम अंक (0) नजरंदाज कर दें

yoursmahboob

$$\frac{33\,076\,161}{33\,076\,16} \quad [\text{चूँकि } R^3 = 1^3 = 1]$$

दूसरा चरण: घनमूल का मध्यवर्ती अंक – $3R^2M$

$3R^2M = 3 \times 1^2 \times M = 3M$

ऐसा अनुमान किया जाता है कि $3R^2M$, 3307616 में शामिल होगा।

चूँकि $3R^2M = 3M$, 3307616 में अन्तर्निहित है, दोनों के अंत में समान अंक होने चाहिए 3307616 का अंतिम अंक है 6, इसलिए 3M के अंत में भी 6 होना चाहिए। इसलिए $M = 2$

इस प्रकार $L = 3, M = 2, R = 1$

इसलिए 33076161 का घनमूल हुआ 321

उदा. 2: 84604519 का घनमूल निकालें

हल: $n = 3, R = 9, L = 4, M = ?$

पहला चरण: प्रदत्त संख्या में से R^3 घटाएँ एवं शेष में से '0' को नजरंदाज कर दें

$$\frac{84604519}{\quad 729} \quad [R^3 = 729]$$
$$8460379$$

दूसरा चरण: $3R^2M = 3 \times 81 \times M = 243M$

चूँकि 8460379 के अंत में है 9; इसलिए $M = 3$ इस प्रकार $L = 4, M = 3$ एवं $R = 9$

$\therefore$ घनमूल = 439

उदा. 3: पूर्ण घनफल 248858189 का घनमूल ज्ञात करें।

हल: यहाँ $= n = 3, R = 9, L = 6, M = ?$

पहला चरण: $\frac{248858189}{\quad 729}$ [चूँकि $R^3 = 729$]
$$24885746$$

दूसरा चरण: $3R^2M = 3 \times 81 \times M = 243M$

चूँकि 24885746 के अंत में 6 है, इसलिए $M = 2$

$\therefore$ घनमूल = 629

उदा. 4: पूर्ण घनफल 143055667 का घनमूल निकालें।

हल: $L = 5, R = 3, n = 3, M = ?$

पहला चरण: $\frac{143055667}{\quad 27}$
$$14305564$$

yoursmahboob

दूसरा चरण: $3R^2M = 3 \times 9 \times M = 27M$

चूँकि 14105564 के अंत में 4 है इसलिए $M = 2$

$\therefore$ घनमूल हुआ 523

उदा. 5: पूर्ण घनफल 105823.817 का घनमूल निकालें।

हल: चूँकि प्रदत्त संख्या पूर्ण घनफल है, इसलिए घनमूल में 3 अंक होंगे एवं दायीं ओर से एक अंक के बाद दशमलव होगा। घनमूल निकालने के लिए दशमलव को नजरंदाज किया जा सकता है। L, R एवं M का मान निकालने के बाद दशमलव को यथास्थान रख दें।

यहाँ, $L = 4, R = 3, n = 3, M = ?$

पहला चरण: $\frac{105823817}{27}$ [चूँकि $R^3 = 27$]

105582379

दूसरा चरण: $3R^2M = 3 \times 9 \times M = 27M$

चूँकि 105582379 के अंत में 9 है, इसलिए $M = 7$

इस प्रकार प्रदत्त संख्या का घनमूल = 47.3

उदा. 6: पूर्ण घनफल 83.453453 का घनमूल ज्ञात करें। इसे स्वयं हल कीजिए।

नोट: 9 से अधिक अंकों वाली संख्या का घनमूल निकालने की शायद ही कभी जरूरत पड़ती है, इसलिए इसमें सर खपाने की कोई आवश्यकता नहीं है। घनमूल निकालने का एक सामान्य नियम भी है, जो प्रायः सभी संख्याओं पर लागू होता है। पर वहाँ इसमें प्रयुक्त जटिल गणनाओं से परहेज रखना ही उचित होगा।

yoursmahboob

करणी
(Surds)

वे राशियाँ जिनका मूल ठीक ठीक (exactly) नहीं निकाला जा सके, उसे करणी (Surds) कहते हैं। जैसे, $\sqrt{2}, 4\sqrt{8}$ आदि।

मिश्र करणी: जो करणी, किसी परिमेय संख्या में करणी से गुणा करने पर प्राप्त हुआ है, उसे मिश्र करणी कहते हैं, जैसे, $2\sqrt{3}, 4\sqrt{5}$ आदि।

करणी का घात (Order): $a^{1/m}$ को 'mवाँ घात युक्त करणी' (surd of mth order) कहा जाता है।

प्रदत्त करणियों को समान घात वाले करणी में बदलना

उदा. $3^{1/4}, 2^{1/3}$ एवं $5^{1/6}$ को समान घात वाले करणियों में बदलें एवं उन्हें आरोही क्रम (ascending order) में सजाएँ

हल: 4, 3, 6 का लघुत्तम समापवर्त्य = 12। इसलिए प्रदत्त करणियों को 12 के घात में अभिव्यक्त कीजिए,

$3^{1/4} = 3^{3/12} = 3^{3/12} = 27^{1/12}$

$2^{1/3} = 2^{4/12} = 2^{4/12} = 16^{1/12}$

$5^{1/6} = 5^{2/12} = 5^{2/12} = 25^{1/12}$

$\therefore$ आरोही क्रम में लगाने पर,

$16^{1/12} < 25^{1/12} < 27^{1/12}$

या $2^{1/3} < 5^{1/6} < 3^{1/4}$

करणी का जोड़ एवं घटाव

सदृश करणियाँ जैसे $2\sqrt{5}, 5\sqrt{5}$ एवं $12\sqrt{5}$ आपस में जोड़े जा सकते हैं, पर असदृश करणियों, जैसे $5\sqrt{4}, 3\sqrt{2}, 4\sqrt{7}$ आदि को आपस में जोड़ना संभव नहीं है।

उदा. सरल करें: $\sqrt{75} - \sqrt{48}$

हल: $\sqrt{75} + \sqrt{48} = \sqrt{25\times3} + \sqrt{16\times3} = 5\sqrt{3} + 4\sqrt{3} = 9\sqrt{3}$

करणी का गुणा

उदा. $4^{1/3}, 6^{1/6}$ एवं $\sqrt{5}$ को आपस में गुणा करें।

yoursmahboob

हल: $4^{1/3} \times 6^{1/6} \times 5^{1/2}$

$= 4^{2/6} \times 6^{1/6} \times 5^{3/6} = \left[4^2 \times 6 \times 5^3\right]^{1/6} = (12000)^{1/6}$

करणी का भाग

उदा. $12 \times 4^{1/3}$ में $3\sqrt{2}$ से भाग दें।

हल: $\dfrac{12 \times 4^{1/3}}{3\sqrt{2}} = \dfrac{4 \times 4^{1/3}}{2^{1/2}} = \dfrac{4 \times 4^{2/6}}{2^{3/6}} = 4 \times \left[\dfrac{4^2}{2^3}\right]^{1/6}$

$= 4\left(\dfrac{16}{8}\right)^{1/6} = 4 \times 2^{1/6}$

इस अध्याय के अन्तर्गत दिए गए प्रश्नों एवं उदाहरणों को हल करने में निम्नलिखित परिणामों का इस्तेमाल किया जा सकता है:

1) $\sqrt{a} \times \sqrt{a} = a$

2) $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$

3) $\sqrt{a^2 \times b} = a\sqrt{b}$

4) $\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 = a + b + 2\sqrt{ab}$

5) $\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 = a + b - 2\sqrt{ab}$

6) $\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right) = a - b$

निम्नलिखित वर्गमूल भी स्मरणीय हैं:

$\sqrt{2} = 1.41421;\ \sqrt{3} = 1.73205;\ \sqrt{5} = 2.23607$

$\sqrt{6} = 2.44949;\ \sqrt{7} = 2.64575;\ \sqrt{8} = 2.82842$

उदा. 1: $\sqrt{300}$ के मान ज्ञात करें।

हल: $\sqrt{300} = \sqrt{10 \times 10 \times 3} = 10\sqrt{3} = 10 \times 1.732 = 17.32$

उदा. 2: निम्नलिखित का मान निकालें:

a) $\sqrt{75} + \sqrt{147}$ b) $\sqrt{80} + 3\sqrt{245} - \sqrt{125}$

हल: a) $\sqrt{75} + \sqrt{147} = \sqrt{5 \times 5 \times 3} + \sqrt{7 \times 7 \times 3}$

$= 5\sqrt{3} + 7\sqrt{3} = 12\sqrt{3} = 20.7846$

yoursmahboob

b) $\sqrt{80}+3\sqrt{245}-\sqrt{125}$

$$= \sqrt{4\times4\times5}+3\sqrt{7\times7\times5}-\sqrt{5\times5\times5}$$

$$= 4\sqrt{5}+21\sqrt{5}-5\sqrt{5}$$

$$= 20\sqrt{5} \sim 44.7213$$

उदा. 3: निम्नलिखित का मान निकालें:

a) $\sqrt{2}\times\sqrt{3}$ b) $\sqrt{6}\times\sqrt{150}$ c) $\sqrt{242}+\sqrt{72}$

हल: a) $\sqrt{2}\times\sqrt{3}=\sqrt{6}=2.4494$

b) $\sqrt{6}\times\sqrt{150}=\sqrt{6\times150}=\sqrt{900}=30$

c) $\sqrt{242}+\sqrt{72}=\dfrac{\sqrt{121\times2}}{\sqrt{36\times2}}=\dfrac{11\sqrt{2}}{6\sqrt{2}}=\dfrac{11}{6}=1\dfrac{5}{6}$

उदा. 4: निम्नलिखित का मान निकालें:

a) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ b) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ c) $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ d) $\dfrac{1}{\sqrt{6}}$ e) $\dfrac{1}{\sqrt{7}}$

हल: a) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}=0.7071$

b) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}=0.5773$

c) $\dfrac{1}{\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}=0.4472$

d) $\dfrac{1}{\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{6}}{6}=0.4082$

e) $\dfrac{1}{\sqrt{7}}=\dfrac{\sqrt{7}}{7}=0.3779$

उदा. 5: निम्नलिखित का मान निकालें:

a) $\dfrac{1}{\sqrt{5}-1}$ b) $\dfrac{14}{3+\sqrt{2}}$ c) $\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$ d) $\dfrac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}$

e) $\dfrac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$ f) $\dfrac{4+\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}$ g) $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

yoursmahboob

हल: a) $\frac{1}{\sqrt{3}-1}=\frac{\sqrt{3}+1}{(\sqrt{3}-1)\times(\sqrt{3}+1)}=\frac{\sqrt{3}+1}{2}=1.3660$

b) $\frac{14}{3-\sqrt{2}}=\frac{14\times(3+\sqrt{2})}{(3+\sqrt{2})(3-\sqrt{2})}=\frac{14(3+\sqrt{2})}{9-2}=2(3+\sqrt{2})=3.1716$

c) $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}=\frac{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}=\frac{(\sqrt{2}-1)^2}{2-1}=(\sqrt{2}-1)^2=0.1716$

d) $\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}=\frac{(\sqrt{5}+1)^2}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)}=\frac{(\sqrt{5}+1)^2}{4}=2.6180$

e) $\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}=\frac{(2+\sqrt{3})^2}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}=\frac{(2+\sqrt{3})^2}{1}=13.9282$

f) $\frac{4-\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}=\frac{(4-\sqrt{2})(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}$

$=4\sqrt{2}+2-4-\sqrt{2}=3\sqrt{2}-2=2.2426$

g) $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}=\frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2}{1}=9.8989$

नोट: उपर्युक्त सभी उदाहरणों में हर के पूर्ण संख्या बना लिया गया है।

(i) $\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ एवं (ii) $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$ *के रूप में अभिव्यक्त व्यंजकों को हल करने के लिए सूत्र-विधि:*

i) $\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{(\sqrt{a})^2-(\sqrt{b})^2}=\frac{a+b-2\sqrt{ab}}{a-b}=\frac{a+b}{a-b}-\frac{2\sqrt{ab}}{a-b}$

ii) $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}{(\sqrt{a})^2-(\sqrt{b})^2}=\frac{a+b+2\sqrt{ab}}{a-b}=\frac{a+b}{a-b}+\frac{2\sqrt{ab}}{a-b}$

यदि दोनों परिणामों को एक साथ कर दें तो

$\frac{a+b}{a-b}\pm\frac{2\sqrt{ab}}{a-b}$ ....(*)

yoursmartboob

उपर्युक्त सूत्र का पहला पद है $\left(\frac{a+b}{a-b}\right)$ एवं दूसरा पद है $\left(\frac{2\sqrt{ab}}{a-b}\right)$। दोनों ही स्थितियों के लिए दोनों पद समान हैं। यदि प्रदत्त करणी के अंश में जोड़ का चिह्न हो तो उपर्युक्त दोनों पदों को जोड़ते हैं, अन्यथा इन्हें घटाया जाता है। उदाहरण के लिए,

$$\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}=\frac{7+5}{7-5}-\frac{2\sqrt{7\times5}}{7-5}=6-\sqrt{35}$$

$$\frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}=\frac{7+5}{7-5}+\frac{2\sqrt{7\times5}}{7-5}=6+\sqrt{35}$$

नोट: हमारा सुझाव है कि उपर्युक्त सूत्र (*) को याद रखें। इससे समय की बचत होगी।

उदा. 6: निम्नलिखित व्यंजकों का मान (दशमलव के तीन स्थानों तक) निकालें।

1) $\frac{1}{\sqrt{7}}$ 2) $\frac{1}{\sqrt{11}}$ 3) $\frac{1}{\sqrt{3}-1}$ 4) $\frac{1}{\sqrt{7}-1}$ 5) $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$

6) $\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}$ 7) $\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$ 8) $\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}}$ 9) $\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}}$

हल:

1) $\frac{1}{\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{7}}{7}=0.378$

2) $\frac{1}{\sqrt{11}}=\frac{\sqrt{11}}{11}=0.302$

3) $\frac{1}{\sqrt{3}-1}=\frac{\sqrt{3}+1}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}=\frac{\sqrt{3}+1}{3-1}=\frac{\sqrt{3}+1}{2}=1.366$

4) $\frac{1}{\sqrt{7}-1}=\frac{\sqrt{7}+1}{7-1}=\frac{\sqrt{7}+1}{6}=0.6076$

5) $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}=\frac{(\sqrt{2}-1)^2}{2-1}=0.1716$

6) $\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}=\frac{(\sqrt{5}+1)^2}{5-1}=2.618$

7) $\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}=\frac{(2+\sqrt{3})^2}{4-3}=13.928$

yoursmahboob

8) $\sqrt{\dfrac{(\sqrt{5}+1)^2}{5-1}} = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2} = 1.618$

9) $\sqrt{\dfrac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}} = \sqrt{\dfrac{(2-\sqrt{3})^2}{4-3}} = 2+\sqrt{3} = 3.732$

उदा. 7: निम्नलिखित को आरोही क्रम में सजाएँ:

$\sqrt{7}-\sqrt{5}, \sqrt{5}-\sqrt{3}, \sqrt{9}-\sqrt{7}, \sqrt{11}-\sqrt{9}$

हल: $\sqrt{7}-\sqrt{5} = \dfrac{(\sqrt{7}-\sqrt{5})\times(\sqrt{7}+\sqrt{5})}{\sqrt{7}+\sqrt{5}} = \dfrac{7-5}{\sqrt{7}+\sqrt{5}} = \dfrac{2}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}$

$\sqrt{5}-\sqrt{3} = \dfrac{(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} = \dfrac{5-3}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} = \dfrac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$

इसी तरह, $\sqrt{9}-\sqrt{7} = \dfrac{2}{\sqrt{9}+\sqrt{7}}$ एवं $\sqrt{11}-\sqrt{9} = \dfrac{2}{\sqrt{11}+\sqrt{9}}$

हम जानते हैं कि हर में वृद्धि के साथ साथ भिन्न का मान कम होता जाता है। इसलिए,

$\dfrac{2}{\sqrt{11}+\sqrt{9}} < \dfrac{2}{\sqrt{9}+\sqrt{7}} < \dfrac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{5}} < \dfrac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$

या, $\sqrt{11}-\sqrt{9} < \sqrt{9}-\sqrt{7} < \sqrt{7}-\sqrt{5} < \sqrt{5}-\sqrt{3}$

नोट: उपर्युक्त उदाहरण से एक महत्वपूर्ण परिणाम की प्राप्ति हुई। इसे याद रखना चाहिए।

yoursmahboob

साधारण भिन्न

(Fractions)

यदि किसी इकाई को कई समान हिस्सों में विभाजित कर दिया जाए, तो इस प्रकार के विभाजन से प्राप्त हिस्से उस इकाई के भिन्न (Fractions) कहे जाते हैं। भिन्न 'एक का पाँचवाँ हिस्सा', 'दो का पाँचवाँ हिस्सा' एवं 'तीन-चौथाई' को क्रमशः $\frac{1}{5}, \frac{2}{5}$ एवं $\frac{3}{4}$ लिखा जाता है।

रेखा के नीचे लिखी जानेवाली संख्या, जो यह बताती है कि इकाई को कितने भागों में विभाजित किया गया है, हर (Denominator) कही जाती है।

रेखा के ऊपर लिखी जानेवाली संख्या जो यह बताती है कि विभाजित हिस्सों में से कितने हिस्से भिन्न के निर्माण के लिए इस्तेमाल किए गए हैं, अंश (Numerator) कहलाती है।

किसी भिन्न के अंश एवं हर (Numerator and Denominator) उस भिन्न के पद (terms) कहे जाते हैं।

नोट: 1. यदि किसी भिन्न के अंश एवं हर समान हों तो वह भिन्न एक इकाई होता है।

2. यदि किसी भिन्न का अंश शून्य के बराबर हो तो उस भिन्न का मान शून्य होता है, चाहे उसका हर कुछ भी हो। जब किसी सार्थक भिन्न की बात करते हैं तो हमेशा यह मान लिया जाता है कि भिन्न का हर शून्य नहीं है।

3. भिन्न को परिमेय संख्या भी कहते हैं।

4. यदि किसी भिन्न के अंश एवं हर में समान संख्या से गुणा कर दिया जाए तो भिन्न के मान में कोई अंतर नहीं आता।

उदा: $\frac{2}{5} = \frac{2\times5}{5\times5} = \frac{2+4}{5+4}$

5. जब किसी भिन्न के अंश एवं हर में कोई उभयनिष्ठ गुणनखंड नहीं हो तो कहा जाता है कि भिन्न अपने न्यूनतम पदों (lowest terms) में स्थित है।

उदा: $\frac{15}{20} = \frac{3\times5}{4\times5}$

उपर्युक्त भिन्न के अंश एवं हर में 5 एक उभयनिष्ठ गुणनखंड है, इसलिए $\frac{15}{20}$ को न्यूनतम पदों में स्थित नहीं कहा जा सकता। यदि हम $\frac{15}{20}$ के अंश एवं हर दोनों को 5 से विभाजित करें तो $\frac{3}{4}$ प्राप्त होता है, जिसके अंश एवं हर में कोई उभयनिष्ठ गुणनखंड नहीं है। इसलिए यह एक न्यूनतम पदों में स्थित भिन्न है।

yourmahboob

जब किसी भिन्न को उनके न्यूनतम पदों में लाया जाता है तब इनके अंश एवं हर दोनों आपस में रूढ़ (अभाज्य) हो जाते हैं अर्थात् एक दूसरे को पूर्णतया विभाजित नहीं करते

6. यदि किसी भिन्न के अंश (Numerator) एवं हर (Denominator) विशालकाय संख्याएँ हों या उनके उभयनिष्ठ गुणनखंड का आसानी से अंदाजा लगा पाना मुश्किल हो, तो उनका महत्तम समापवर्तक निकाला जा सकता है भिन्न के दोनों पदों को उनके म.स. (HCF) से विभाजित कर देने पर वे अपने न्यूनतम पदों में चले आते हैं।

उदा: $\frac{385056}{715104}$: 385056 एवं 715104 का म.स. = 55008

$$\therefore \frac{385056}{715104} = \frac{385056 \div 55008}{715104 \div 55008} = \frac{7}{13}$$

यहाँ $\frac{7}{13}$ अपने न्यूनतम पदों में स्थित है क्योंकि 7 एवं 13 के बीच कोई उभयनिष्ठ गुणनखंड नहीं है।

7. किसी पूर्णांक संख्या को मनचाहे हर (Denominator) देकर भिन्न में बदला जा सकता है।

उदा: यदि आप 23 को ऐसे भिन्न के रूप में देखना चाहते हैं, जिसका हर 17 हो तो निम्नलिखित क्रिया करते हैं।

$$23 = \frac{23 \times 17}{17} = \frac{391}{17}$$

उचित भिन्न **(Proper Fraction):** जिस भिन्न का अंश उसके हर से निश्चित रूप से कम हो उसे उचित भिन्न कहते हैं जैसे $\frac{3}{4}, \frac{17}{19}, \frac{21}{42}$ इत्यादि। उचित भिन्न का मान हमेशा 1 से कम होता है

अनुचित भिन्न **(Improper Fraction):** जिस भिन्न का अंश हर के बराबर या उससे बड़ हो, उसे अनुचित भिन्न (Improper fraction) कहते हैं

उदा: $\frac{17}{12} = 1\frac{5}{12}, \frac{12}{7} = 1\frac{5}{7}, \frac{18}{5} = 3\frac{3}{5}$

इससे यह निष्कर्ष निकलता है कि अनुचित भिन्न में एक पूर्ण संख्या एवं एक भिन्न शामिल होते हैं। जब किसी अनुचित भिन्न को पूर्ण संख्या एवं भिन्न के मिले जुले रूप में व्यक्त किया जाता है तो उसे मिश्र संख्या (Mixed Number) कहते हैं। उदाहरण के लिए $1\frac{5}{12}, 1\frac{5}{7}$ एवं $3\frac{3}{5}$ मिश्र संख्याएँ हैं।

हल किए गए उदाहरण

उदा. 1: निम्नलिखित का योगफल ज्ञात करें।

yoursmahboob

a) $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}$ एवं $\frac{3}{4}$

b) $\frac{125}{100}+\frac{50}{36}+\frac{48}{45}$ एवं $1\frac{1}{2}$

हल: a) यहाँ दिए गए, सभी भिन्न अपने न्यूनतम पदों में स्थित हैं।

2, 3, 4 का ल.म. (LCM) = 12

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}=\frac{(12\div 2)\times 1+(12\div 3)\times 2+(12\div 4)\times 3}{12}$$

$$=\frac{6+8+9}{12}=\frac{23}{12}=1\frac{11}{12}$$

नोट: पाठकों के लिए $\frac{(12\div 2)\times 1+(12\div 3)\times 2+(12\div 4)\times 3}{12}$

लिखना कोई आवश्यक नहीं है। इस चरण को मन में ही निष्पादित कर सकते हैं।

b) सर्वप्रथम, दिए गए भिन्नों को उनके न्यूनतम पदों में बदल लें:

$$\frac{125}{100}=\frac{5}{4};\ \frac{50}{36}=\frac{25}{18};\ \frac{48}{45}=\frac{16}{15}$$

अब इन भिन्नों को मिश्र संख्याओं में बदल लें:

$$\frac{5}{4}=1\frac{1}{4};\ \frac{25}{18}=1\frac{7}{18};\ \frac{16}{15}=1\frac{1}{15}$$

इस प्रकार प्रदत्त व्यंजक अपने निम्नलिखित रूप में प्रकट होता है:

$$1\frac{1}{4}+1\frac{7}{18}+1\frac{1}{15}+1\frac{1}{2}$$

अब सभी पूर्ण संख्याओं एवं भिन्नों को अलग-अलग इकट्ठा जोड़ लें। इस प्रकार

$$1\frac{1}{4}+1\frac{7}{18}+1\frac{1}{15}+1\frac{1}{2}=(1+1+1+1)+\left(\frac{1}{4}+\frac{7}{18}+\frac{1}{15}+\frac{1}{2}\right)$$

$$=4+\frac{45+70+12+90}{180}$$

$$=4+\frac{217}{180}=4+1\frac{37}{180}=5\frac{38}{180}$$

उदा. 2: हल करें:

a) $\frac{7}{9}+\frac{11}{12}+\frac{13}{16}+\frac{1}{8}$ b) $3\frac{10}{11}+5\frac{7}{15}-2\frac{9}{22}-4\frac{9}{10}$

yoursmahboob

c) $3\frac{5}{9}\times 81\times\frac{17}{16}$ d) $10\frac{5}{6}\div 91$ e) $50\frac{4}{7}\div 14$

f) $\frac{15}{20}\times\frac{3}{4}\times\frac{4}{5}$ g) $\frac{6}{7}\div 3$ h) $\frac{6}{7}\div 4$

हल: a) 9, 12, 16, 8 का ल.स. = 144

$$\frac{7}{9}-\frac{11}{12}+\frac{13}{16}-\frac{1}{8}=\frac{16\times 7-11\times 12+13\times 9-18}{144}$$

$$=\frac{112-132+117-18}{144}=\frac{229-150}{144}=\frac{79}{144}$$

b) $3\frac{10}{11}+5\frac{7}{15}-2\frac{9}{22}-4\frac{9}{10}$

$$=(3+5-2-4)+\left(\frac{10}{11}+\frac{7}{15}-\frac{9}{22}-\frac{9}{10}\right)$$

$$=2+\frac{300+154-135-297}{330}$$

$$=2-\frac{22}{330}=2+\frac{1}{15}=2\frac{1}{15}$$

c) $3\frac{5}{9}\times 81\times\frac{17}{16}$

मिश्र संख्या को अनुचित भिन्न में बदलने पर लांबक निम्नलिखित रूप में प्राप्त होता है:

$$\frac{32}{9}\times 81\times\frac{17}{16}=306$$

d) $10\frac{5}{6}\div 91=\frac{65}{6}\div 91=\frac{65}{6}\times\frac{1}{91}=\frac{5}{42}$

e) $58\frac{4}{7}\div 14=\frac{410}{7}\div 14=\frac{410}{7}\times\frac{1}{14}=\frac{205}{49}=4\frac{9}{49}$

या यदि मिश्र संख्या का पूर्ण हिस्सा (जो पूर्ण संख्या होती है) भाजक से बड़ा हो तो निम्नलिखित रूप में गणना करते हैं:

$$58\frac{4}{7}\div 14=\left(56+2\frac{4}{7}\right)\div 14$$

$$=4+\frac{18}{7}\times\frac{1}{4}=4+\frac{9}{49}=4\frac{9}{49}$$

yoursmahboob

f) $\frac{15}{20} \times \frac{3}{4} \times \frac{4}{5} = \frac{9}{20}$

g) $\frac{6}{7} \div 3$; जब अंश भाजक से पूर्णतया विभाज्य हो, तब (÷) के चिह्न को गुणा (×) के चिह्न में बिना बदले भी गणना संभव है।

उत्तर: $\frac{6 \div 3}{7} = \frac{2}{7}$

h) $\frac{6}{7} \div 4$, यहाँ अंश 6, भाजक 4 से पूरी तरह विभाज्य नहीं है, इसलिए,

$\frac{6}{7} \div 4 = \frac{6}{7} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{14}$

उदा. 3: हल करें:

a) $3\frac{21}{23} \div 3\frac{15}{31}$ b) $9\frac{4}{9} \div 11\frac{1}{3}$

हल: किसी भिन्न को दूसरे भिन्न से विभाजित करने के लिए भाजक भिन्न के व्युत्क्रम से दिए गए भिन्न में गुणा कर दीजिए।

a) सर्वप्रथम प्रदत्त मिश्र संख्या को अनुचित भिन्न में बदल लीजिए। इसके बाद इस भिन्न को भाजक के व्युत्क्रम से गुणा कर दीजिए।

$\frac{90}{23} \div \frac{108}{31} = \frac{90}{23} \times \frac{31}{108} = \frac{155}{138} = 1\frac{17}{138}$

b) $9\frac{4}{9} \div 11\frac{1}{3} = \frac{85}{9} \times \frac{3}{34} = \frac{5}{6}$

***यौगिक भिन्न* (Compound Fraction):** किसी भिन्न का भिन्न, यौगिक भिन्न या मिश्र भिन्न कहलाता है। उदाहरण के लिए $\left(\frac{3}{7} \text{ का } \frac{1}{2}\right)$ यौगिक भिन्न है।

$\frac{3}{7} \text{ का } \frac{1}{2} = \frac{3}{7} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{14}$

***संयुक्त क्रिया* (Combined Operation)**

भिन्नों के सरलीकरण के दौरान आप ऐसे समाप्त व्यंजक पाएँगे, जिसमें जोड़, घटाव, गुणा एवं भाग के साथ साथ कोष्ठकों की भी क्रिया करनी हो; ऐसे सरलीकरणों को सरल करने के क्रम में निम्नलिखित बातों का ध्यान रखें:

i) गुणा एवं भाग की क्रियाएँ जोड़ एवं घटाव से पूर्व संपन्न कर लें।

youtrahboob

ii) (×) एवं (÷) की क्रिया में उन्हीं संख्याओं को शामिल करें, जो इन चिह्नों के आजू-बाजू में स्थित हों।

उदा. 1: $\frac{4}{5}\times\frac{7}{12}\div\frac{5}{24}=\frac{4}{5}\times\frac{7}{12}\times\frac{24}{5}=\frac{56}{25}$

उदा. 2: $\frac{4}{5}\div\frac{7}{12}\times\frac{5}{24}=\frac{4}{5}\times\frac{12}{7}\times\frac{5}{24}=\frac{2}{7}$

उदा. 3: $\frac{4}{5}\div\frac{7}{12}\div\frac{5}{24}=\frac{4}{5}\times\frac{12}{7}\times\frac{24}{5}=\frac{1152}{175}$

(iii) सर्वप्रथम कोष्ठकों की क्रिया संपन्न करें।

(iv) संयुक्त क्रियाओं के लिए BODMAS नियम का इस्तेमाल किया जाता है।

***मिश्रित भिन्न* (Complex Fraction):** जिस भिन्न के अंश या हर या दोनों भिन्न के रूप में हो उसे मिश्रित भिन्न (Complex fraction) कहते हैं। उदाहरण के लिए,

$\frac{5}{\frac{7}{8}}, \frac{8}{\frac{5}{7}}, \frac{\frac{9}{7}}{\frac{8}{9}}, \frac{\frac{2}{3}-\frac{2}{5}}{\frac{1}{4}-\frac{2}{5}}$ मिश्रित भिन्न (complex fractions) हैं।

उदा. 1: सरल करें: (i) $\frac{\frac{4}{15}}{\frac{2}{5}}$ (ii) $\frac{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}}{\frac{3}{4}-\frac{2}{9}}$

हल: (i) $\frac{\frac{4}{15}}{\frac{2}{5}}=\frac{4}{15}\div\frac{2}{5}=\frac{4}{15}\times\frac{5}{2}=\frac{2}{3}$

(ii) $\frac{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}}{\frac{3}{4}-\frac{2}{9}}=\frac{\frac{3+4}{6}}{\frac{27-8}{36}}=\frac{\frac{7}{6}}{\frac{19}{36}}=\frac{7}{6}\times\frac{36}{19}=\frac{42}{19}=2\frac{4}{19}$

अथवा, अंश एवं हर दोनों को 2, 3, 4, 9 के ल.स. 36 से गुणा कर दें। इस प्रकार,

$$\frac{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}}{\frac{3}{4}-\frac{2}{9}}=\frac{\frac{1}{2}\times36+\frac{2}{3}\times36}{\frac{3}{4}\times36-\frac{2}{9}\times36}=\frac{18+24}{27-8}=\frac{42}{19}=2\frac{4}{19}$$

नोट: दूसरी विधि अपेक्षाकृत तेज रफ्तार से नतीजे तक पहुँचाती है। इसलिए हमारा सुझाव है

yoursmahboob

कि आप इसी विधि का उपयोग करें।

उदा. 2: सरल करें:

$$\frac{7}{5-\frac{8}{3}} \div \frac{3-\frac{2}{3-\frac{3}{2}}}{4-\frac{3}{2}} - \frac{5}{7} \text{ of } \left\{ \frac{1}{1\frac{3}{7}} + \frac{6}{5} \text{ of } \frac{3\frac{1}{3}-2\frac{1}{2}}{\frac{47}{21}-2} \right\}$$

हल:

$$\frac{7}{\frac{7}{3}} \div \frac{3-\frac{2}{3}}{\frac{5}{2}} - \frac{5}{7} \times \left\{ \frac{7}{10} + \frac{6}{5} \times \frac{\frac{10}{3} - \frac{5}{2}}{\frac{47}{21} - 2} \right\}$$

$$= 3 \div \frac{3-\frac{4}{3}}{\frac{5}{2}} - \frac{5}{7} \times \left\{ \frac{7}{10} + \frac{6}{5} \times \frac{5}{6} \times \frac{21}{5} \right\}$$

$$= 3 \div \left(\frac{5}{3} \times \frac{2}{5} \right) - \frac{5}{7} \left\{ \frac{7}{10} + \frac{21}{5} \right\}$$

$$= 3 + \frac{2}{3} - \frac{5}{7} \times \frac{49}{10} = \frac{9}{2} - \frac{7}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

उदा. 3: सरल करें:

$$\frac{5+5\times5}{5\times5+5} \times \frac{\frac{1}{5}+\frac{1}{5} \text{ of } \frac{1}{5}}{\frac{1}{5} \text{ of } \frac{1}{5} - \frac{1}{5}} - \left(5 - \frac{1}{5}\right) \times \frac{1}{\frac{2}{10}}$$

हल:

$$1 \times \frac{\frac{1}{5}+\frac{1}{25}}{\frac{1}{25}+\frac{1}{5}} - \left(\frac{24}{5}\right) \times \frac{10}{2} = 1 \times \frac{5}{5} - 24 = 25 - 24 = 1$$

वितत भिन्न (Continued Fraction): भिन्नों के निम्नलिखित रूप को वितत भिन्न (Continued fraction) कहा जाता है।

yoursmahboob

(i) $4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5+\cfrac{2}{3}}}$ या (ii) $1-\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{4-\cfrac{2}{5}}}}$

नियम: दिए भिन्न को हल करने के लिए नीचे से ऊपर की ओर बढ़ें।

उदा. 1: सरल करें:

$$\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4}}}}$$

हल: प्रदत्त भिन्न

$$=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{\frac{5}{4}}}}=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\frac{4}{5}}}=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\frac{19}{5}}}$$

$$=\cfrac{1}{2+\frac{5}{19}}=\cfrac{1}{\frac{43}{19}}=\frac{19}{43}$$

उदा. 2: सरल करें:

$$5+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{8+\frac{1}{10}}}$$

हल: $5+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{\frac{81}{10}}}=5+\cfrac{1}{6+\frac{10}{81}}$

$$=5+\cfrac{1}{\frac{496}{81}}=5+\frac{81}{496}=5\frac{81}{496}$$

yourmanboob

नोट: इस तरह के सवालों को हल करने के लिए कोई सैद्धान्त विधि विकसित नहीं की गई है। पर आप (i) मानसिक गणना का अभ्यास करके एवं (ii) हल करने के चरणों में कटौती करके समय को बचत कर सकते हैं

भिन्न पर आधारित मिले-जुले प्रश्न

उदा. 1: जमीन के किसी टुकड़े के 7वें हिस्से का एक चौथाई 30000 रु. में बेचा जाता है, उस जमीन के 8/35वें हिस्से की कीमत क्या होगी?

हल: 7वें हिस्से का एक चौथाई $= \frac{1}{7} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{28}$

$\because$ जमीन के टुकड़े के $\frac{1}{28}$ वें हिस्से की कीमत = 30000 रु.

$\therefore$ जमीन के टुकड़े के $\frac{8}{35}$ वें हिस्से की कीमत $= \frac{30000 \times 28 \times 8}{35} = 192000$ रु.

उदा. 2: किसी बटुए से कुल रकम का $\frac{1}{5}$ वाँ हिस्सा निकाल लिया गया। शेष का $\frac{1}{12}$ वाँ हिस्सा 7 रु. 40 पैसे है। बटुए में कुल कितने रुपए थे?

हल: बटुए की कुल रकम में से $\frac{1}{5}$ वाँ हिस्सा निकाल लेने पर उसमें $\frac{4}{5}$ वाँ हिस्सा बचा

प्रश्नानुसार, $\frac{4}{5}$ का $\frac{1}{12} = 7.40$ रु. या $\frac{1}{15} = 7.40$ रु.

$\therefore$ 1 = 111 रु.

उदा. 3: यदि किसी रकम में उसका 8वाँ हिस्सा और मिला दिया जाए तो कुल 40 रु. प्राप्त होते हैं। रकम क्या है?

हल: रकम + $\frac{\text{रकम}}{7} = 40 \Rightarrow \frac{8 \times \text{रकम}}{7} = 40 \Rightarrow$ रकम = 35 रु.

उदा. 4: एक रेलगाड़ी खुलने से पहले पूरी तरह यात्रियों से भरी हुई है। पहले स्टेशन पर इनमें से एक-तिहाई यात्री उतर जाते हैं, एवं 96 यात्री और रेलगाड़ी में चढ़ते हैं। अगले स्टेशन पर इनमें से आधे यात्री उतर जाते हैं तथा साथ 12 यात्री और चढ़ते हैं। इसके बाद वाले स्टेशन पर रेलगाड़ी में लोगों की संख्या 216 पायी जाती है, तो (प्रारंभ में रेलगाड़ी में कुल कितने यात्री थे) रेलगाड़ी कितने यात्रियों के साथ चली थी?

हल: मान लिया कि प्रारंभ में रेलगाड़ी में कुल यात्रियों की संख्या x थी।

इनमें से एक तिहाई यात्रियों के उतरने एवं 96 यात्रियों के चढ़ने के बाद रेलगाड़ी में

$\left(x - \frac{x}{3}\right) + 96$ यात्री बचे।

yoursmahboob

$$x - \frac{x}{3} + 96 = \frac{2x}{3} + 96 = \frac{2x + 288}{3}$$ यानी

दूसरे स्टेशन से चलते समय रेलगाड़ी में यात्रियों की संख्या $= \frac{2x + 288}{6} + 12$

प्रश्नानुसार, $\frac{2x + 288}{6} + 12 = 248$ या $2x + 288 = 1416$

$\therefore x = 564$

उदा. 5: निम्नलिखित समीकरणों में लुप्त राशियों (जिन्हें तारे चिह्न से निरूपित किया गया है) का पता लगाएँ, सभी भिन्न अपने न्यूनतम पदों में स्थित हैं।

i) $6\frac{3}{*} \times *\frac{2}{3} = 30$ ii) $4\frac{1}{6*} - *\frac{1}{17} = 1\frac{**}{6*}$

हल: i) चूँकि 30 में (6 + एक भिन्न) का (4 + एक भिन्न) गुणा शामिल है, (क्योंकि $6 \times 4 = 24$, 30 से थोड़ा ही कम है)। इसलिए दूसरे मिश्र भिन्न का पूर्णांक आठ जिसका 4 होना चाहिए।

तब,

$$6\frac{3}{*} \times 4\frac{2}{3} = 30 \quad \text{या} \quad 6\frac{3}{*} = \frac{30 \times 3}{14} = \frac{90}{14} = \frac{45}{7} = 6\frac{3}{7}$$

$\therefore$ लुप्त राशियाँ 4 एवं 7 हैं

ii) $4\frac{1}{6*} - *\frac{1}{17} = 1\frac{**}{6*}$

हल: पहली मिश्र संख्या एवं तीसरी मिश्र संख्या के हर 60 से अधिक एवं 70 से कम हैं और इन्हें 17 का अपवर्त्य (multiple) भी होना चाहिए। इस प्रकार प्रदत्त समीकरण अपने निम्नलिखित रूप में प्राप्त होता है।

$$4\frac{1}{68} - *\frac{1}{17} = 1\frac{**}{68} \quad \text{या} \quad (4 - *) + \left(\frac{1}{68} - \frac{1}{17}\right) = 1 + \frac{**}{68}$$

चूँकि $\frac{1}{68} < \frac{1}{17}$, $\frac{1}{68}$, 4 से 1 उधार लेना।

तब, $(3 - *) + \left(\frac{69}{68} - \frac{1}{17}\right) = 1 + \frac{**}{68}$

या, $(3 - 2) + \frac{65}{65} = 1 + \frac{**}{68} = 1 + \frac{65}{68} = 1\frac{65}{68}$

$\therefore$ प्रदत्त समीकरण $- 4\frac{1}{68} - 2\frac{1}{17} = 1\frac{65}{68}$

yoursmahboob

अभ्यास प्रश्न

1. निम्नलिखित भिन्नों में से कौन सबसे छोटा है?

$\frac{6}{11}, \frac{13}{18}, \frac{15}{22}, \frac{19}{36}, \frac{5}{6}$

2. $3\frac{2}{3} + 6\frac{7}{12} + 4\frac{9}{36} + 5 + 7\frac{1}{12}$ में कितना न्यूनतम भिन्न जोड़ा जाए कि वह एक पूर्ण संख्या बन जाए?

3. $13\frac{7}{66}$ एवं $4\frac{5}{66}$ के योगफल में से कितना घटाया जाए कि वह इन दोनों के अंतर के बराबर हो?

4. वह न्यूनतम भिन्न ज्ञात करें जिसे $\frac{2}{5} \times \frac{15}{21} \times \frac{7}{10} \times \frac{3}{8}$ में जोड़ने पर एक पूर्ण संख्या प्राप्त होती है।

5. निम्नलिखित समीकरणों में (टार्क से निर्देशित) सूचक राशियों का पता लगाएँ। प्रदत्त भिन्न अपने न्यूनतम पदों में स्थित हैं।

i) $* \frac{3}{7} \times 2\frac{3}{*} = 14\frac{*}{14}$ ii) $7\frac{*}{3} - *\frac{5}{11} = 3\frac{*}{*3}$

iii) $8\frac{9}{**} + *\frac{2}{27} = 7\frac{16}{17}$ iv) $2\frac{1}{2} - 3\frac{2}{3} + 1\frac{5}{6} - \frac{2}{*} = 0$

v) $\frac{1}{2\frac{3}{4}} + \frac{1}{5\frac{1}{5}} + \frac{1}{*} + \frac{1}{9\frac{8}{15}} = \frac{144}{143}$

हल (संकेत)

1. प्रथम दो भिन्नों की तुलना करने पर,

$6 \times 18 < 11 \times 13 \quad \therefore \frac{6}{11}$ छोटा है।

$\frac{6}{11}$ एवं $\frac{15}{22}$ में $6 \times 12 < 11 \times 15 \quad \therefore \frac{6}{11}$ छोटा है।

$\frac{6}{11}$ एवं $\frac{19}{36}$ में $19 \times 11 < 6 \times 36 \quad \therefore \frac{19}{36}$ छोटा है।

$\frac{19}{36}$ एवं $\frac{5}{6}$ में $19 \times 6 < 5 \times 36 \quad \therefore \frac{19}{36}$ छोटा है।

yoursmahboob

$\therefore$ निष्कर्ष यह निकला कि $\frac{19}{36}$ सबसे छोटा है।

नोट: उपर्युक्त विधि का उपयोग करते वक्त विशुद्ध गणना की आवश्यकता नहीं है। आप स्टीक पर्यवेक्षण के जरिए भी निष्कर्ष तक पहुँच सकते हैं।

2. $3\frac{2}{3}+6\frac{7}{12}+4\frac{9}{36}+5+7\frac{1}{12}$

केवल भिन्न वाले भागों को क्रमश: में जोड़ें:

$$\frac{2}{3}+\frac{7}{12}+\frac{9}{36}+\frac{1}{12}=\frac{24+21+9+3}{36}=\frac{57}{36}=\frac{19}{12}=1\frac{7}{12}$$

$\therefore$ प्रदत्त व्यंजक को पूर्ण संख्या बनाने के लिए उसमें $\left(1-\frac{7}{12}\right)=\frac{5}{12}$ जोड़ना होगा।

3. अंतर $=13\frac{7}{66}-4\frac{5}{66}=(13-4)+\left[\frac{7}{66}-\frac{5}{66}\right]=9+\frac{2}{66}=9\frac{1}{33}$

योगफल $=13\frac{7}{66}+4\frac{5}{66}=17\frac{12}{66}=17\frac{2}{11}$

$\therefore$ अभीष्ट उत्तर $=17\frac{2}{11}-9\frac{1}{33}=17\frac{6}{33}-9\frac{1}{33}=8\frac{5}{33}$

सूत्र: अभीष्ट उत्तर $=2\times$ छोटी संख्या $=2\times4\frac{5}{66}=8\frac{5}{33}$

4. $\frac{2}{5}\times\frac{15}{21}\times\frac{7}{10}\times\frac{3}{8}=\frac{3}{40}$ $\therefore$ अभीष्ट भिन्न $=1-\frac{3}{40}=\frac{37}{40}$

5. i) $5\frac{3}{7}\times2\frac{3}{4}=14\frac{13}{14}$ ii) $7\frac{2}{3}-4\frac{5}{11}=3\frac{7}{33}$

iii) $8\frac{9}{17}\div1\frac{2}{27}=7\frac{16}{17}$ iv) $2\frac{1}{2}-3\frac{2}{3}+1\frac{5}{6}-\frac{2}{3}=0$

v) $x=7\frac{1}{3}$

yoursmahboob

दशमलव भिन्न
(Decimal Fractions)

***दशमलव भिन्न* (Decimal Fraction):** वैसे भिन्न जिनमें हर के रूप में 10 के घात (जैसे, 10, 100, 1000 आदि) का प्रयोग हुआ हो, दशमलव भिन्न कहलाते हैं।

उदाहरण: $\frac{1}{10}, \frac{7}{10}, \frac{9}{1000}$ आदि दशमलव भिन्न हैं

दशमलव को पढ़ने का तरीका: दशमलव को पढ़ने के क्रम में अंकों को क्रम से पढ़ा जाता है। उदाहरण के लिए 0.457 को 'शून्य दशमलव चार, पाँच, सात' पढ़ा जाएगा न कि 'शून्य दशमलव चार सौ सत्तावन'।

***दशमलव स्थान* (Decimal Places):** दशमलव बिन्दु के बाद के अंकों को दशमलव स्थान (Decimal Places) कहा जाता है। उदाहरण के लिए 1.432 में तीन दशमलव स्थान एवं 7.82 में दो दशमलव स्थान मौजूद हैं।

दशमलव को साधारण भिन्न* (Vulgar Fraction) *में बदलना

नियम: दशमलव बिन्दु को नजरअंदाज करके प्राप्त संख्या को अंश बना लीजिए, एवं हर के लिए 1 पर उतने ही शून्य डालिए, जितने कि दशमलव बिन्दु के बाद अंक हों।

उदा. 1: दशमलव में व्यक्त निम्नलिखित राशियों को साधारण भिन्न में बदलिए।

a) 0.63 b) 0.0032 c) 3.013

हल: a) $0.63 = \frac{63}{100}$ b) $0.0032 = \frac{0032}{10000} = \frac{32}{10000}$

c) $3.013 = 3\frac{013}{1000} = 3\frac{13}{1000}$

नोट: दशमलव भिन्न के दायीं ओर अंत में चाहे जितने शून्य डाल दें, उसके मान में कोई फर्क नहीं आता। उदाहरण के लिए 0.9 = 0.90 = 0.9000 = 0.900000000 (ऐसा क्यों?)

यदि किसी भिन्न के अंश एवं हर दोनों में दशमलव स्थानों की संख्या समान हो तो दशमलव बिन्दु को बेझिझक हटाया जा सकता है।

उदा. 2: i) $\frac{0.53}{3.21} = \frac{053}{321} = \frac{53}{321}$

ii) $\frac{9.83051}{18.53342} = \frac{983051}{1853342}$

iii) $\frac{1.53}{2.4321}$ को साधारण भिन्न में बदलें।

yoursmahboob

हल: $\frac{1.53}{3.4321} = \frac{1.5300}{2.4321} = \frac{15300}{24321}$

इस प्रकार, दशमलव हटाने के लिए अंश एवं हर में दशमलव स्थानों की संख्या बराबर होनी चाहिए। दशमलव स्थानों की संख्या बराबर करने के लिए बेहिचक दशमलव के दायीं ओर शून्य डाल दिया जाता है।

नोट: किसी पूर्णांक संख्या को भी दशमलव के रूप में व्यक्त किया जा सकता है। करना केवल इतना है कि पूर्णांक के बाद एक दशमलव-बिन्दु डालकर मनचाही संख्या में शून्य डाल दीजिए।

उदा.: 17 = 17.0 = 17.00

दशमलव का जोड़ एवं घटाव

नियम: प्रदत्त संख्याओं को एक दूसरे के नीचे इस प्रकार रखा दें कि सभी संख्याओं के दशमलव एक उर्ध्वाधर क्रम में हों। फिर जोड़ या घटाव की क्रिया वैसे ही संपन्न करें, जैसा कि आम तौर से किया जाता है।

उदा. 3: 5.032, 0.8, 150.03 एवं 40 को जोड़ें।

हल:

```
   5.032
     0.8
  150.03
   40.00
 -------
 195.862
```

उदा. 4: 19.052 में से 24.5 को घटाएँ।

हल: यहाँ 24.5 की दायीं ओर दो शून्य लिखकर दशमलव स्थानों की संख्या के बराबर बना लिया जाता है, और फिर घटाने की क्रिया संपन्न की जाती है।

```
24.500
19.052
------
 5.448
```

दशमलव का गुणा

I. 10, 100 एवं 1000 आदि से गुणा करने की विधि

नियम: गुणक में जितने शून्य हों, प्रदत्त संख्या में दशमलव को उतने ही अंक खिसका दें।

उदा.: i) 39.052 × 100 = 3905.2

ii) 42.63 × 1000 = 42630

II. पूर्ण संख्या से गुणा करने की विधि

नियम: गुणा की सामान्य विधि से (दशमलव को नजरंदाज करते हुए) गुणा करें। गुणनफल में उतने ही अंकों के बाद दशमलव डाल दें जितने कि गुणक में मौजूद थे। यदि जरूरत पड़े तो इस क्रिया के लिए दशमलव के बाद आवश्यकतानुसार शून्य भी डाल सकते हैं।

yoursmahboob

उदा.: i) $0.9 \times 12 = ?$

हल: **पहला चरण:** $9 \times 12 = 108$

दूसरा चरण: चूँकि गुण्य में दशमलव स्थान की संख्या एक है। इसलिए, गुणनफल में भी एक ही दशमलव स्थान होगा।

∴ गुणनफल = 10.8

उदा.: ii) $.009 \times 12 = ?$

हल: **पहला चरण:** $9 \times 12 = 108$

दूसरा चरण: यहाँ गुण्य में दशमलव स्थानों की संख्या 3 है, गुणनफल में भी ऐसा ही होगा।

∴ गुणनफल = 0.108

उदा.: iii) $.00009 \times 12 = ?$

पहला चरण: $9 \times 12 = 108$

दूसरा चरण: चूँकि यहाँ गुण्य में 5 दशमलव स्थान हैं, इसलिए गुणनफल में भी इतने ही दशमलव स्थान होंगे। इसलिए हमें दशमलव के पूर्व तीन शून्य डालने होंगे।

∴ गुणनफल = .00108

III. दशमलव का दशमलव से गुणा

नियम: दशमलव को नजरंदाज करते हुए प्रदत्त संख्याओं के आपस में गुणा करें। गुणनफल में उतने ही दशमलव स्थान के बाद दशमलव डालें, जितने की गुण्य एवं गुणक दोनों को मिलाकर हों। आवश्यकतानुसार दशमलव के बाद शून्य भी लगा सकते हैं।

उदा.: i) $0.61 \times 0.07 = ?$

हल: **पहला चरण:** $61 \times 7 = 427$

दूसरा चरण: यहाँ गुण्य एवं गुणक मिलाकर कुल 4 दशमलव स्थान हैं। इसलिए गुणनफल में भी इतने ही दशमलव स्थान होने चाहिए। पर गुणनफल में यहाँ केवल तीन ही अंक हैं। इसलिए दशमलव डालने के पहले हम गुणनफल के पूर्व एक शून्य लगा देते हैं।

इस प्रकार, $0.61 \times 0.07 = 0.0427$

उदा.: ii) $0.2345 \times 0.24 = ?$

हल: **पहला चरण:** $2345 \times 24 = 56280$

दूसरा चरण: गुणनफल में $(4 - 2 =)$ 6 दशमलव स्थान होने चाहिए।

∴ गुणनफल = 0.056280 = 0.05628

दशमलव का भाग

I. जब भाजक 10, 100, 1000 आदि के रूप में हो

नियम: किसी दशमलवयुक्त संख्या को 10, 100, 1000 आदि से विभाजित करने के लिए दशमलव बिन्दु को बायीं ओर क्रमशः 1, 2, 3 आदि स्थान खिसका दिया जाता है। इस प्रकार,

i) $463.8 \div 10 = 46.38$

ii) $4.309 \div 100 = 0.04309$

iii) $0.003 \div 10000 = 0.0000003$

yoursmahboob

iv) 234.789 ÷ 1000000 = 0.000234789
v) 5.08 ÷ 1000000000 = 0.0000000508

II. जब भाजक स्वयं एक दशमलव भिन्न हो

नियम: भाजक में दशमलव बिन्दु को दायीं ओर एक तक बढ़ाते चलें जब तक कि वह एक पूर्ण संख्या नहीं बन जाए। ऐसा करने के क्रम में भाज्य या अपेक्षित संख्या में शून्य भी डालते जाएँ। अब भाग की क्रिया सामान्य रूप से करें और जब भाज्य का दशमलव सामने आए तो उसे भागफल में डाल दें।

उदा. i) $\frac{32.5}{.0064} = \frac{325000}{64} = 5078.125$

ii) $\frac{.0323}{.00017} = \frac{3230}{17} = 190$

***आवर्ती दशमलव* (Recurring Decimals)**

वैसा दशमलव जिसमें कोई खास अंक या अंकों के समूह की पुनरावृत्ति होती हो, आवर्ती दशमलव कहलाता है। अंग्रेजी में इसे Recurring Decimal, Periodic Decimal या Circulating Decimal भी कहते हैं। अंक या अंकों के समूह जिनकी पुनरावृत्ति हो रही होती है, Period of the Decimal कहलाता है।

उदाहरण के लिए,

1) $\frac{1}{3} = 0.333.....$

2) $\frac{1}{7} = 0.\underline{142857}142857142857,.....$

3) $\frac{13}{44} = 0.29\underline{54}5454,....$

आवर्त को अभिव्यक्त करने के लिए आवर्ती अंकों के ऊपर एक रेखा (bar) डाल दिया जाता है।

इसलिए, ऊपर के उदाहरणों में

1) $0.333... = 0.\overline{3}$ 2) $0.142857, 142857,.... = 0.\overline{142857}$

3) $0.295454 = 0.29\overline{54}$

***विशुद्ध आवर्ती दशमलव* (Pure Recurring Decimals):** जिस दशमलव भिन्न में दशमलव के बाद की सभी संख्याएँ आवर्ती हों, उसे विशुद्ध आवर्ती दशमलव कहते हैं उदाहरण के लिए, $0.\overline{142857}$ एक विशुद्ध आवर्ती दशमलव है।

***मिश्र आवर्ती दशमलव* (Mixed Recurring Decimals):** ऐसा दशमलव भिन्न जिसका कुछ अंक आवर्ती नहीं हो, मिश्र आवर्ती दशमलव कहलाता है। उदाहरण के लिए, $0.29\overline{54}$

yoursmahboob

एक मिश्र आवर्ती दशमलव है:

उदाहरण (1) में पीरियड 3 है, (2) में 142857 एवं (3) में 54 है।

नोट: 1. यदि न्यूनतम पदों में स्थित किसी साधारण भिन्न का हर 2 अथवा 5 के घात के रूप में हो या इन दोनों के गुणनफल के रूप में व्यक्त किया जा सकता हो तो उस भिन्न को अंतयुक्त (terminating) दशमलव में बदला जा सकता है।

उदा. i) $\frac{12}{25}=\frac{12}{5^2}=0.408$ ii) $\frac{19}{50}=\frac{19}{5^2\times 2}=0.38$

iii) $\frac{13}{20}=\frac{13}{2^2\times 5}=0.65$ iv) $\frac{3}{8}=\frac{3}{2^3}=0.375$

2. यदि न्यूनतम पदों में स्थित किसी साधारण भिन्न का हर 2 या 5 से विभाज्य नहीं हो तो वह विशुद्ध आवर्ती दशमलव के रूप में अभिव्यक्त किया जा सकता है।

उदा. i) $\frac{2}{3}=0.\overline{6}$ ii) $\frac{3}{11}=0.\overline{27}$ iii) $\frac{4}{7}=0.\overline{571428}$ iv) $\frac{5}{9}=0.\overline{5}$

3. यदि किसी न्यूनतम पदों में स्थित किसी साधारण भिन्न के हर के गुणनखंड में 2 एवं 5 के घात के अतिरिक्त अन्य संख्याएँ भी शामिल हों तो उससे मिश्र आवर्ती दशमलव प्राप्त होता है।

उदा. (i) $\frac{1}{6}=\frac{1}{2\times 3}=0.1\overline{6}$

(ii) $\frac{1}{15}=\frac{1}{5\times 3}=0.0\overline{6}$

(iii) $\frac{7}{75}=\frac{7}{5^2\times 3}=0.09\overline{3}$

(iv) $\frac{8}{15}=\frac{8}{5\times 3}=0.5\overline{3}$

प्रश्न: निम्नलिखित में से कौन-से साधारण भिन्न आवर्ती दशमलव भिन्न के रूप में अभिव्यक्त हो सकते हैं?

a) $\frac{12}{50}$ b) $\frac{12}{75}$ c) $\frac{3}{18}$ d) $\frac{8}{14}$ e) $\frac{1}{18}$ f) $\frac{7}{45}$ g) $\frac{1}{80}$

हल: a) प्रदत्त भिन्न को उसके न्यूनतम पदों में अभिव्यक्त कीजिए:

$\frac{12}{50}=\frac{6}{25}=\frac{6}{5^2}$

इसलिए, नोट 1 के अनुसार यह आवर्ती दशमलव के रूप में अभिव्यक्त नहीं हो सकता।

b) $\frac{12}{75}=\frac{4}{25}=\frac{4}{5^2}$

yoursmahboob

इसलिए, नोट-1 के अनुसार, इससे भी आवर्त्ती दशमलव उत्पन्न नहीं होगा।

c) $\frac{3}{18} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3\times 2}$

इसलिए नोट-3 के अनुसार, इससे मिश्र आवर्त्ती दशमलव प्राप्त होगा।

d) $\frac{8}{14} = \frac{4}{7}$

नोट 2 के अनुसार, शुद्ध आवर्त्ती दशमलव प्राप्त होगा।

e) $\frac{1}{18} = \frac{1}{9\times 2}$

नोट-3 के अनुसार, एक मिश्र आवर्त्ती दशमलव प्राप्त होगा।

f) $\frac{7}{45} = \frac{7}{9\times 5}$

नोट-3 के अनुसार, एक मिश्र आवर्त्ती दशमलव प्राप्त होगा।

g) $\frac{1}{80} = \frac{1}{2^4\times 5}$

इसलिए, नोट-1 के अनुसार आवर्त्ती दशमलव की प्राप्ति नहीं होगी।

आवर्त्ती दशमलव भिन्न को साधारण भिन्न में बदलना

पहली स्थिति: विशुद्ध आवर्त्ती दशमलव

नियम: एक विशुद्ध आवर्त्ती दशमलव उस साधारण भिन्न के बराबर है जिसका अंश उस आवर्त्त दशमलव का आवर्त्त है तथा जिसके हर के रूप में उतने ही '9' हों आवर्त्त में जितने अंक मौजूद हों।

उदा. निम्नलिखित आवर्त्ती दशमलव को साधारण भिन्न में बदलें:

a) $0.\overline{5}$ b) $0.\overline{45}$ c) $0.\overline{532}$

हल: a) $0.\overline{5} = 0.555\ldots\ldots(1)$

दोनों तरफ 10 से गुणा करने पर

$10\times 0.\overline{5} = 5.55\ldots\ldots(2)$

(1) में से (2) को घटाने पर,

$9\times 0.\overline{5} = 5$

$\therefore\ 0.\overline{5} = \frac{5}{9}$

सीधे नियम के सहारे भी हमें यही परिणाम प्राप्त होता है $0.\overline{5}$ का आवर्त्त 5 है, इसलिए अंश = 5। चूँकि आवर्त्त में केवल एक अंक है, इसलिए हर में केवल एक '9' होगा। $\therefore$ अभीष्ट साधारण भिन्न = $\frac{5}{9}$

yoursmahboob

b) $0.\overline{45}$

नियम के अनुसार, अंश = आवर्त = 45

हर = 99, चूँकि आवर्त में दो अंक हैं।

$\therefore$ अभीष्ट भिन्न = $\frac{45}{99}$

c) $0.\overline{532}$

अंश = आवर्त – 532

हर = 999, चूँकि आवर्त में 3 अंक हैं।

$\therefore$ अभीष्ट भिन्न = $\frac{532}{999}$

उदा. (b) एवं उदा. (c) के विस्तृत विधि (Detail Method) से हल करने का प्रयास करें।

दूसरी स्थिति: मिश्र आवर्ती दशमलव

नियम: एक मिश्र आवर्ती दशमलव उस साधारण भिन्न के बराबर है जिसका अंश दशमलव के बाद स्थित सभी संख्याओं में से आवर्ती संख्या घटाने से प्राप्त हुआ हो तथा जिसके हर में आवर्ती अंकों की संख्या के बराबर '9' हो तथा अनावर्ती अंकों की संख्या के बराबर शून्य डाल दिए गए हों।

उदा. निम्नलिखित को साधारण भिन्न में बदलें।

a) $0.1\overline{8}$ b) $0.43\overline{213}$ c) $5.00\overline{983}$

हल: a) $0.18 = 0.18888$ .....(1)

$\therefore$ $10 \times 0.1\overline{8} = 1.8888$ .....(2)

$100 \times 0.1\overline{8} = 18.8888$ .....(3)

(3) में से (2) को घटाने पर,

$90 \times 0.1\overline{8} = 18 - 1$

$\therefore$ $0.1\overline{8} = \frac{17}{90}$

नियम का प्रयोग करने पर, अंश = 18 – 1 (दशमलव के बाद की संपूर्ण संख्या-अनावर्ती संख्या) एवं हर = 90 (क्योंकि यहाँ एक आवर्ती अंक के लिए '9' एवं अनावर्ती अंक के लिए शून्य डालने का विधान है।)

$\therefore$ अभीष्ट साधारण भिन्न = $\frac{17}{90}$

b) $0.43\overline{213}$ अंश = 43213 – 43 = 43170

हर = 99900 [चूँकि यहाँ 3 आवर्ती अंक एवं 2 अनावर्ती अंक हैं।]

yoursmahboob

$\therefore$ अभीष्ट भिन्न $= \frac{43170}{99900}$

c) $5.00\overline{983} = 5\frac{00983 - 00}{99900} = 5\frac{983}{99900}$

उदा. (b) एवं उदा.-(c) को विस्तृत विधि से भी हल करें

सन्निकटन एवं संक्षिप्तीकरण (Approximation and Contraction)

नियम: अंतिम अंक में 1 जोड़ दिया जाता है यदि उसके बाद का अंक 5 या उससे अधिक हो।

उदाहरण के लिए,

(i) 0.3689 का दशमलव के तीन अंकों तक सन्निकट मान 0.369 है।

(ii) 0.3684 का दशमलव के दो अंकों तक सन्निकट मान 0.368 है।

(iii) 0.3685 का दशमलव के तीन अंकों तक सन्निकट मान 0.369 है

(iv) 0.3689 का दशमलव के दो अंकों तक सन्निकट मान 0.37 है।

(v) दशमलव के एक स्थान तक 0.3468 का सन्निकट मान = 0.3

नोट: जो दशमलव एक, दो, तीन .... स्थानों तक सही है वे क्रमशः निकटतम 10वें, सौवें, हजारवें ... तक शुद्ध माने जाते हैं।

सार्थक अंक (Significant Figures)

सार्थक अंकों (significant figures) की संकल्पना को निम्नलिखित उदाहरणों के सहारे समझा जा सकता है।

a) किसी स्थान की जनसंख्या निकटतम हजार तक शुद्ध 189000 है। यहाँ 1000 को एक इकाई मान लिया गया है तथा इस इकाई में जनगणना 189 इकाई है। संख्या 189, 189 इकाइयों की संख्या बताती है, गणना की दृष्टि से सार्थक है जबकि अंतिम तीनों शून्य जो इकाई के परिमाण सूचित करते हैं, निरर्थक (non-significant) कहे जाते हैं।

b) दो स्थानों के बीच की दूरी 1400 किलोमीटर है, जबकि गणना निकटतम किलोमीटर तक शुद्ध है। यहाँ संख्या 1400 सार्थक है और कोई निरर्थक शून्य नहीं है।

c) दो स्थानों के बीच की दूरी 1400 किलोमीटर है, जबकि गणना निकटतम सैकड़ा के स्थान तक शुद्ध है। यहाँ संख्या 14 सार्थक है, जबकि अंतिम दोनों शून्य निरर्थक (non-significant) हैं।

d) एक धागे की लंबाई 0.07 सेंटीमीटर है, जबकि गणना दशमलव के दूसरे स्थान तक शुद्ध है। इसलिए यहाँ 7 एक सार्थक संख्या है, जबकि आरंभ का शून्य निरर्थक (non-significant) है।

नोट: किसी दशमलव के आरंभ में मौजूद शून्य हमेशा निरर्थक होते हैं।

इससे स्पष्ट है कि सार्थक अंक वे अंक हैं, जो किसी निकटतम परिमाण में किसी इकाई तक शुद्ध इकाइयों की संख्या प्रकट करते हों।

संक्षिप्त संकलन (Contracted Addition)

नियम: दशमलव को एक-दूसरे के नीचे सजाकर लिख दें। फिर परंपरागत विधि से जोड़ने

yourmahboob

की क्रिया संपन्न करें। इस बात का ख्याल रखें कि उत्तर में लिखे गए अंक के ठीक बाद वाला अंक यदि 5 या उससे बड़ा हो तो लिखे गए अंक में 1 जोड़ दें।

उदा. 320.4321, 29.042934, 0.0085279 एवं 0.3412 का योगफल दशमलव के तीन स्थानों तक निकालें।

हल:

```
320.4321
  29.04293
    .00852
    .3412
 ---------
349.82475
```

उत्तर = 349.825

ध्यान दें: यदि प्रश्न में दशमलव के तीन स्थानों तक गणना करने के लिए कहा गया हो तो जोड़ने की प्रक्रिया में 5 से अधिक दशमलव स्थानों का प्रयोग नहीं करें।

संक्षिप्त व्यवकलन (Contracted Subtraction)

नियम: परंपरागत विधि से घटाने की क्रिया संपन्न करें। इस बात का ध्यान रखें कि उत्तर में दशमलव के जितने स्थानों तक का उल्लेख आवश्यक हो गणना के दौरान उससे दो अधिक दशमलव स्थानों का प्रयोग करें।

उदा. 160.342195 – 32.004832 की गणना दशमलव के चार स्थानों तक करें।

हल: चूँकि प्रश्न में 'दशमलव के चार स्थानों तक' का उल्लेख है, इसलिए गणना के दौरान छः से अधिक दशमलव स्थानों का प्रयोग नहीं करेंगे।

```
160.342195
  32.004832
 ----------
128.337363
```

∴ उत्तर = 128.33174

अभ्यास प्रश्न

1. निम्नलिखित दशमलव को न्यूनतम पदों में स्थित भिन्न के रूप में व्यक्त कीजिए:
   a) 0.0375 b) 0.00625 c) 1.008125
2. सरल करें:
   a) 0.25 + 0.036 + 0.0075 b) 34.07 + 0.007 + 0.07
   c) 30.9 + 3.09 + 0.309 + 0.039 d) 35 – 7.892 + 0.005 – 10.345
   e) 0.6 + 0.66 + 0.066 – 6.606 + 66.06
3. निम्नलिखित में से दशमलव हटा दें:
   a) 0.35×10^6 b) 0.275×10^{-7}
   c) 0.0034 × 10000 d) 0.132 × 500
   e) 5.302 × 513

yoursmahboob

4. भाग दें:

a) 28.9 में 17 से b) 0.457263 में 18 से c) 64 में 800 से
d) 64 में 0.008 से e) 2.375 में 0.0005 से f) 0.1 में 0.0005 से
g) 0.1 में 5000 से

5. दशमलव के तीन अंकों तक भागफल ज्ञात करें:

a) $0.5 \div 0.71$ b) $4.321 \div 0.77$ c) $5.002 \div 0.00078$

6. सरल करें:

a) $12 \div 0.09$ का 0.3×2 b) $\dfrac{0.0025 \times 1.4}{0.0175}$

c) $\dfrac{9.5 \times 0.085}{0.0017 \times 0.19}$ d) $\dfrac{3}{11}$ का 0.176

7. प्रश्न चिह्न (?) की जगह क्या होना चाहिए?

a) $3 \times 0.3 \times 0.03 \times 0.003 \times 300 = ?$
b) $0.25 \div 0.0025 \times 0.025$ का $2.5 = ?$
c) $0.00033 \div 0.11$ का $30 \times 100 = ?$
d) $0.8 \times ? = 0.00004$

e) $\dfrac{3420}{19} = \dfrac{?}{0.01} \times 7$

f) $\dfrac{17.28 + 7}{3.6} \times 0.2 = 400$

g) $\sqrt{\dfrac{0.324 \times 0.081 \times 4.624}{1.5625 \times 0.0289 \times 72.9 \times 64}} \div ?$

h) $\dfrac{20 + 8 \times 0.05}{40 - ?} = 16$

i) ? % of $10.8 = 32.4$
j) $3.79 \times 31 + 3.79 \times 37 + 3.79 \times 32 = ?$
k) $321 \times 11.54 - 203 \times 11.54 - 105 \times 11.54 = ?$

l) $(1.27)^3 + 3(1.23)^2 \times 1.27 + 3(1.27)^2 \times 1.23 + (1.23)^3 = ?$

m) $(2.3)^3 - 3 \times (2.3)^2 \times (0.3) + 3(2.3)(0.09) - (0.3)^3 = ?$

8. निम्नलिखित भिन्नों के संदर्भ में बताएँ कि इनका समतुल्य दशमलव भिन्न अंतमुक्त है या अंतहीन:

a) $\dfrac{1}{6}$ b) $\dfrac{8}{625}$ c) $\dfrac{17}{90}$ d) $\dfrac{104}{111}$ e) $\dfrac{33}{165}$

yoursmahboob

9. निम्नलिखित आवर्ती दशमलव को साधारण भिन्न के रूप में अभिव्यक्त कीजिए:

a) $0.\overline{3}$ b) $0.\overline{037}$ c) $0.\overline{09}$ d) 2.432 e) $10.0\overline{36}$

10. यदि $\frac{1}{36.18} = 0.0276$ तो $\frac{1}{0.0003618}$ का मान क्या होगा?

11. यदि 13324 : 145 = 91.9 तो 133.24 ÷ 9.19 का मान क्या होगा?

12. यदि $\sqrt{5} = 2.24$ तो $\frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{5} - 0.48} = ?$

13. यदि $\sqrt{15} = 3.88$ तो $\sqrt{\frac{5}{3}} = ?$

14. यदि $\sqrt{2916} = 54$ तो

$\sqrt{29.16} + \sqrt{0.2916} + \sqrt{0.002916} + \sqrt{0.00002916}$ का मान क्या होगा?

15. एक सेकेंड घंटे का कौन-सा दशमलव है?

16. यदि $1.5x = 0.05y$ तो $\frac{y - x}{y + x} = ?$

17. $(0.\overline{6} + 0.\overline{7} + 0.\overline{8} + 0.\overline{3}) \times 9000 = ?$

18. $(0.3\overline{467}) + (0.\overline{45} \times 0.\overline{5} \times 11) = ?$

उत्तर

1. a) $0.0375 = \frac{375}{10000} = \frac{3}{80}$

b) $0.00625 = \frac{625}{100000} = \frac{1}{160}$

c) $1.008125 = 1\frac{8125}{1000000} = 1\frac{13}{1600}$

2. a) 0.2935 b) 34.147 c) 34.338
d) 16.768 e) 60.78

3. a) 35×10^4 b) 275×10^{-10} c) 34
d) 66 e) 2719926×10^{-3}

4. a) 1.7 b) 0.0254035 c) 0.08
d) 8000 e) 4750 f) 200
g) 0.00002

yoursmahboob

5. a) 0.704 b) 5.612 c) 6412.821
6. a) 888.88 b) 0.2 c) 2500
   d) 0.048
7. a) 0.0243 b) 6.25 c) 0.01
   d) 0.00005 e) 0.257 f) 0.0024

g) $\sqrt{\dfrac{0.324\times0.081\times4.624}{1.5625\times0.0289\times72.9\times64}}$

$= \sqrt{\dfrac{324\times81\times4624\times10^{-9}}{15625\times289\times729\times64\times10^{-9}}}$

$= \dfrac{18\times9\times68}{125\times17\times27\times8} = 0.024$

h) 38.725

i) 300

j) प्रदत्त व्यंजक $= 3.79(31+37+32) = 3.79(100) = 379$

k) प्रदत्त व्यंजक $= 11.54(321-203-105) = 11.54\times13 = 150.02$

l) प्रदत्त व्यंजक $= (1.27+1.23)^3 = (2.5)^3 = 15.625$

m) प्रदत्त व्यंजक $= (2.3-0.3)^3 = 2^3 = 8$

8. यदि किसी साधारण भिन्न का हर 2 या 5 के घात अथवा उनके गुणनफल के रूप में व्यक्त हो सकता हो तो भिन्न अंतयुक्त दशमलव में बदला जा सकता है इसी नियम के सहारे,

a) $\frac{1}{6}$ एक अंतहीन दशमलव में व्यक्त होगा क्योंकि इसके हर में 2 के अतिरिक्त 3 भी शामिल है।

b) $\frac{8}{625} = \frac{8}{(5)^4}$ अन्तयुक्त दशमलव के रूप मे व्यक्त हो सकता है, क्योंकि इसके हर में केवल 5 का घात मौजूद है।

c) $\frac{17}{90} = \frac{17}{2\times3\times3\times5}$ अंतहीन है, क्योंकि इसके हर में 3 भी शामिल है।

d) $\frac{104}{111} = \frac{104}{3\times37}$ अंतहीन है।

e) $\frac{33}{165} = \frac{1}{5}$ अन्तयुक्त है।

9. a) $0.\overline{3} = \frac{3}{9}$ b) $0.0\overline{37} = \frac{37}{999}$

yoursmahboob

c) $0.\overline{09} = \frac{9}{99} = \frac{1}{11}$ d) $2.4\overline{32} = 2\frac{432-4}{990} = 2\frac{428}{990} = 2\frac{214}{495}$

e) $10.03\overline{6} = 10\frac{36-3}{900} = 10\frac{33}{900} = 10\frac{11}{300}$

10. $\frac{1}{0.0003618} = \frac{1}{(36.18)\times(10)^{-5}} = \frac{(10)^5}{36.18} = (0.0276)\times 10^5 = 2760$

इस प्रश्न को विस्तृत विधि से हल न करें। यदि आप निम्नलिखित बिन्दुओं पर ध्यान दें तो क्षण भर में प्रश्न हल हो जाएगा

i) $\frac{1}{36.18}$ से $\frac{1}{0.0003618}$ प्राप्त करने के लिए हर में दशमलव को बायीं ओर 5 स्थान खिसका देते हैं।

ii) 0.0276 से उत्तर प्राप्त करने के लिए दशमलव को दायीं ओर 5 अंक खिसका देना होगा।

नोट: बिना विस्तार में गए हुए हम उत्तर पा सकते हैं। चूँकि $\frac{1}{0.003618} > \frac{1}{36.18}$ से बड़ा है इसलिए अभीष्ट उत्तर भी 0.0276 से बड़ा होगा। इसलिए अभीष्ट बृहत् मान दशमलव को दायीं ओर खिसका कर प्राप्त किया जा सकता है।

11. 13324 : 145 – 91.9

या, 13324 ÷ 91.9 = 145

तो, 133.24 ÷ 9.19 = ?

उत्तर प्राप्त करने के लिए भाज्य के पूर्ण संख्या को भाजक के पूर्ण संख्या से विभाजित कीजिए और भागफल में पूर्ण संख्या के अंकों की संख्या का पता लगाइए।

प्रश्न में प्रदत्त 133 को 9 से विभाजित करने पर जो भागफल मिलता है उसमें दो अंक (पूर्ण संख्या) हैं। इसलिए हमारे उत्तर में दो अंकों वाली पूर्ण संख्या होगी।

∴ अभीष्ट उत्तर = 14.5

12. $\frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{5}-0.48} = \frac{6.72}{4} = 1.68$

13. $\sqrt{15} = 3.89 \Rightarrow \frac{\sqrt{15}}{3} = \frac{3.89}{3} \Rightarrow \sqrt{\frac{15}{9}} = 1.296 \rightarrow \sqrt{\frac{5}{3}} = 1.296$

14. यदि $\sqrt{2916} = 54$ तो प्रदत्त व्यंजक = 5.4 + .54 + .054 + .0054 = 5.9994

15. $\frac{1}{60\times 60} = 0.00028$ (लगभग)

16. 1.5x = 0.05y

yoursmahboob

या, $\frac{x}{y} = \frac{0.05}{1.5}$

कंपोनेंडो एवं डिविडेन्डो (Componendo-Dividendo) के नियम से,

$$\frac{y-x}{y+x} = \frac{1.5-0.05}{1.5+0.05} = 0.935$$

17. प्रदत्त व्यंजक $= \left[\frac{6}{9}+\frac{7}{9}+\frac{8}{9}-\frac{3}{9}\right]\times 9000$

$$= \frac{24}{9}\times 9000 = 24000$$

18. प्रदत्त व्यंजक $= \left[\frac{3467-3}{9990}\right]+\left[\frac{45}{99}\times\frac{5}{9}\right]\times 11$

$$= \frac{3464}{9990}+\frac{225}{81} = \frac{93642}{9990\times 3}$$

$$= \frac{31214}{9990} = \frac{15607}{4995}$$

yoursmahboob

संख्या पद्धति

(Number System)

अंकगणित संख्याओं एवं उनके बीच के संबंधों का विज्ञान है। इसके अंतर्गत उन विधियों एवं प्रक्रियाओं का अध्ययन किया जाता है, जो खास तौर से संख्याओं पर ही लागू होते हैं।

संख्याओं को 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 एवं 0, जिसे अंक कहा जाता है के सहारे व्यक्त करते हैं। इनमें से '0' को असार्थक (insignificant) अंक एवं शेष को सार्थक (significant) अंक कहा जाता है।

संख्यांक (Numeral): अंकों का ऐसा समूह, जो किसी संख्या को व्यक्त करता हो, संख्यांक या Numeral कहलाता है। संख्याओं को निम्नलिखित वर्गों में विभाजित किया जाता है।

***प्राकृत संख्या* (Natural Number):** जिन संख्याओं का इस्तेमाल वस्तुओं को गिनने के लिए किया जाता हो, उन्हें प्राकृत संख्या कहते हैं। इन्हें 'N' से सूचित किया जाता है।

$N = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$

***पूर्ण संख्या* (Whole Number):** जब प्राकृत संख्याओं के परिवार में '0' को भी शामिल कर लेते हैं, तब हमें पूर्ण संख्याओं का परिवार मिलता है। इसे W से सूचित करते हैं।

$W = \{0, 1, 2, 3, 4, 5 \ldots\}$

***रूढ़ संख्या* (Prime Number):** 1 के अतिरिक्त वे समस्त संख्याएँ जो 1 और स्वयं को छोड़कर अन्य किसी भी संख्या से विभाजित नहीं होती हों, रूढ़ संख्याएँ कहलाती हैं। इसे अभाज्य संख्या भी कहते हैं।

उदाहरण: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 ....

***रूढ़ संख्या की जाँच* (To test whether a given number is prime)**

यदि आप इस बात का पता लगाना चाहते हैं कि प्रदत्त संख्या रूढ़ है या नहीं, तो यह नुस्खा आजमाइए। प्रदत्त संख्या के संभावित वर्गमूल से बड़ी कोई संख्या लीजिए। मान लीजिए, यह संख्या x है। अब x से छोटी समस्त रूढ़ संख्याओं से प्रदत्त संख्या की विभाज्यता का परीक्षण कीजिए। यदि यह इनमें से किसी से भी विभाज्य नहीं है तो यह निश्चित रूप से एक रूढ़ संख्या होगी। यदि यह रूढ़ नहीं है तो इसे यौगिक (composite) संख्या कहेंगे.

उदा. 1: क्या 349 एक रूढ़ संख्या है?

हल: 349 का संभावित वर्गमूल है 19 19 से छोटी सभी रूढ़ संख्याएँ हैं: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17.

स्पष्ट है कि 349 इनमें से किसी से भी विभाज्य नहीं है। इसलिए 349 एक रूढ़ संख्या है।

उदा. 2: क्या 881 एक रूढ़ संख्या है?

हल: 881 का संभावित वर्गमूल है 30A

30 से छोटी रूढ़ संख्याएँ हैं: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29। चूँकि 881 उपर्युक्त किसी भी संख्या से विभाज्य नहीं है, इसलिए यह एक रूढ़ संख्या है।

उदा. 3: क्या 979 एक रूढ़ संख्या है?

हल: 979 का संभावित वर्गमूल है 32।

yousmabbooo

32 से छोटी रूढ़ संख्याएँ हैं: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31 . चूँकि 979, 11 से विभाज्य है। इसलिए यह रूढ़ संख्या नहीं है।

उदा. 4: क्या 857, 509, 757, 1003, 1009, 919, 913, 647, 649, 657 एवं 659 रूढ़ संख्याएँ हैं। [इन्हें स्वयं हल करें]

***यौगिक संख्या* (Composite Number):** 1 के अतिरिक्त वे समस्त संख्याएँ, जो रूढ़ नहीं हैं, यौगिक कहलाती हैं। इसे संयुक्त संख्या भी कहा जाता है। उदाहरण के लिए 4, 6, 8, 9, 12, 14 यौगिक संख्याएँ हैं।

***सम संख्या* (Even Number):** वे सभी संख्याएँ, जो 2 से पूरी तरह विभाजित हो जाती हैं, सम संख्या कहलाती हैं। उदाहरण के लिए 2, 4, 6, 12, 24, 28 .... , सम संख्याएँ हैं। इसका स्वरूप है 2n, जहाँ n एक पूर्ण संख्या है।

***विषम संख्या* (Odd Number):** जो संख्या 2 से विभाजित नहीं होती है, उसे विषम संख्या कहा जाता है। उदा.: 3, 9, 11, 17, 19, ... आदि।

***क्रमागत संख्याएँ* (Consecutive Numbers):** संख्याओं की ऐसी श्रेणी, जिसमें प्रत्येक अपने पूर्ववर्ती संख्या से एक बड़ा हो, क्रमागत संख्या कहलाती है। उदाहरण के लिए 6, 7, 8 या 13, 14, 15, 16 या 101, 102, 103, 104, 105 ... क्रमागत संख्याएँ हैं।

***पूर्णांक* (Integers):** संख्याओं का ऐसा समुच्चय जिसमें पूर्ण संख्याओं के साथ साथ ऋणात्मक संख्याएँ भी सम्मिलित हों, पूर्णांक संख्याएँ कहलाती हैं। इसे I से सूचित किया जाता है। उदाहरण के लिए, $I = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5 ...\}$

***परिमेय संख्या* (Rational Number):** भिन्न के रूप में लिखी गई संख्याएँ परिमेय कहलाती हैं। इन्हें Q से सूचित किया जाता है जैसे, $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{8}{9}, \frac{13}{15}$ आदि।

अथवा,

वे संख्याएँ, जिन्हें $\frac{a}{b}$ (जहाँ a एवं b पूर्णांक हैं, तथा $b \neq 0$) के रूप में लिखा जा सके, परिमेय संख्याएँ कही जाती हैं।

***अपरिमेय संख्या* (Irrational Number):** वे संख्याएँ जिन्हें p/q (जहाँ p एवं q पूर्णांक संख्याएँ है और $q \neq 0$) के रूप में नहीं लिखा जा सके अपरिमेय (Irrational) कहलाती हैं।

उदाहरण के लिए, $\sqrt{3} = 1.732...$, $\sqrt{2} = 1.414...$

पर, आवर्ती दशमलव जैसे $\frac{8}{3} = 2.666$ या $2.\overline{6}$ को p/q के रूप में लिखा जा सकता है। इसलिए यह एक परिमेय संख्या है।

***वास्तविक संख्या* (Real Number):** परिमेय एवं अपरिमेय संख्याओं के परिवार को सम्मिलित रूप से वास्तविक संख्या कहते हैं।

yoursmahboob

किसी भी संख्या के अंकों के मान

किसी भी संख्या के अंकों के दो मान होते हैं।

(i) नैज मान (Intrinsic Value)

(ii) स्थानिक मान (Local Value or Place Value)

उदाहरण के लिए किसी संख्या 5347 में अंक 3 का नैज मान 3 इकाइयाँ है जबकि उसका स्थानिक मान तीन सौ है।

इसके अतिरिक्त, एक निश्चित अंकों वाली सबसे बड़ी संख्या (greatest number) वह संख्या होगी जिसमें प्रत्येक अंक 9 होगा तथा छोटी से छोटी संख्या (least number) वह संख्या होगी जिसमें पहला अंक 1 तथा उसके दायीं ओर के शेष अंक शून्य होंगे। उदाहरण के लिए पाँच अंकों की सबसे बड़ी संख्या 99999 तथा सबसे छोटी संख्या 10000 होगी।

सरलीकरण के नियम (Rule of Simplification)

i) किसी व्यंजक के सरलीकरण के क्रम में, सर्वप्रथम रेखा कोष्ठक (vinculum) को हटाने का प्रयास किया जाता है। उदाहरण के लिए, $-8-10-\overline{-18}$

लेकिन $\overline{8-10}=-(-2)=2$

ii) रेखा-कोष्ठक हटाने के बाद (), {} एवं [] के क्रम में कोष्ठकों को क्रिया करनी चाहिए।

iii) कोष्ठकों को निपटाने के बाद निम्नलिखित क्रम में अन्य गणितीय क्रियाएँ की जानी चाहिए:

(a) of (का), (b) भाग, (c) गुणा, (d) जोड़ एवं (e) घटाव

नोट: इस नियम को VBODMAS भी कहते हैं, जहाँ V = Vinculm (रेखा-कोष्ठक), B = Brucket (कोष्ठक), O = Of (का), D = Division (भाग), M = Multiplication (गुणा), A = Addition (जोड़), S = Subtraction (घटाव)

उदा. सरल करें: $1+\frac{3}{7}$ का $\left(6+8\times\overline{3-2}\right)+\left[\frac{1}{5}\div\frac{7}{25}-\left\{\frac{3}{7}+\frac{8}{14}\right\}\right]$

हल: $1\div\frac{3}{7}$ का $(6+8\times1)+\left[\frac{1}{5}\div\frac{7}{25}-\frac{14}{14}\right]$

$=1+\frac{3}{7}$ का $(6+8)+\left[\frac{1}{5}\times\frac{25}{7}-1\right]$

$=1\div\frac{3}{7}$ का $14+\left[\frac{5}{7}-1\right]$

$=1+6+\left[-\frac{2}{7}\right]$

$=\frac{1}{6}-\frac{2}{7}=\frac{7-12}{42}=-\frac{5}{42}$

yoursmahboob

अंकगणितीय समस्याओं के सरलीकरण के सामान्य-नियम

1) $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

या, $\frac{a^2-b^2}{a+b}=a-b$

या, $\frac{a^2-b^2}{a-b}=a+b$

2) $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

3) $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

4) $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 = a^3+b^3+3ab(a+b)$

5) $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3 = a^3-b^3-3ab(a-b)$

6) $\frac{a^3+b^3}{a^2-ab+b^2}=a+b$ या, $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

7) $\frac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2}=a-b$ या, $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

8) $\frac{a^3+b^3+c^3-3abc}{a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca}=(a+b+c)$

9) $a^x \times a^y = a^{x+y}$

10) $a^x \div a^y = a^{x-y}$

11) $(a^x)^y = a^{xy}$

12) $a^x=b^x \Rightarrow$ या तो $a=b$ या, $x=0$

13) $a^x=a^y \Rightarrow$ या तो $x=y$ या, $a=0, 1$

14) $a^x=1 \rightarrow x=0$ (a के सभी मानों के लिए, '0' को छोड़कर)

***परिमेय संख्याओं के आरोही एवं अवरोही क्रम* (Ascending or Descending Orders in Rational Numbers)**

इस अध्याय के अन्तर्गत, सर्वप्रथम, दो परिमेय संख्याओं की परस्पर तुलना करने पर विचार किया जाएगा।

नियम 1: यदि किसी भिन्न का अंश एवं हर समान रूप से बढ़ाया जाए, तो इस तरह प्राप्त अंतिम भिन्न सबसे बड़ा होता है।

yoursmahboob

उदा. 1: निम्नलिखित में से कौन-सा भिन्न सबसे बड़ा है? $\frac{3}{4}, \frac{4}{5}$ एवं $\frac{5}{6}$

हल: यहाँ प्रदत्त भिन्नों के अंश एवं हर दोनों में क्रमशः 1 की वृद्धि हो रही है। इसलिए आखिरी भिन्न $\frac{5}{6}$ ही सबसे बड़ा है।

उदा. 2: निम्नलिखित भिन्नों में कौन सबसे बड़ा है? $\frac{2}{5}, \frac{4}{7}$ एवं $\frac{6}{9}$

हल: यहाँ प्रदत्त भिन्नों के अंश एवं हर दोनों ही क्रमशः 2 से बढ़ रहे हैं। इसलिए आखिरी भिन्न $\frac{6}{9}$ ही सबसे बड़ा है।

उदा. 3: निम्नलिखित में से कौन-सा भिन्न सर्वाधिक बड़ा है? $\frac{1}{8}, \frac{4}{9}$ एवं $\frac{7}{10}$

हल: यहाँ अंश में 3 की वृद्धि हो रही है और हर में 1 की। इसलिए आखिरी भिन्न $\frac{7}{10}$ सबसे बड़ा है।

इस प्रकार नियम का सामान्य रूप इस तरह हुआ:

$\frac{x}{y}, \frac{x+a}{y+b}, \frac{x+2a}{y+2b}, \frac{x+3a}{y+3b} \ldots \frac{x+na}{y+nb}$ जैसे भिन्नों में $\frac{x+na}{x+nb}$ का मान सर्वाधिक है, जबकि

i) $a = b$ या, ii) $a > b$

पर जरा इस परिस्थिति की तुलना कीजिए, जब $a < b$.
निम्नलिखित उदाहरण देखिए,

उदा. 4: निम्नलिखित में कौन सबसे बड़ा है? $\frac{1}{8}, \frac{2}{12}, \frac{3}{16}$ एवं $\frac{4}{20}$

हल: उपर्युक्त उदाहरण में अंश एवं हर असमान स्थिरांकों के अंतर से बढ़ते हैं: अंश में एक की वृद्धि हो रही है और हर में 4 की। यदि उपर्युक्त भिन्नों को दशमलव में बदल दें तो पाएँगे कि ये भिन्न आरोही (बढ़ते क्रम) क्रम में लिखे गए हैं। इसलिए श्रेणी का अंतिम भिन्न $\frac{4}{20}$ सबसे बड़ा है।

उदा. 5: निम्नलिखित में से कौन सा भिन्न सबसे बड़ा है? $\frac{2}{7}, \frac{4}{15}$ एवं $\frac{6}{23}$

yoursmathboob

हल: यहाँ अंश में क्रमशः 2 की वृद्धि हो रही है एवं हर में 8 की। पर अंतिम भिन्न $\frac{6}{23}$ सबसे छोटा है।

नोट: उपर्युक्त दोनों उदाहरणों से पता चलता है कि यदि a < b, तो उपर्युक्त नियम पर पूरा तरह भरोसा नहीं किया जा सकता। इसलिए, उपर्युक्त नियम का इस्तेमाल करते वक्त सावधानी बरतें।

उपर्युक्त नियम लागू होता है यदि

$$\frac{\text{अंश में वृद्धि}}{\text{हर में वृद्धि}} > \text{पहला भिन्न}$$

पर यदि,

$$\frac{\text{अंश में वृद्धि}}{\text{हर में वृद्धि}} < \text{पहला भिन्न}$$

तो अंतिम भिन्न सबसे छोटा होता है।

$$\text{जब } \frac{\text{अंश में वृद्धि}}{\text{हर में वृद्धि}} = \text{पहला भिन्न}$$

तब सभी भिन्न आपस में बराबर होते हैं।

नियम-2: वज्र-गुणन के बाद जिस भिन्न का अंश सबसे बड़ा हो जाता है, वह भिन्न सबसे बड़ा होता है।

उदा. 6: निम्नलिखित में से कौन बड़ा है: $\frac{5}{8}$ या $\frac{9}{14}$?

हल: विद्यार्थी ऐसे प्रश्न को हल करने के लिए या तो भिन्न को दशमलव में बदल देते हैं या हर को समान बनाने की कोशिश करते हैं। पर निम्नलिखित विधि से कम उत्तर तक बड़ी आसानी से पहुँच सकते हैं

पहला चरण: प्रदत्त भिन्नों का वज्र गुणन करें

$$\frac{5}{8} \quad \frac{9}{14}$$

$5 \times 14 = 70$ एवं $9 \times 8 = 72$

दूसरा चरण: चूँकि $72 > 70$ एवं 72 से संबद्ध अंश है '9'। इसलिए भिन्न $\frac{9}{14}$ बड़ा है।

उदा. 7: निम्नलिखित में से कौन बड़ा है: $\frac{4}{15}$ या $\frac{6}{23}$?

पहला चरण: $4 \times 23 > 15 \times 6$

yoursmahboob

दूसरा चरण: चूँकि 4×23, 4 से संबद्ध है, इसलिए $\frac{4}{15}$ बड़ा है।

उदा. 8: निम्नलिखित में से कौन बड़ा है: $\frac{13}{15}$ या $\frac{20}{23}$?

हल: **पहला चरण:** $13 \times 23 < 15 \times 20$

दूसरा चरण: $\frac{20}{23}$ बड़ा है।

आप देख ही चुके हैं कि गणना की यह विधि कितनी तेज रफ्तार से काम करती है। यदि अभ्यास कर लें तो गणना की जरूरत ही नहीं पड़ेगी। आप सीधे उत्तर तक पहुँच सकते हैं। इस प्रकार दिए गए भिन्न को आरोही या अवरोही क्रम में सजाना अब मुश्किल नहीं रहा। आप किसी भी दो भिन्न को एक साथ चुन लें, पता लगाएँ कि इनमें कौन बड़ा है। इस प्रकार दिए गए भिन्नों को वांछित क्रम में सजाया जा सकता है।

नोट: कभी-कभी जब प्रदत्त भिन्न छोटे परिमाण वाले (10 से कम) होते हैं, तब परंपरागत विधि अधिक सुविधाजनक प्रतीत होती है। इस विधि के अंतर्गत या तो प्रदत्त भिन्नों को दशमलव रूप में बदल देते हैं या फिर हरों का लघुत्तम समापवर्त्य (LCM) निकालकर इन्हें समीकृत (equate) किया जाता है।

उदा. 9: निम्नलिखित भिन्नों को आरोही क्रम में सजाएँ: $\frac{3}{7}, \frac{4}{5}, \frac{7}{9}, \frac{1}{2}$ एवं $\frac{3}{5}$

हल: **पहली विधि:**

7, 5, 9, 2 एवं 5 का लघुत्तम समापवर्त्य = 630

दिए गए भिन्नों को समीकृत करने के लिए लघुत्तम समापवर्त्य में हर से भाग देते हैं तथा भागफल से संबद्ध अंश में गुणा कर देते हैं। जैसे, $\frac{3}{7}$ के संदर्भ में $630 \div 7 = 90$, इसलिए 3 में 90 से गुणा करें। इस प्रकार दिए गए भिन्न क्रमशः निम्नलिखित रूप में तब्दील हो जाते हैं:

$$\frac{270}{630}, \frac{504}{630}, \frac{490}{630}, \frac{315}{630} \text{ एवं } \frac{378}{630}$$

जिस भिन्न का अंश सबसे बड़ा है, निश्चय ही वह भिन्न भी सबसे बड़ा होगा। इस प्रकार,

$$\frac{504}{630} > \frac{490}{630} > \frac{378}{630} > \frac{315}{630} > \frac{270}{630}$$

या, $\frac{4}{5} > \frac{7}{9} > \frac{3}{5} > \frac{1}{2} > \frac{3}{7}$

दूसरी विधि: भिन्नों को दशमलव में बदल डालें:

$$\frac{3}{7} = 0.428, \frac{4}{5} = 0.8, \frac{7}{9} = 0.777, \frac{1}{2} = 0.5, \frac{3}{5} = 0.6$$

yoursmahboob

निश्चय ही $\frac{4}{5} > \frac{7}{9} > \frac{3}{5} > \frac{1}{2} > \frac{3}{7}$

तीसरी विधि: वज्र-गुणन विधि:

पहला चरण: सर्वप्रथम प्रथम दो भिन्नों को लेते हैं। वज्र-गुणन विधि से (जैसा कि नियम-2 में बताया गया है) बड़ा भिन्न प्राप्त करते हैं।

$$\frac{3}{7} \quad \frac{4}{5}$$

$3 \times 5 < 7 \times 4$

$\therefore \frac{4}{5} > \frac{3}{7}$

दूसरा चरण: अब तीसरे भिन्न को लीजिए। उपर्युक्त चरण से प्राप्त बड़े भिन्न के साथ इसका वज्र-गुणन कीजिए।

$$\frac{4}{5} \quad \frac{7}{9}$$

$4 \times 9 > 7 \times 5$

$\therefore \frac{4}{5} > \frac{7}{9}$

इस प्रकार हम पाते हैं कि $\frac{7}{9}$, $\frac{3}{7}$ के बाद आता है या फिर $\frac{4}{5}$ एवं $\frac{3}{7}$ के बीच में आता है। इसलिए हम $\frac{3}{7}$ एवं $\frac{7}{9}$ पर वज्र-गुणन की क्रिया करते हैं और पाते हैं कि $\frac{7}{9} > \frac{3}{7}$

$\therefore \frac{4}{5} > \frac{7}{9} > \frac{3}{7}$

तीसरा चरण: अब अगले भिन्न को लीजिए। $\frac{3}{7}$ एवं $\frac{1}{2}$ पर वज्र गुणन की क्रिया कीजिए। और हमलोग देखते हैं कि $\frac{1}{2} > \frac{3}{7}$

फिर यही क्रिया $\frac{7}{9}$ एवं $\frac{1}{2}$ के साथ दुहराइए। $\Rightarrow \frac{7}{9} > \frac{1}{2}$

इसलिए $\frac{4}{9} > \frac{7}{9} > \frac{3}{5} > \frac{1}{2} > \frac{3}{7}$

इसी प्रकार की क्रियाएँ दुहराकर हम अंतिम परिणाम भी पा लेते हैं: $\frac{4}{5} > \frac{7}{9} > \frac{3}{5} > \frac{1}{2} > \frac{3}{7}$

yoursmartboob

नोट: इस विधि की कुछ खामियाँ भी हैं, पर यदि आप दक्षता हासिल कर लें तो शीघ्रता से अंतिम परिणाम तक पहुँच सकते हैं। इस विधि को यों ही मत छोड़ दीजिए, इसके अपने लाभ भी हैं।

गिनती की संख्याओं से संबद्ध कुछ नियम

I. प्रथम 'n' प्राकृत संख्याओं का योग $= \frac{n(n+1)}{2}$

उदाहरण के लिए $1+2+3+...+105 = \frac{105\times(105+1)}{2} = 5565$

II. प्रथम 'n' विषम संख्याओं का योग $= n^2$

उदाहरण के लिए, $1+3+5+7 = 4^2 = 16$ (यहाँ विषम संख्याओं की संख्या 4 है)

ऐसे ही $1+3+5+...+20$ वाँ विषम संख्या $(20\times 2-1=39) = 20^2 = 400$

III. प्रथम 'n' सम संख्याओं का योग $= n(n+1)$

उदाहरण के लिए, $2+4+6+8+...+100$ (या 50वाँ सम संख्या)

$= 50\times(50+1) = 2550$

IV. प्रथम 'n' प्राकृत संख्याओं के वर्गों का योग $= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

उदाहरण के लिए: $1^2+2^2+3^2+.....+10^2$

$= \frac{10(10+1)(2\times10+1)}{6} = \frac{10\times11\times21}{6} = 385$

V. प्रथम 'n' प्राकृत संख्याओं के घनों का योग $= \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

उदाहरण के लिए,

$1^3+2^3+.....+6^3 = \left[\frac{6\times(6+1)}{2}\right]^2 = (21)^2 = 441$

नोट: 1. गिनती की प्रथम n संख्याओं में $\frac{n}{2}$ सम संख्याएँ होती हैं एवं $\frac{n}{2}$ विषम संख्याएँ, बशर्ते कि n (संख्याओं की संख्या) एक सम संख्या हो। यदि n (संख्याओं की संख्या) एक विषम संख्या हो तो $\frac{1}{2}(n+1)$ विषम संख्याएँ होंगी तथा $\frac{1}{2}(n-1)$ सम संख्याएँ होंगी।

उदाहरण के लिए 1 से 50 तक की प्राकृत संख्याओं में $\frac{50}{2} = 25$ विषम संख्याएँ है एवं $\frac{50}{2} = 25$ सम संख्याएँ हैं। 1 से 51 के बीच $\frac{51+1}{2} = 26$ विषम संख्याएँ है एवं $\frac{51-1}{2} = 25$ सम संख्याएँ है।

yoursmahboob

2. दो लगातार संख्याओं के वर्ग का अंतर हमेशा एक विषम संख्या होती है।

उदा. 1: $5^2 - 4^2 = 25 - 16 = 9$, जो कि एक विषम संख्या है।

उदा. 2: $26^2 - 25^2 = 51$, जो कि एक विषम संख्या है।

3. दो लगातार संख्याओं के वर्ग का अंतर उन दो संख्याओं के योगफल के बराबर होता है।

उदा. 1: $5^2 - 4^2 = 5 + 4 = 9$

उदा. 2: $(26)^2 - (25)^2 = 26 + 25 = 51$

कारण: $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) = (a+b) \because a - b = 1$

हल किए हुए प्रश्न:

1. 1 से 400 तक की समस्त सम संख्याओं का योगफल निकालें।

हल: 1 से 400 के बीच 400 संख्याएँ हैं

इसलिए सम संख्याओं की संख्या $= \frac{400}{2} = 200$

इसलिए सम संख्याओं का योगफल $= 200(200 + 1) = 40200$

[नियम सं. III से]

2. 1 से 361 तक की समस्त सम संख्याओं का योगफल निकालें।

हल: 1 से 361 के बीच 361 संख्याएँ हैं, इसलिए सम संख्याओं की संख्या

$= \frac{361-1}{2} = \frac{360}{2} = 180$

$\therefore$ सम संख्याओं का योगफल $= 180(180 + 1) = 32580$

3. 1 से 180 तक की समस्त विषम संख्याओं का योगफल निकालें।

हल: 1 से 180 के बीच विषम संख्याओं की संख्या $= \frac{180}{2} = 90$

$\therefore$ इन संख्याओं का योगफल $= (90)^2 = 8100$

4. 1 से 51 के बीच की समस्त विषम संख्याओं का योगफल निकालें।

हल: 1 से 51 के बीच विषम संख्याओं की संख्या $= \frac{51+1}{2} = 26$

$\therefore$ इनका योगफल $= (26)^2 = 676$

5. 20 से 101 के बीच की समस्त विषम संख्याओं का योगफल निकालें।

हल: 20 से 101 के बीच विषम संख्याओं का योगफल = (1 से 101 तक की विषम संख्याओं का योगफल) − (1 से 20 तक की विषम संख्याओं का योगफल)

= प्रथम 51 विषम संख्याओं का योगफल − प्रथम 10 विषम संख्याओं का योगफल

$= 51^2 - 10^2 = 2601 - 100 = 2501$

yoursmallboob

घात एवं घातांक (Power and Index)

यदि किसी संख्या P को n बार P से ही गुणा किया जाए तो गुणनफल को P का n वाँ घात कहते हैं और इसे P^n लिखते हैं। P^n में P को **आधार** एवं n को **घातांक** कहा जाता है।

हल किए गए प्रश्न

1. $(729)^{59}$ में इकाई के स्थान पर कौन सी संख्या है?

हल: जब 729 को 729 से गुणा करते हैं तो हमें इकाई के स्थान पर 1 प्राप्त होता है। दूसरे शब्दों में, यदि 729 पर सम घातांक हो तो हमें इकाई के स्थान पर 1 मिलेगा। इसलिए $(729)^{58}$ में इकाई के स्थान पर 1 होगा।

$(729)^{59} = (729)^{58} \times 729$

$= (\ldots1) \times 729$

– इकाई के स्थान पर 9।

2. $(623)^{36}, (623)^{38}$ एवं $(623)^{39}$ में इकाई के स्थान पर स्थित संख्या ज्ञात करें।

हल: जब 623 को आपस में गुणा करते हैं, तब हमें इकाई के स्थान पर 9 मिलता है। यदि इसे 4 बार आपस में गुणा करते हैं तो हमें इकाई के स्थान पर 1 मिलता है। इसलिए यह कहा जा सकता है कि यदि 623 को 4n बार गुणा किया जाए तो हमें इकाई के स्थान पर 1 मिलता है।

$(623)^{36} = (623)^{4\times9}$ – इकाई के स्थान पर 1

$(623)^{38} = (623)^{4\times9} \times (623)^2 = (\ldots1)\times(\ldots9)$ = इकाई के स्थान पर 9

$(623)^{39} = (623)^{4\times9} \times (623)^3 = (\ldots1)\times(\ldots7)$ = इकाई के स्थान पर 7

नोट: जब नियम संख्याओं के संदर्भ में आप ऐसे प्रश्न हल करते हैं तो प्रयास करें कि किसी तरह इकाई के स्थान पर 1 आ जाए। उपर्युक्त प्रश्न को हल करते वक्त इस बात का ध्यान रखा गया है।

3. $(122)^{20}, (122)^{22}$ तथा $(122)^{23}$ में इकाई के स्थान पर स्थित संख्या का पता लगाएँ।

हल: $(\ldots2) \times (\ldots2) = \ldots4$

$(\ldots2) \times (\ldots2) \times (\ldots2) = \ldots8$

$(\ldots2) \times (\ldots2) \times (\ldots2) \times (\ldots2) = 6$

हम जानते हैं कि $(\ldots6) \times (\ldots6) = (\ldots6)$

इस प्रकार जब 122 को 4n बार आपस में गुणा किया जाता है, तब हमें इकाई के रूप में '6' प्राप्त होता है।

$\therefore\ (122)^{20} = (122)^{4\times5} = (\ldots6)$ – इकाई के स्थान पर 6

$(122)^{22} = (122)^{4\times5} \times (122)^2 = (\ldots6)\times(\ldots4)$ – इकाई के स्थान पर 4

$(122)^{23} = (122)^{4\times5} \times (122)^3 = (\ldots6)\times(\ldots8)$ – इकाई के स्थान पर 8

yoursmahboob

4. $(98)^{40}, (98)^{42}$ एवं $(98)^{43}$ में इकाई के स्थान पर स्थित संख्या ज्ञात करें।

हल: $(98)^4 = (...6)$

$\therefore \ (98)^{4n} = (...6)$

इस प्रकार $(98)^{40} = (98)^{4\times10} = (...6)$ = इकाई के स्थान पर 6

$(98)^{42} = (98)^{4\times10} \times (98)^2 = (...6)\times(...4)$ = इकाई के स्थान पर 4

$(98)^{43} = (98)^{4\times10} \times (98)^3 = (...6)\times(...2)$ = इकाई के स्थान पर 2

नोट: यदि आधार में इकाई के स्थान पर सम संख्या हो तो उसमें इकाई के स्थान पर 6 लाने की कोशिश करें। उपर्युक्त दोनों प्रश्न (3 एवं 4) को हल करने में इस बात का ध्यान रखा गया है।

इस प्रकार उपर्युक्त प्रश्नों को हल करने के क्रम में हमें निम्नलिखित सामान्य नियम प्राप्त होते हैं।

I. यदि आधार में इकाई के स्थान पर 5 के अतिरिक्त कोई अन्य विषम संख्या हो तो इस संख्या को तब तक परस्पर गुणा करते रहें, जब तक कि इकाई के स्थान पर 1 प्राप्त नहीं हो जाता।

$(...1)^n = (...1)$

$(...3)^{4n} = (...1)$

$(...7)^{4n} = (...1)$

जहाँ $n = 1, 2, 3, ...$

II. यदि आधार में दी गई संख्या में इकाई के स्थान पर कोई सम संख्या हो तो इस संख्या को तब तक परस्पर गुणा करें जब तक कि इकाई के स्थान पर 6 न प्राप्त हो जाए।

$(...2)^{4n} = (...6)$

$(...4)^{2n} = (...6)$

$(...6)^n = (...6)$

$(...8)^{4n} = (...6)$, जहाँ $n = 1, 2, 3, 4 .....$

नोट: यदि आधार में इकाई के स्थान पर 1, 5 या 6 हों तो चाहे कितनी ही बार इन्हें आपस में गुणा कर लें, इकाई के स्थान पर 1, 5 एवं 6 ही प्राप्त होंगे।

$(...1)^n = (...1)$

$(...5)^n = (...5)$

$(...6)^n = (...6)$

yourshahboob

5. यदि 781, 325, 497 एवं 243 को आपस में गुणा किया जाए तो गुणनफल में इकाई के स्थान पर कौन-सी संख्या होगी?

हल: प्रदत्त संख्याओं में इकाई के स्थान पर स्थित सभी संख्याओं को आपस में गुणा करें:

$1 \times 5 \times 7 \times 3$; इस प्रकार गुणनफल में इकाई के स्थान पर 5 होगा।

कुछ अधिक सामान्य सूत्रों को नियम 1 तथा नियम 2 को मिलाकर बनाया जा सकता है। निम्नलिखित बिन्दुओं पर ध्यान दें :

(1) यदि हम $4n$ घात को किसी भी संख्या से बढ़ा देते हैं तो ***नई संख्या*** के इकाई का अंक 1, 5 या 6 होगा।

(2) यदि ***नई संख्या*** को हम किसी भी घात से बढ़ाते हैं, तो ***दूसरी नई संख्या*** के इकाई का अंक वही रहता है।

(3) 5 को कितनी बार भी गुणा किया जाता है तो इकाई का अंक वही रहता है (हम इससे अच्छी तरह से अवगत हैं)। अतः यह कोई समस्या खड़ा नहीं करता है।

$(6215)^x - (\ldots 5)$; यहाँ x कोई धनात्मक पूर्ण संख्या (positive integer) है।

(4) 1 के किसी भी संख्या से कितनी बार भी गुणा किया जाता है, तो वही संख्या प्राप्त होती है। अतः इकाई का अंक वही रहता है।

(5) जब एक सम संख्या को 6 से गुणा किया जाता है तो इकाई का अंक समान रहता है।

$12 \times 6 = 72$

$14 \times 6 = 84$

$16 \times 6 = 96$

$18 \times 6 = 108$

उपर्युक्त बिन्दुओं को दिमाग में रखकर हम निम्नलिखित रूप से क्रिया कर सकते हैं :

पाता कि निम्नलिखित प्रश्नों में इकाई अंक ज्ञात करना है :

1. $(623)^{49}$ 2. $(624)^{52}$ 3. $(627)^{52}$ 4. $(629)^{52}$

5. $(628)^{59}$ 6. $(625)^{62}$ 7. $(622)^{64}$

1. इस प्रकार के प्रश्नों को हल करने के लिए हम घात में 4 से भाग देते हैं तथा शेष ज्ञात करते हैं जैसा कि नीचे दिया गया है :

$49 \div 4 = 12 \times 4 + 1$

अतः $(623)^{49}$ का इकाई अंक = $(623)^1$ का इकाई अंक = 3

उसी प्रकार,

2. $(624)^{52}$ का इकाई अंक = $(624)^4$ का इकाई अंक (चूँकि $50 = 12 \times 4 + 2$) = 6

3. $(627)^{52}$ का इकाई अंक = 1 (क्योंकि 52 में 4 से भाग दिया जाता है तथा हम जानते हैं कि यदि विषम संख्या के बल 4 के अपवर्त्य (multiple) हों तो इससे इकाई अंक 1 प्राप्त होता है।)

yoursmahboob

4. $(629)^{99}$ का इकाई अंक = $(629)^{9}$ का इकाई अंक = 9
5. $(628)^{99}$ का इकाई अंक = $(628)^{9}$ का इकाई अंक = 2
6. $(625)^{99}$ का इकाई अंक = 5 {चूँकि 5 इकाई अंक को परिवर्तित नहीं करता है।}
7. $(622)^{64}$ का इकाई अंक = 6 {क्योंकि 64 में 4 से भाग दिया जाता है तथा हम जानते हैं कि यदि सम संख्या के घात 4 के अपवर्त्य (multiple) हों तो इससे इकाई अंक 6 प्राप्त होता है।}

विविध उदाहरण

भाग वाले सवाल में चार अंश होते हैं: भाज्य (Dividend), भाजक (Divisor), भागफल (Quotient) एवं शेष (Remainder)।

भाज्य = (भाजक × भागफल) + शेष

यदि पूरा-पूरा भाग हो जाए, अर्थात् शेष '0' बचे तो भाज्य = भाजक × भागफल

उदा. 1: यदि 24446 को किसी संख्या से विभाजित करने पर भागफल 79 आता है तथा शेष 35 बचता है तो वह संख्या (भाजक) क्या है?

हल: भाजक × भागफल = भाज्य – शेष

∴ 79 × भाजक = 24446 – 35 = 24411

∴ भाजक = 24411 ÷ 79 = 309

उदा. 2: उस न्यूनतम संख्या के बारे में बताइए, जिसे 8961 में जोड़े जाने पर वह 84 से पूरी तरह विभाजित हो जाए।

हल: 8961 को 84 से विभाजित करने पर शेष मिलता है 57

∴ अभीष्ट संख्या = 84 – 57 = 27

उदा. 3: वह न्यूनतम संख्या बताइए, जिसे 8961 में से घटाने पर वह 84 से पूरी तरह विभाजित हो जाए।

हल: 8961 को 84 से विभाजित करने पर शेष बचा 57। इसलिए अभीष्ट संख्या = 57.

नोट: उदा.-2 में आपने देखा कि प्रदत्त संख्या को 84 से पूरी तरह विभाजित होने के लिए 27 और चाहिए, जबकि उदा. 3 में प्रदत्त संख्या आवश्यकता से 57 बड़ी है।

उदा. 4: 5 अंकों की वह न्यूनतम संख्या बताएँ, जो कि 89 से पूरी तरह विभाज्य हो।

हल: 5 अंकों की न्यूनतम संख्या = 10000

10000 : 89 से शेष मिलता है 32।

यदि हम 10000 में (89 – 32) = 57 जोड़ दें तो संख्या 89 से पूरी तरह विभाजित हो जाएगी।

∴ अभीष्ट संख्या = 10000 + 57 = 10057.

उदा. 5: 5 अंकों की वह सबसे बड़ी संख्या कौन-सी है जो 137 से पूरी तरह विभाज्य हो?

हल: 5 अंकों की सबसे बड़ी संख्या = 99999

99999 में 137 से भाग देने पर शेष बचता है 126

∴ अभीष्ट संख्या = 99999 - 126 = 99873

नोट: उदा. 5 एवं उदा. 6 में क्या अंतर है? इस पर ध्यान दीजिए।

yoursmahboob

उदा. 6: 1834 के निकटतम वह कौन-सी संख्या है, जो 12 से पूरी तरह विभाज्य है?

हल: 1834 ÷ 12 से शेष मिलता है 10

चूँकि शेष 10, भाजक 12 के आधे से भी बड़ा है, इसलिए निकटतम पूर्णांक (12 – 10) = 2 जोड़ने से मिलेगा।

∴ अभीष्ट संख्या = 1834 + (12 – 10) = 1836

उदा. 7: 1829 के निकटस्थ वह संख्या ज्ञात करें, जो 12 से पूरी तरह विभाज्य हो।

हल: 1829 ÷ 12 से शेष बचता है 5। चूँकि शेष 5, भाजक 12 के आधे से भी कम है, इसलिए निकटस्थ संख्या प्राप्त करने के लिए 1829 में से 5 घटाना होगा।

∴ अभीष्ट संख्या = (1829 – 5) = 1824

नोट: क्या उदा.-6 एवं उदा.-7 के बीच के अंतर पर आपने ध्यान दिया?

उदा. 8: यदि किसी संख्या को 899 से विभाजित करते हैं तो शेष बचता है 63। उसी संख्या को 29 से विभाजित करने पर शेष क्या बचेगा?

हल: संख्या = 899 × भागफल + 63

= 29 × 31 × भागफल + 2 × 29 + 5

इसलिए 29 से विभाजित करने पर शेष बचेगा 5

उदा. 9: यदि किसी संख्या को 899 से विभाजित करते हैं तो शेष बचता है 62। यदि उसी संख्या को 31 से विभाजित करें तो कितना शेष बचेगा?

हल: संख्या = 899 × भागफल + 62

= 31 × 29 × भागफल + 31 × 2 + 0

इसलिए उसी संख्या को 31 से विभाजित करने के बाद शेष मिलेगा '0'

नोट: उदा.-8 एवं उदा.-9 से स्पष्ट है कि प्रथम भाजक, द्वितीय भाजक का एक अपवर्त्य होना चाहिए। पर यदि ऐसा नहीं होता तो कैसी स्थितियाँ पैदा होती हैं। निम्नलिखित उदाहरणों में देखिए।

उदा. 10: यदि किसी संख्या में 12 से भाग दें तो शेष बचता है 7; उसी संख्या में 7 से भाग देने पर कितना शेष बचेगा?

हल: इस प्रश्न में पहला भाजक 12, दूसरे भाजक 7 का अपवर्त्य नहीं है। अब हम 139 एवं 151 दो संख्याएँ लेते हैं, जिन्हें 12 से विभाजित करने पर शेष बचता है 7। पर जब हम उपर्युक्त दोनों संख्याओं को 7 से विभाजित करते हैं तो क्रमशः 6 एवं 4 शेष बचते हैं। इस प्रकार हम इस निष्कर्ष पर पहुँचते हैं कि दिया गया प्रश्न गलत है।

उदा. 11: एक लड़के को 432051 को 56827 से गुणा करने को कहा गया। जल्दबाजी में उसने एक अंक गलत पढ़ लिया और जिस नतीजे पर पहुँचा, वह था 21959856177। उसने किस अंक को पढ़ने में भूल की?

हल: भाग देने पर हम पाते हैं कि 56827 से 21959856177 में पूरी तरह भाग नहीं लगता। इसलिए लड़के ने 56827 को पढ़ने में भूल की। 432051 से प्रदत्त गुणनफल को विभाजित करने पर 50827 प्राप्त होता है। इस प्रकार लड़के ने '6' की जगह '0' पढ़ लिया।

yourmahboob

उदा. 12: किसी लड़के ने 423 में एक ख़ास संख्या से गुणा करने पर 65589 उत्तर पाया। यदि दोनों 5 को छोड़कर शेष अंक सही हों तो सही उत्तर ज्ञात करें।

हल: **पहला चरण:** गुणनफल में अंक 9, 8 एवं 6 सही हैं। इकाई के स्थान पर 9 प्राप्त करने के लिए हमें इकाई 3 से 423 में गुणा करना होगा।

```
  423
  **3
 ----
 1269
 ....
 ....
 6**89
```

दूसरा चरण: गुणनफल में दहाई के स्थान पर 8 पाने के लिए पहली पंक्ति के 6 के नीचे 2 होना चाहिए। इसलिए गुणक में दहाई के स्थान पर 4 होना जरूरी है।

```
   423
   *43
  -----
  1269
 1692
 ----
 6**89
```

तीसरा चरण: गुणनफल में सबसे बायीं ओर के स्थान पर 6 पाने के लिए यह जरूरी है कि दूसरी पंक्ति में 1 के नीचे 4 हो, जो कि तभी संभव है जब गुणक में सैकड़ा के स्थान पर 1 स्थित हो। इस प्रकार,

```
   423
   143
  -----
  1269
 1692
 423
 -------
 60489
```

इसलिए सही उत्तर है : 60489

उदा. 13: $6^7 \times 35^3 \times 10^{11}$ में कितनी रूढ़ संख्याएँ (Prime Numbers) हैं?

हल: $6^7 \times 35^3 \times 11^{10} = (2\times3)^7 \times (5\times7)^3 \times 11^{10}$

$= 2^7 \times 3^7 \times 5^3 \times 7^3 \times 11^{10}$

$\therefore$ रूढ़ संख्याओं की संख्या $= 7 + 7 + 3 + 3 + 10 = 30$

उदा. 14: एक संख्या को क्रम से 5, 7 एवं 8 से विभाजित करने पर क्रमशः 2, 3 एवं 4 शेष बचता है। यदि भाग देने का क्रम उलट दिया जाए तो क्या शेष बचेगा?

हल:

5	* * *	
7	* *	2
8	*	3
	1	4

इसी प्रकार * = 8 × 1 + 4 = 12

yoursmahboob

$** = 7 \times 12 \div 3 = 87$

$*** = 5 \times 87 - 2 = 437$

इस प्रकार अभीष्ट संख्या 437 हो सकता है।

यदि भाग देने का क्रम उलट दिया जाए तो

8	4 3 7	
7	5 4	5
5	7	5
	1	2

$\therefore$ अभीष्ट शेष = 5, 5 एवं 2

नोट: ऊपर हमने 'हो सकता है' इसलिए इस्तेमाल किया है कि यह अनेक सम्भावित संख्याओं में से एक है। हमने अंतिम भागफल के रूप में 1 रखा है, और इसीलिए हमें 437 प्राप्त हुआ। यदि भागफल 2, 3 ..... आदि लिए गए होते तो संख्या कुछ और आती। और फिर भी उत्तर एक समान ही होता।

उदा. 15: एक घड़ी 95 सैकेंड में 90 बार टिक-टिक करती है, दूसरी घड़ी 323 सेकेंड में 315 बार टिक-टिक करती है। यदि दोनों घड़ियों को एक साथ शुरू किया गया हो तो पहले घंटे ये दोनों कितनी बार साथ-साथ टिक-टिक करेंगी?

हल: पहली घड़ी $\frac{95}{90}$ सेकेंड के बाद टिक-टिक करती है, और दूसरी घड़ी $\frac{323}{315}$ सेकेंड के बाद टिक-टिक करती है।

अतः ये दोनों घड़ियाँ ($\frac{95}{90}$ एवं $\frac{323}{315}$ का लघुत्तम समापवर्त्य) सेकेंड के बाद एक साथ टिक टिक करेंगी।

$\frac{95}{90}$ एवं $\frac{323}{315}$ का लघुत्तम समापवर्त्य

$= \frac{95 \text{ एवं } 323 \text{ का लघुत्तम समापवर्त्य}}{90 \text{ एवं } 315 \text{ का महत्तम समापवर्तक}} = \frac{19 \times 5 \times 17}{45}$

प्रथम 3600 सैकेंड में ये घड़ियाँ साथ-साथ

$3600 \div \frac{19 \times 5 \times 17}{45}$ बार टिक-टिक करेंगी।

$= \frac{3600 \times 45}{19 \times 5 \times 17} = 100\frac{100}{323}$

एक बार चूँकि वे शुरू में ही टिक टिक कर चुकी होंगी, इसलिए एक घंटे में समध्वनि की संख्या $= 100 + 1 = 101$

उदा. 16: 1000 से छोटी किस संख्या से 43259 में गुणा किया जाए कि गुणनफल की दायीं ओर स्थित अंतिम तीन अंक 437 हों?

yourmahboob

हल: स्पष्ट है कि अभीष्ट संख्या में 3 अंक हैं। मान लीजिए कि यह संख्या abc है, इसलिए,

```
  43259
    abc
 -------
  - - - 7
- - - -
 -------
    437
```

निश्चय ही, c = 3, इस प्रकार,

```
  43259
    ab3
 -------
  - - 777
- - - -
 -------
    437
```

हम देखते हैं कि दायीं ओर से गुणनफल का दूसरा अंक '3' है। यह तभी संभव है जब पहली पंक्ति के 7 में 6 जोड़ा जाए। और इसके लिए b का 4 होना जरूरी है। इस प्रकार,

```
  43259
    a43
 -------
    777
  - - 36
- - - -
 -------
    437
```

गुणनफल में दायीं ओर से तीसरी संख्या के 4 होने के लिए तीसरी पंक्ति में 3 होना जरूरी है, जो कि तभी संभव है, जब a = 7 हो। इस प्रकार,

```
  43259
    743
 -------
    777
  - - 36
- - - 3
 -------
    437
```

∴ अभीष्ट गुणक = 743

नोट: उपर्युक्त प्रश्न को विस्तार से इसलिए सरल किया गया है ताकि आप हर चरण को समझ सकें। एक बार अच्छी तरह समझ लेने पर आप इसे बस एक चरण में ही संपन्न कर सकेंगे। हाँ, एक बात ध्यान में रखनी चाहिए कि जब गुणनफल के अंतिम 3 अंक दिए गए हों तो किसी भी पंक्ति में तीसरे कॉलम से आगे गणना करने की कोई आवश्यकता नहीं है।

उदा. 17: वह न्यूनतम संख्या निकालें, जिससे 19404 में गुणा करने या भाग देने पर वह एक पूर्ण वर्ग बन जाएगा।

हल: $19404 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 7 \times 7 \times 11 = 2^2 \times 3^2 \times 7^2 \times 11$

इस प्रकार यदि 19404 को 11 से विभाजित कर दिया जाए या फिर 11 से गुणा कर दिया जाए तो परिणामी संख्या एक पूर्ण वर्ग होगी।

उदा. 18: 4*56 में * की जगह कौन सी संख्या डाली जाए कि यह 33 से पूरी तरह विभाजित हो जाए?

yourstalkboob

हल: प्रदत्त संख्या के 33 से विभाजित होने का मतलब है, उसका 3 एवं 11 से विभाज्य होना। संख्या के 3 से विभाज्य होने के लिए जरूरी है कि उसका आंकिक योग 3 से विभाजित हो जाए। इसलिए * की जगह हम 0, 3, 6, 9 रख सकते हैं। हम यह भी जानते हैं कि 11 से विभाज्य होने के लिए एकांतर अंकों (alternate digit) के योगफल का अंतर 0 हो या 11 से विभाज्य हो। यहाँ

$S_1 = 4 + 5 = 9$ [संख्या में विषम स्थान पर स्थित अंकों का योग]

$\therefore$ $S_2 = 9$ होना चाहिए।

$\therefore$ $* = 3$

नोट: यहाँ $S_2 = 9 + 11k (= 20, 31, 42...)$ आदि हो, यह कतई संभव नहीं है। क्योंकि ऐसी स्थिति में * एक से अंकों की संख्या हो जाएगी।

प्रमेय (Theorem): जब दो पृथक् संख्याएँ किसी तीसरी संख्या द्वारा विभाजित होने पर समान शेष छोड़ती हों तो उन संख्याओं का अंतर तीसरी संख्या द्वारा पूरी तरह अवश्य विभाज्य होगा।

प्रमाण: मान लें कि ऐसी दो संख्याएँ A एवं B हैं तथा भाजक (तीसरी संख्या) एवं शेष क्रमशः x एवं y हैं। तब प्रश्नानुसार

$nx + y = A$ ....(i)

$mx + y = B$ ....(ii)

(i) में से (ii) को घटाने पर,

$nx - mx = A - B$

या, $x(n - m) = A - B$

$\Rightarrow$ $(A - B)$, x से पूरी तरह विभाज्य है।

उदा. 19: 24345 एवं 33334 को तीन अंकों वाली एक खास संख्या से विभाजित किया जाता है, और दोनों ही स्थितियों में समान शेष प्राप्त होते हैं। भाजक एवं शेष का पता लगाएँ।

हल: उपर्युक्त प्रमेय के आधार पर कहा जा सकता है कि 24345 एवं 33334 का अंतर भी उस खास भाजक से विभाज्य होगा।

$33334 - 24345 = 8989 = 101 \times 89$

$\therefore$ भाजक = 101 (चूँकि यह एक तीन अंकों वाली संख्या है।)

शेष प्राप्त करने के लिए 33334 या 24345 में 101 से भाग दें। 24345 में 101 से भाग देने पर शेष बचता है: 4

उदा. 20: 451 एवं 607 को किसी खास संख्या से विभाजित करने पर समान शेष प्राप्त होते हैं। 1 को छोड़कर सभी संभव भाजकों का उल्लेख करें।

हल: उपर्युक्त प्रमेय के अनुसार,

$607 - 451 = 156$, अभीष्ट भाजकों से पूरी तरह विभाज्य है।

$156 = 2 \times 2 \times 3 \times 13$

$\therefore$ 1 अंक वाली संख्याएँ, $2, 3, 2 \times 3, 2 \times 2 = 2, 3, 4, 6$

दो अंकों वाली संख्याएँ, 12, 13, 26, 39, 52, 78

तीन अंकों वाली संख्याएँ = 156

yourshahboob

उदा. 21: दो संख्याओं का योगफल 14 है और उनका अंतर 10 है। इन दोनों संख्याओं का गुणनफल निकालें।

हल: मान लें कि अभीष्ट संख्याएँ x एवं y हैं।

प्रश्नानुसार, $x + y = 14$ एवं $(x - y) = 10$

हमें पता है कि $(x+y)^2 = (x-y)^2 + 4xy$ या $14^2 = 10^2 + 4xy$

$$\therefore \quad xy = \frac{14^2 - 10^2}{4} = 24$$

सूत्र विधि:

$$\text{गुणनफल} = \frac{(\text{योगफल} + \text{अंतर})(\text{योगफल} - \text{अंतर})}{4}$$

$$= \frac{(14+10)(14-10)}{4} = 24$$

नोट – संख्याएँ भी सूत्र के सहारे प्राप्त की जा सकती हैं

$$x = \frac{\text{योगफल} + \text{अंतर}}{2} = \frac{14+10}{2} = 12$$

$$y = \frac{\text{योगफल} - \text{अंतर}}{2} = \frac{14-10}{2} = 2$$

उदा. 22: किन्हीं दो संख्याओं का योगफल उनके अंतर का दुगुना है। यदि इनमें से एक संख्या 10 है तो दूसरी संख्या क्या होगी?

हल: मान लिया कि अभीष्ट संख्याएँ x एवं y हैं।

प्रश्नानुसार, $x + y = 2(x - y)$

या, $x - 3y = 0$ या $x = 3y$

दूसरी संख्या $x = 3 \times 10 = 30$

उदा. 23: दो संख्याओं का अनुपात 3 : 5 है। यदि दोनों में से 9 घटा लिया जाए तो उनका अनुपात 12 : 23 हो जाता है। संख्याएँ बताएँ।

हल: मान लीजिए की संख्याएँ 3x एवं 5x हैं।

तब प्रश्नानुसार

$$\frac{3x-9}{5x-9} = \frac{12}{23}$$

या, $69x - 9 \times 23 = 60x - 12 \times 9$

या, $9x = 207 - 108 = 99$

$$\therefore \quad x = \frac{99}{9} = 11$$

yoursmahboob

$3x = 33$ एवं $5x = 55$

$\therefore$ अभीष्ट संख्याएँ $= 33$ एवं 55

उदा. 24: एक लड़के से कहा गया कि प्रदत्त भिन्न का $\frac{7}{9}$ निकालें। उसने जल्दबाजी में प्रदत्त भिन्न में $\frac{7}{9}$ से भाग दे दिया और इस प्रकार जो उत्तर उसे प्राप्त हुआ वह सही उत्तर से $\frac{8}{21}$ अधिक है। सही उत्तर बताएँ।

हल: मान लिया कि प्रदत्त भिन्न x है।

$$x \div \frac{7}{9} - x \text{ का } \frac{7}{9} = \frac{8}{21}$$

या, $\frac{9x}{7} - \frac{7x}{9} = \frac{8}{21}$

या, $\frac{x(81-49)}{7\times 9} = \frac{8}{21}$

$\therefore \quad x = \frac{8}{21}\left[\frac{7\times 9}{32}\right] = \frac{3}{4}$

$\therefore$ सही उत्तर है: $\frac{3}{4}\times\frac{7}{9} = \frac{7}{12}$

उदा. 25: किसी संख्या का $\frac{4}{5}$ उस संख्या के $\frac{3}{4}$ से 4 ज्यादा है, तो संख्या बताएँ।

हल: $\frac{4}{5} - \frac{3}{4} = 4$

या, $\frac{1}{20} = 4 \quad \therefore \quad 1 = 80$

$\therefore$ अभीष्ट संख्या $= 80$

उदा. 26: यदि किसी संख्या के आधे का एक तिहाई और फिर उसका पाँचवाँ हिस्सा 15 के बराबर हो, तो संख्या बताएँ।

हल: मान लें कि संख्या x है

प्रश्नानुसार

$$x\left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = 15$$

$\therefore \quad x = 15\times 5\times 3\times 2 = 450$

yoursmahboob

सूत्र विधि:

(*) अभीष्ट संख्या = $15\left(\frac{5}{1}\right)\left(\frac{3}{1}\right)\left(\frac{2}{1}\right) = 450$

नोट: अभीष्ट संख्या प्राप्त करने के लिए परिणामी संख्या को प्रदत्त भिन्नों के व्युत्क्रम (reverse) से गुणा करें।

उदा. 27: यदि किसी भिन्न का अंश 12% बढ़ा दिया जाए एवं हर 2% घटा दिया जाए तो भिन्न का मान $\frac{6}{7}$ हो जाता है। मूल भिन्न का मान निकालें।

हल: मान लें कि मूल-भिन्न = $\frac{x}{y}$

प्रश्नानुसार, $\frac{x \text{ का } 112\%}{y \text{ का } 98\%} = \frac{6}{7}$

या, $\frac{x}{y} = \frac{6 \text{ का } 98\%}{7 \text{ का } 112\%} = \frac{98 \times 6}{112 \times 7} = \frac{3}{4}$

उदा. 28: दो अंकों वाली किसी संख्या के दोनों अंकों का योग 8 है। यदि अंकों को उलट दिया जाए तो संख्या पहले की अपेक्षा 54 कम हो जाती है, तो संख्या क्या है?

हल: मान लें कि दो अंकों वाली संख्या $10x + y$ है।

प्रश्नानुसार, $x + y = 8$ ....(i)

एवं $10y + x = 10x + y - 54$

या, $x - y = \frac{54}{9} = 6$ ....(ii)

समीकरण (i) एवं (ii) से,

$x = \frac{8+6}{2} = 7$ एवं $y = 1$

$\therefore$ अभीष्ट संख्या $= 7 \times 10 + 1 = 71$

सूत्र विधि: अभीष्ट संख्या = $5\left[\text{अंकों का योग} + \frac{\text{फर्क}}{9}\right] + \frac{1}{2}\left[\text{अंकों का योग} - \frac{\text{फर्क}}{9}\right]$

$= 5(8+6) + \frac{1}{2}(8-6) = 70 + 1 = 71$

उदा. 29: तीन संख्याएँ परस्पर 3:4:5 के अनुपात में हैं। सबसे बड़ी एवं सबसे छोटी संख्या का योगफल तीसरी संख्या में 52 जोड़ने से प्राप्त होता है तो सबसे छोटी संख्या क्या है?

हल: प्रश्न से यह स्पष्ट है कि सबसे बड़ी एवं सबसे छोटी संख्या का योगफल तीसरी संख्या से 52 अधिक है। इसलिए

yoursmahboob

$3+5-4 \rightarrow 52$

$4 \rightarrow 52$

$\therefore\ 1 \rightarrow 13$

$\therefore$ सबसे छोटी संख्या $= 3 \times 13 = 39$

उदा. 30: यदि किसी संख्या का 40 प्रतिशत 360 के बराबर हो तो उस संख्या के 15% का 15% कितना होगा?

हल: मान लें कि संख्या $= x$, प्रश्नानुसार,

x का $40\% = 360$

या, $x = \dfrac{360 \times 100}{40} = 900$

अब, x का $15\% = 900 \times \dfrac{15}{100} = 135$

फिर, 135 का $15\% = 135 \times \dfrac{15}{100} = 20.25$

द्रुत विधि:

$40\% = 360$

$\therefore$ 15% का 15% $= \dfrac{360}{40\%} \times 15\% \times 15\%$

$= \dfrac{360}{40} \times 15$ का 15%

$= \dfrac{360}{40} \times \dfrac{15 \times 15}{100} = 20.25$

उदा. 31: किन्हीं दो संख्याओं के योगफल एवं अंतर का अनुपात 7:1 है। इन दोनों संख्याओं का अनुपात बताएँ।

हल: मान लें कि वे संख्याएँ हैं x एवं y। प्रश्नानुसार, $\dfrac{x+y}{x-y} = \dfrac{7}{1}$

$\Rightarrow x+y = 7(x-y)$

या, $6x = 8y \therefore \dfrac{x}{y} = \dfrac{8}{6} = \dfrac{4}{3} = 4:3$

द्रुत विधि: (componendo-dividendo नियम का प्रयोग करें)

$\dfrac{x+y}{x-y} = \dfrac{7}{1}$

या, $\dfrac{(x+y)+(x-y)}{(x+y)-(x-y)} = \dfrac{7+1}{7-1}$

yoursmahboob

या, $\frac{2x}{2y} = \frac{8}{6}$ $\therefore$ $\frac{x}{y} = \frac{4}{3} = 4:3$

उदा. 32: यदि दो अंकों की किसी संख्या एवं उस संख्या के दोनों अंकों को परस्पर उलटने पर प्राप्त संख्या के बीच का अंतर 27 हो तो संख्या के दोनों अंकों का योगफल एवं अंतर बताएँ।

हल: मान लें कि वह संख्या $10x + y$ है। प्रश्नानुसार,

$(10x + y) - (10y + x) = 27$

या, $9(x - y) = 27$

$\therefore$ $x - y = \frac{27}{9} = 3$

इस प्रकार संख्या के दोनों अंकों का अंतर 3 है, पर हम इनका योगफल नहीं निकाल सकते।

सूत्र विधि:

दो अंकों का अंतर $= \frac{\text{मूल संख्या एवं परिवर्तित संख्या के बीच का अंतर}}{9} = \frac{27}{9} = 3$

उदा. 33: दो अंकों वाली किसी संख्या में इकाई के स्थान पर स्थित अंक को 50% बढ़ा दिया जाता है तथा दहाई के स्थान पर स्थित अंक को 100% बढ़ा दिया जाता है। इस प्रकार जो संख्या प्राप्त होती है वह मूल संख्या से 33 बड़ी है। मूल संख्या क्या है?

हल: मान लें कि संख्या $= 10x + y$

$\therefore$ परिवर्तित संख्या $= 10\left[x\left(\frac{200}{100}\right)\right] + y\left[\frac{150}{100}\right] = 20x + 1.5y$

प्रश्नानुसार, $(20x + 1.5y) - (10x - y) = 33$

या, $10x + 0.5y = 33 = 10 \times 3 + 3$

$\therefore$ $x = 3, y = 6$ $\therefore$ संख्या $= 36$

द्रुत विधि: इकाई के स्थान के लिए, $50\% = 3$

$\therefore$ $100\% = 6$

दहाई के स्थान के लिए, $100\% = 3$

$\therefore$ संख्या $= 36$

उदा. 34: यदि $(2^{32} + 1)$ किसी खास संख्या से पूर्णतया विभाज्य हो तो निम्नलिखित में से कौन उस खास संख्या से विभाज्य होगा?

1) $2^{96} + 1$ 2) $2^{16} - 1$ 3) $2^{16} + 1$ 4) 7×2^{33}

5) इनमें से कोई नहीं

हल: $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

$2^{96} + 1 = (2^{32})^3 + (1)^3 = (2^{32} + 1)((2^{32})^2 - 1 \times (2^{32})^2 + 1)$

इस प्रकार, $(2^{96} - 1)$, $(2^{32} + 1)$ से विभाज्य है,

$\therefore$ $2^{96} + 1$ उस खास संख्या से भी विभाज्य होगा।

yousmahboob

उदा. 35: जब किसी खास संख्या में 223 से भाग दिया जाता है तो 79 शेष बचता है। और जब उस खास संख्या में 179 से भाग दिया जाता है तो भागफल 315 प्राप्त होता है, शेष का मान क्या होगा?

हल : जब (179 × 315) = 56385 में 223 से भाग दिया जाता है तो शेष 189 प्राप्त होता है।
इसलिए अभीष्ट शेष = 79 + (223 − 189) = 79 + 34 = 113

विस्तार विधि **(Detail Method)** :

माना कि संख्या N है। तो N = 223 Q + 79; यहाँ, जब N में 223 से भाग दिया जाता है, तो Q भागफल (quotient) है।

पुनः N = 179 × 315 + R

= 56385 + R

= 223 × 252 + 189 + R

या, 223 Q + 79 = 223 × 252 + 189 + R

∴ R = 223 (Q − 252) + 79 − 189

चूँकि R, 179 से अधिक नहीं हो सकता है, Q − 252 = 1, अर्थात्

R = 223 × 1 + 79 − 189 = 113

नोट: 1. जब Q − 252 = 2

R = 223 × 2 + 79 − 189 = 336 जो कि संभव नहीं है।

2. जब Q − 252 = 0, तो R ऋणात्मक होता है जो कि संभव नहीं है।

3. Q का एक मात्र संभव मान 253 है; इस स्थिति में, हम देखते हैं कि N = 223 × 253 + 79 = 56498 तथा 56498 = 179 × 315 + 113, जो हमारे उत्तर को सुनिश्चित करता है।

उदा. 36: प्राकृत संख्याओं (natural numbers) को एक-के-बाद-एक लिखकर निम्नलिखित तरीके से एक 21 अंकों वाली संख्या बनाई जाती है :

N = 123456789101112.....

जब उपर्युक्त संख्या N में 11 से भाग दिया जाता है तो शेष क्या बचेगा ?

हल : N = 1234.....1415

विषम स्थानों पर स्थित अंकों का योग

= 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 0 + 1 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 40

सम स्थानों पर स्थित अंकों का योग

= 2 + 4 + 6 + 8 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 26

संख्या को 11 से विभाज्य होने के लिए, विषम स्थानों एवं सम स्थानों पर के अंकों के योग के बीच का अंतर 11 का अपवर्त्य (multiple) होना चाहिए। यहाँ अंतर (40 − 26) = 14 है, जो 11 होना चाहिए। चूँकि N का अंतिम अंक विषम स्थान पर है, इसलिए यदि हम 21 वे स्थान के अंक को 3 से कम कर देते हैं, तो संख्या 11 से विभाज्य होगी। दूसरे शब्दों में, संख्या N, 11 के अपवर्त्य

youtomahboob

(multiple) से 3 अधिक है। अर्थात् यदि हम संख्या को 11 से भाग देते हैं तो हमें 3 शेष के रूप में प्राप्त होता है।

उदा. 37: 10 के पहले 100 अपवर्त्यों यानि 10, 20, 30 ..... 1000, को आपस में गुणा करने पर गुणनफल में शून्य की संख्या क्या होगी?

हल : इस प्रश्न का हल करने के लिए हमलोगों के पास कुछ विधि नहीं है। विद्यार्थियों के लिए हमारी सलाह है कि हमके विस्तृत हल को समझने की कोशिश करें

किसी गुणनफल के अंत में शून्य की संख्या तीन तथ्यों पर निर्भर करती है।

1) संख्याओं के अंत में शून्यों की संख्या।

2) संख्याओं के दहाई स्थान पर 5 एवं साथ ही इकाई स्थान पर शून्य का होना

3) संख्याओं के सैकड़ा स्थान पर 5 तथा साथ ही दहाई एवं इकाई स्थान पर शून्य का होना।

तथ्य (1) के कारण शून्यों की संख्या:

एक शून्य वाली संख्याओं की संख्या = 90

दो शून्यों वाली संख्याओं की संख्या = 9

तीन शून्यों वाली संख्याओं की संख्या = 1

इस तथ्य के कारण कुल शून्यों की संख्या = $90 \times 1 + 9 \times 2 + 1 \times 3 = 111$

तथ्य (2) के कारण शून्यों की संख्या:

यदि 5 को किसी भी सम संख्या से गुणा किया जाए तो शून्य प्राप्त होता है।

ऐसी संख्याओं, जिनके दहाई स्थान पर 5 एवं साथ ही इकाई स्थान पर शून्य हो (जैसे 50, 150, 250, ..., 950), की संख्या 10 है।

इस प्रकार इस तथ्य के कारण 10 शून्य प्राप्त होते हैं।

तथ्य (3) के कारण शून्यों की संख्या:

हम कह सकते हैं कि 500 को 200 से गुणा करने पर एक अतिरिक्त शून्य प्राप्त होगा।

इस प्रकार कुल शून्यों की संख्या = $111 + 10 + 1 = 122$

उदा. 38: सात लगातार पूर्णांकों का औसत 7 है। इन पूर्णांकों के वर्गों का औसत ज्ञात कीजिए।

हल : निम्नलिखित सूत्र का प्रयोग करें :

[यदि लगातार पूर्णांकों (consecutive integers) की संख्या विषम हो]:

वर्गों का औसत

$$= \frac{1}{\text{पूर्णांकों की संख्या}} \times \left[\frac{n_1(n_1+1)(2n_1+1)}{6} - \frac{n_2(n_2+1)(2n_2+1)}{6}\right]$$

जहाँ, $n_1 = \text{औसत} + \frac{\text{पूर्णांकों की संख्या} - 1}{2}$ एवं

yoursmahboob

$$n_2 = \text{औसत} - \frac{\text{पूर्णांकों की संख्या}+1}{2}$$

इस प्रश्न में,

$$n_1 = 7 + \frac{7-1}{2} = 10$$

$$n_2 = 7 - \frac{7+1}{2} = 3$$

$$\therefore \text{ वर्गों का औसत } = \frac{1}{7}\left[\frac{10\times11\times2}{6} - \frac{3\times4\times7}{6}\right]$$

$$= \frac{1}{7}[385-14] = \frac{371}{7} = 53$$

उदा. 39: वह न्यूनतम संख्या ज्ञात करें जिसमें 9, 11 एवं 13 से भाग देने पर शेष क्रमशः 1, 2 एवं 3 बचता हो।

हल : वस्तुतः इस प्रश्न को हल करने के लिए कोई स्थापित विधि नहीं है। हम प्रश्न में दिए हुए विकल्पों के सहारे जाँच एवं भूल (trial-and-error) की विधि का प्रयोग कर उत्तर तक पहुँचने का प्रयत्न करते हैं। हो सकता है कि ऐसी कोई संख्या हो परन्तु उस संख्या को ज्ञात करना लगभग असंभव है। फिर भी, प्रत्येक स्थिति में ऐसा नहीं है। नीचे लिखे हुए उदाहरण को देखें।

"वह न्यूनतम संख्या ज्ञात कीजिए जिसमें 9, 11 एवं 13 से भाग देने पर शेष क्रमशः 1, 3 एवं 5 बचता हो।"

हम देखते हैं कि :

$$9-1 = 11-3 = 13-5 = 8$$

इसप्रकार के प्रश्न के लिए हमारे पास स्थापित विधि है।

9, 11 एवं 13 का ल. स. = 1287

$\therefore$ अभीष्ट न्यूनतम संख्या $= 1287 - 8 = 1279$

नोट: 1. वह न्यूनतम संख्या ज्ञात कीजिए जिसमें 13, 15 एवं 19 से भाग देने पर शेष क्रमशः 2, 4 एवं 8 बचता हो। क्या हम इसका विशिष्ट हल (specific solution) निकाल सकते हैं?

हल: हाँ। इस प्रश्न का हल संभव है क्योंकि $13-2 = 15-4 = 19-8 = 11$

अब, 13, 15 एवं 19 का ल. स. = 3705

$\therefore$ अभीष्ट न्यूनतम संख्या $= 3705 - 11 = 3694$

2. वह न्यूनतम संख्या ज्ञात कीजिए जिसमें 13, 15 एवं 19 से भाग देने पर शेष क्रमशः 1, 2 एवं 3 बचता हो। क्या हम इसका हल निकाल सकते हैं?

yoursmahboob

हल : नहीं। लेकिन क्यों? क्योंकि

$$13-1 \neq 15-2 \neq 19-3$$

उदा. 40: निम्नलिखित में से किससे $4^{61}-4^{63}+4^{64}+4^{65}$ विभाज्य है?

1) 3 2) 5 3) 11 4) 17 5) इनमें से कोई नहीं

हल : $4^{61}[1+4+4^2+4^3+4^4] = 4^{61}[1+4+16+64+256] = 341 \times 4^{61}$

चूँकि 341, 11 से विभाज्य है, इसलिए दिया हुआ व्यंजक भी 11 से विभाज्य होगा।

उदा. 41: दो अंकों की संख्या एवं उस संख्या के दोनों अंकों के योग के बीच का अनुपात 4 : 1 है; यदि इकाई स्थान पर स्थित अंक, दहाई स्थान पर स्थित अंक से 3 ज्यादा हो तो संख्या क्या है?

हल : मान लिया कि दो अंकों की संख्या = $10x+y$

अब प्रश्नानुसार, $\frac{10x+y}{x+y} = \frac{4}{1}$

या, $10x+y = 4x+4y$

या, $6x = 3y$

या, $2x = y$

या, $x = y - x = 3$ (दिया हुआ है) एवं $x = 6$

$\therefore$ अभीष्ट संख्या = 36

उदा. 42: यदि $(7^{13}+1)$ में 6 से भाग दिया जाता है तो शेष ज्ञात कीजिए।

हल : Binomial Expansion का प्रयोग :

$(x+y)^n = x^n + {}^nC_1 x^{n-1}y + {}^nC_2 x^{n-2}y^2 + {}^nC_3 x^{n-3}y^3 \ldots\ldots {}^nC_{n-1} x^{n-1}+y^n$

उपर्युक्त अंतिम पद (y^n) को छोड़कर सभी पदों में x सम्मिलित है। इसका अर्थ है कि पद y^n को छोड़कर सभी पद x से पूर्णतया विभाज्य है। (नोट: y^n, x से पूर्णतया विभाज्य हो सकता है, परंतु हमलोग बिना x एवं y का ज्ञान जाने ऐसा नहीं कह सकते हैं।)

अब,

$7^{13} = (6+1)^{13}$ अर्थात $(6+1)^{13}$ का प्रत्येक पद, (1^{13}) को छोड़कर, 6 से पूर्णतया विभाज्य है। इस प्रकार जब 7^{13} में 6 से भाग दिया जाता है तो शेष $(1^{13}-)$ 1 बचता है। और इस प्रकार $(7^{13}+1)$ में 6 से भाग देने पर शेष $(1+1=)$ 2 बचता है।

उदा. 43: दो संख्याओं का गुणनफल 7168 है एवं म. स. 16 है, संख्याएँ ज्ञात करें।

हल: संख्याएँ निश्चय ही उनके म. स. का अपवर्त्य होंगी।

मान लिया कि वे संख्याएँ 16a एवं 16b हैं,

जहाँ a और b आपस में अभाज्य हैं।

$\therefore$ $16a \times 16b = 7168$

$\therefore$ $a \times b = 28$

अब, निम्नलिखित जोड़े ऐसे हैं जिनमें संख्याओं का गुणनफल 28 है:

(28, 1); (14, 2) और (7, 4)

yoursmahboob

इनमें (14, 2) परस्पर अभाज्य नहीं हैं, इसलिए इसे नजरअंदाज करें।

∴ अभीष्ट संख्या = (28 × 16, 1 × 16) एवं (7 × 16, 4 × 16)

= (448, 16) एवं (112, 64)

नोट :

1. इस प्रकार के प्रश्नों में संख्याओं के जोड़े 1 से अधिक हो सकते हैं।
2. यदि आप उपर्युक्त विधि के तर्क को समझ चुके हैं तो आप निम्नलिखित तरीके से अपने काम को और आसान कर सकते हैं।

चरण I : $\frac{\text{गुणनफल}}{(\text{म. स.})^2}$ का मान निकालें

चरण II : चरण I में प्राप्त मान के गुणनखंडों के सभी संभव जोड़ों को ज्ञात करें

चरण III : चरण II में प्राप्त मान सभी परस्पर अभाज्य गुणनखंडों के जोड़ों में म. स. से गुणा करें

उपर्युक्त प्रश्न के लिए :

चरण I : $\frac{7168}{(16)^2} = 28$

चरण II : (1, 28); (2, 14); (4, 7)

चरण III : (1 × 16, 28 × 16) एवं (4 × 16, 7 × 16) या (16, 448) एवं (64, 112)

उदा. 44: वह सबसे बड़ी संख्या ज्ञात करें जिससे 55, 127 एवं 175 में भाग देने पर प्रत्येक दशा में समान शेष बचता हो।

हल : माना कि शेष = x

संख्याएँ (55 - x), (127 - x) एवं (175 - x) अभीष्ट संख्या से अवश्य ही विभाज्य होंगी।

अब, हमलोग जानते हैं कि यदि दो संख्याएँ किसी खास संख्या से विभाज्य होंगी तो उनका अंतर भी उस खास संख्या से विभाज्य होगी।

∴ संख्याएँ, (127 - x) − (55 − x), (175 - x) − (127 − x) एवं (175 − x) − (155 − x), या, 72, 48 एवं 120 भी अभीष्ट संख्या से विभाज्य होंगी।

72, 48 एवं 120 का म. स. = 24

∴ अभीष्ट संख्या = 24

नोट : यदि आप इस विधि के विस्तार में नहीं जाना चाहते हैं तो संख्याओं के अंतरों का म. स. निकाल लें। इससे आपका काम आसानी से एवं जल्द हो जाएगा।

उदा. 45: यदि किसी संख्या में 5 एवं 7 से लगातार भाग दिया जाता है तो शेष क्रमशः 2 एवं 4 बचता है। यदि उस संख्या को (7 × 5 = 35) से भाग देना हो तो शेष क्या बचेगा?

हल :

5	A	
7	B	2
	C	4

yousufahmad

उपर्युक्त सजावट में, A एक संख्या है जिसमें 5 से भाग देने पर भागफल एवं शेष क्रमशः B एवं 2 प्राप्त होता है। फिर, जब B में 7 से भाग दिया जाता है तो भागफल एवं शेष क्रमशः C एवं 4 प्राप्त होता है।

अब, C का मान 1 रखने पर,

$\therefore$ $B = 7 \times 1 \times 4 = 11$ एवं $A = 5 \times 11 + 2 = 57$

अब 57 में 35 से भाग देने पर 22 शेष प्राप्त होता है।

सूत्र विधि (Direct Formula) :

अभीष्ट शेष $= d_1 \times r_2 + r_1$

जहाँ d_1 = पहला भाजक = 5

r_1 = पहला शेष = 2

r_2 = दूसरा शेष = 4

$\therefore$ अभीष्ट शेष $= 5 \times 4 + 2 = 22$

उदा. 46: एक के एक प्रश्न में, शुरू से लेकर अंत तक शेष क्रमशः 221, 301, 334 एवं 280 हैं। यदि भाज्य 987654 है तो भाजक एवं भागफल ज्ञात करें।

हल : **चरण I :**

$$___)\,987654\,(_$$
$$\underline{abc}$$
$$221$$

a) चूँकि हमारे पास 4 शेष हैं, इसलिए हमारा गुणक तीन अंकों वाला होना चाहिए (क्यों?)

b) चूँकि सारे शेष तीन अंकों की संख्याएँ हैं, हमलोग अनुमान लगा सकते हैं कि भाजक भी तीन अंकों की एक संख्या होगी। (यह सही नहीं भी हो सकता है।)

c) हमलोग abc का मान ज्ञात कर सकते हैं।

$$abc = 987 - 221 = 766$$

अब, हमारा भाजक 766 का निश्चय ही एक गुणनखण्ड होगा। इस प्रकार, यह या तो 766 है या 383 ।

चरण II :

$$___)\,987654\,(_$$
$$\underline{766}$$
$$2216$$
$$\underline{defg}$$
$$301$$

$\therefore$ $defg = 2216 - 301 = 1915$

अब, हम 766 एवं 1915 का म. स. निकालकर अपने भाजक को सुनिश्चित करते हैं।

$\therefore$ भाजक = 766 एवं 1915 का म. स. = 383

एक बार जब हमें भाजक ज्ञात हो जाता है तो भाग को पूरा किया जा सकता है।

yoursmahboob

```
383)987654(2578
    766
    2216
    1915
     3015
     2681
      3344
      3064
       280
```

इस प्रकार हमारा भाजक = 383 एवं भागफल = 2578

उदा. 47: गुणनफल के अंत में प्राप्त शून्यों की संख्या ज्ञात करें।

(a) $12 \times 18 \times 15 \times 40 \times 25 \times 16 \times 55 \times 105$

(b) $5 \times 10 \times 15 \times 20 \times 25 \times 30 \times 35 \times 40 \times 40 \times 45$

हल : हमें यह अवश्य जानना चाहिए कि निम्नलिखित कारणों से किसी गुणनफल के अंत में शून्य प्राप्त होता है:

1. यदि किसी गुणक (Multiplicand) के अंत में शून्य हो।
2. यदि 5 या 5 के अपवर्त्यों को किसी सम संख्या से गुणा किया जाता है।

ऊपर के कथनों के आधार पर हम कह सकते हैं कि:

$(5)^n (2)^m$ में शून्यों की संख्या n है, यदि $n < m$ हो, या m है यदि $m < n$ हो।

इस प्रकार गुणनफल को $(2^m \times 5^n \times \ldots)$ के रूप में लिखें।

(a) $12 \times 18 \times 15 \times 40 \times 25 \times 16 \times 55 \times 105$

$= 12 \times 18 \times 16 \times 40 \times 15 \times 25 \times 55 \times 105$

$= (2^2 \times 3) \times (2 \times 9) \times (2)^4 \times (2^3 \times 5) \times (5 \times 3) \times 5^2 \times (5 \times 11) \times (5 \times 21)$

$= 2^{10} \times 5^6 \times \ldots\ldots$

(चूँकि 2 एवं 5 के अलावा सारी संख्याएँ हमारे लिए काम के नहीं हैं)

चूँकि $6 < 10$, $\therefore$ गुणनफल के अंत में 6 शून्य हैं

(b) $5 \times (2 \times 5)(3 \times 5)(2^2 \times 5)(5^2)(2 \times 3 \times 5)(5 \times 7)(2^3 \times 5)(2^2 \times 5)(5 \times 9)$

$= (2)^{10} \times (5)^{11} \times \ldots\ldots$

चूँकि $10 < 11$ $\therefore$ गुणनफल के अंत में 10 शून्य हैं।

नोट : किसी भी गुणनफल के शृंखला के अंत में शून्यों की संख्या को ज्ञात करने का यह सबसे आसान विधि है। इस विधि की सहायता से आप $(1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times 100)$ में शून्यों की संख्या जो कि 24 है आसानी से ज्ञात कर सकते हैं। कोशिश करें।

किसी यौगिक संख्या के विभिन्न भाजकों की संख्या

नियम: प्रदत्त संख्या के समस्त रूढ़ गुणनखंडों का पता लगाएँ एवं प्रत्येक गुणनखंड के घातांक को 1 बढ़ा दें। इन बढ़े हुए घातांकों का गुणनफल उन समस्त विभाजकों की संख्या बताएगा, जिससे प्रदत्त संख्या विभाजित हो सकती है। इन विभाजकों में 1 एवं स्वयं प्रदत्त संख्या भी शामिल होगी।

yourshahbooks

उदा. 1: 1 एवं 50 के अतिरिक्त उन सभी पूर्णांकों की संख्या का पता लगाएँ जिनसे 50 पूर्ण तरह विभाज्य है

हल: यदि आप इस प्रश्न को हल करने में उपर्युक्त नियम का इस्तेमाल नहीं करते हैं तो आपको 1 से 50 तक की संख्याओं के संदर्भ में 50 की विभाज्यता जाँचेंगी। यह तरीका न केवल लंबा है बल्कि इसमें त्रुटि की भी संभावना है।

50 के विभिन्न विभाजक हैं: 1, 2, 5, 10, 25, 50 यदि इनमें से 1 एवं 50 को नजरंदाज कर दें तो विभाजकों की संख्या – 4

नियम से: $50 = 2 \times 5 \times 5 = 2^1 \times 5^2$

$\therefore$ विभाजकों की कुल संख्या $= (1+1)(2+1) = 2 \times 3 = 6$

$\therefore$ 1 और 50 को छोड़कर विभाजकों की कुल संख्या $= 6 - 2 = 4$

उदा. 2: 1 के अतिरिक्त 40 के समस्त विभाजकों की संख्या – ?

हल: $40 = 2 \times 2 \times 2 \times 5 = 2^3 \times 5^1$

$\therefore$ विभाजकों की कुल संख्या $= (3+1) \times (1+1) = 4 \times 2 = 8$

$\therefore$ 1 के अतिरिक्त विभाजकों की कुल संख्या $= 8 - 1 = 7$

उदा. 3: 1 के अतिरिक्त 37800 के समस्त विभाजकों की संख्या का पता लगाएँ।

हल: $37800 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 7$

$= 2^3 \times 3^3 \times 5^2 \times 7^1$

$\therefore$ विभाजकों की कुल संख्या $= (3+1)(3+1)(2+1)(1+1) = 96$

$\therefore$ 1 के अतिरिक्त विभाजकों की कुल संख्या $= 96 - 1 = 95$

किसी पूर्णांक द्वारा विभाज्य समस्त संख्याओं की संख्या

उदा. 1: 100 तक 6 से कितनी संख्याएँ विभाज्य हैं?

हल: 100 में 6 से भाग दें: प्राप्त भागफल ही अभीष्ट संख्याओं की संख्या है।

$100 = \underline{16} \times 6 + 4$

$\therefore$ संख्याओं की संख्या – 16

उदा. 2: 200 तक 4 एवं 3 से समान रूप से विभाज्य कितनी संख्याएँ हैं?

हल: 4 एवं 3 का लघुत्तम समापवर्त्य – 12

200 में 12 से भाग दें। प्राप्त भागफल ही अभीष्ट संख्याओं की संख्या है।

$200 = \underline{16} \times 12 + 8$

$\therefore$ अभीष्ट संख्या – 16

उदा. 3: 100 एवं 300 के बीच कितनी संख्याएँ 7 से विभाज्य हैं?

हल: 100 तक ऐसी 14 संख्याएँ हैं जो 7 से विभाज्य हों, क्योंकि $100 = 14 \times 7 + 2$

300 तक ऐसी 42 संख्याएँ हैं जो 7 से विभाज्य हों, क्योंकि $300 = \underline{42} \times 7 + 6$

$\therefore$ अभीष्ट संख्याओं की संख्या $= 42 - 14 = 28$

दूसरी विधि:

पहला चरण: सर्वप्रथम प्रदत्त सीमाओं का प्रसार (range) ज्ञात करें। यहाँ प्रसार $= (300 - 100) = 200$

yoursmahboob

दूसरा चरण: प्रसार को 7 से विभाजित करें, भागफल ही अभीष्ट संख्याओं की संख्या है:

$200 \div 7 = 28$

$\therefore$ अभीष्ट संख्याओं की संख्या $= 28$

नोट: उपर्युक्त विधि हर जगह उपयोगी नहीं हो सकती है। कभी कभी इससे प्राप्त उत्तर गलत भी हो सकता है। उदाहरण के लिए निम्नलिखित प्रश्न को देखें:

उदा. 4: 100 एवं 300 के बीच कितनी संख्याएँ 13 से विभाज्य हैं?

हल: ***पहली विधि:***

100 तक 13 से विभाजित होने वाली संख्याओं की संख्या = 7, क्योंकि

$100 = \underline{7} \times 13 \times 9$

इसी तरह 300 तक 13 से विभाजित होनेवाली संख्याओं की संख्या = 23, क्योंकि

$300 = \underline{23} \times 13 = 1$

$\therefore$ अभीष्ट संख्याओं की संख्या $= 23 - 7 = 16$

दूसरी विधि:

प्रसार $= 300 - 100 = 200$ एवं

$200 = \underline{15} \times 13 + 5$

$\therefore$ संख्याओं की संख्या 15, जो कि सही नहीं है।

नोट: आपने देखा कि किस तरह एक ही प्रश्न के दो उत्तर प्राप्त हो गए। छात्रों को सलाह दी जाती है कि कृपया केवल पहली विधि का ही इस्तेमाल करें:

उदा. 5: 1000 से कम वह कौन सी संख्या है, जिससे 43521 में गुणा करने पर गुणनफल के दायीं ओर स्थित अंतिम तीन अंक 791 होंगे?

हल: गुणनखंड का आखिरी अंक 1 है। इसलिए गुणक का आखिरी अंक भी 1 होगा। अब मान लें कि गुणक का दूसरा अंक x है; तब गुणा के नियम के अनुसार (गुणनखंड एवं गुणक के अंतिम दो अंकों के बीच वज्र-गुणनफल)

$$\begin{array}{r} 43521 \\ \times 1 \\ \hline 791 \end{array}$$

$1 \times 2 + 1 \times x = 9 \therefore x = 7$

अब गुणक की तीसरी संख्या प्राप्त करने के लिए,

$$\begin{array}{r} 43521 \\ \times 71 \\ \hline 791 \end{array}$$

$5 \times 1 + 2 \times 7 + 1 \times x = 7$

या $19 + x = 7$

$\therefore x = 8$

$\therefore$ तीन अंकों वाली अभीष्ट संख्या $= 871$

yoursmahboob

उदा. 6: निम्नलिखित समीकरण में Q का महत्तम मान क्या होगा?

$$5P9 - 3R7 + 2Q8 = 1114$$

(1) 8 (2) 7 (3) 5 (4) 4

(5) इनमें से कोई नहीं

हल : $5P9 + 3R7 + 2Q8 = 1114$

Q के महत्तम मान के लिए, P एवं R के मानों को निश्चय ही शून्य होना चाहिए

अब, $509 + 307 + 2Q8 = 1114$

या, $816 + 2Q8 = 1114$

या, $2Q8 = (1114 - 816) = 298$

$\therefore$ Q का अभीष्ट मान = 9

उदा. 7: यदि तीन अंकों वाली किसी संख्या के अंतिम दो अंकों को परस्पर बदल दिया जाए तो इस प्रकार प्राप्त नयी संख्या, मूल संख्या से 54 अधिक हो जाता है। उस संख्या के दोनों अंकों के बीच का अंतर ज्ञात करें।

(1) 9 (2) 12 (3) 6

(4) आंकड़ा पर्याप्त नहीं है (5) इनमें से कोई नहीं

हल : माना कि तीन अंकों की संख्या = $100x + 10y + z$

प्रश्नानुसार,

$$(100x + 10z + y) - (100x + 10y + z) = 54$$

या, $9z - 9y = 54$, या $z - y = 6$

नोट : इस प्रकार की स्थिति में अंतिम दो अंकों के बीच का अंतर

$$= \frac{\text{दोनों मानों के योग का अंतर}}{9} = \frac{54}{9} = 6 \quad \textbf{(याद रखें)}$$

अभ्यास प्रश्न

1. 120 तक कितनी संख्याएँ 8 से विभाज्य हैं?
2. 200 से 500 के बीच कितनी संख्याएँ 13 से विभाज्य हैं?
3. 100 से 300 के बीच कितनी संख्याएँ 13 के अपवर्त्य हैं?
4. 1 से 201 के बीच की समस्त विषम संख्याओं का योगफल निकालें।
5. 101 से 309 के बीच की समस्त सम संख्याओं का योगफल निकालें।
6. 50 से 151 तक की समस्त सम एवं विषम संख्याओं के योगफल का अंतर निकालें।
7. 7 अंकों की कुल कितनी संख्याएँ बन सकती हैं?
8. 200 तक कितनी ऐसी संख्याएँ हैं जो 5 एवं 7 दोनों से विभाज्य हों?
9. 200 एवं 400 के बीच कितनी ऐसी संख्याएँ हैं, जो 3, 4 एवं 5 तीनों से विभाज्य हों?
10. यदि दो संख्याओं का योग 22 है एवं उनका अंतर 14, तो उन संख्याओं का गुणनफल निकालें।
11. यदि दो संख्याओं का योगफल 30 है एवं उनका अंतर 6 है तो उनके वर्गों का अंतर प्राप्त करें।
12. यदि दो पदों का गुणनफल 39 है एवं उनका अंतर 28 है तो उनके व्युत्क्रमों का अंतर प्राप्त करें।

yoursmartboob

13. 9680 से ठीक बड़ी वह कौन-सी संख्या है, जो 71 से विभाज्य हो?
14. 7, 3, 1, 2 के इस्तेमाल से निर्मित सबसे बड़ी एवं सबसे छोटी संख्याओं के बीच का अंतर बताएँ।
15. वह न्यूनतम संख्या कौन-सी है, जो एक पूर्ण वर्ग हो तथा जिसका एक गुणनखंड 3675 हो?
16. वह न्यूनतम संख्या बताएँ, जिसे 9600 में से घटाने पर वह 78 से विभाज्य हो जाए हो।
17. वह न्यूनतम संख्या कौन-सी है, जिसे 3000 में जोड़ने पर वह 57 का अपवर्त्य बन जाए?
18. भाग के एक प्रश्न में भागफल 105 है तथा शेष 195 है। यदि भाजक, भागफल एवं शेष का योगफल है, तो भाज्य क्या है?
19. 200 एवं 600 के बीच की उन समस्त संख्याओं का योगफल निकालें जो 16 से विभाज्य हों।
20. क्या 1001 एक रूढ़ संख्या है?
21. क्या 401 एक रूढ़ संख्या है?
22. 60 एवं 80 के बीच की समस्त रूढ़ संख्याओं का योगफल निकालें।
23. जब एक खास संख्या में 13 से गुणा किया जाता है तो गुणनफल में केवल 7 ही दिखाई पड़ते हैं। ऐसी न्यूनतम संख्या कौन सी है?
24. वह कौन सी संख्या है, जिसमें 16 से गुणा करने पर उस संख्या में 225 की वृद्धि हो जाती है?
25. पिन्टो की पहली 200 संख्याओं को लिखने के लिए अर्थात् 1, 2, 3, ... से 200 तक लिखने के लिए टाइपराइटर की कुंजी को कितनी बार दबाना होगा?
26. भाग के एक सवाल में भाजक, भागफल का 4 गुना है और शेष का 3 गुना। भाज्य क्या है, यदि शेष 4 हो?
27. 10000 में से 79 को कितनी बार घटाया जाए कि शेष 6425 बचे?
28. 30^6 में शामिल समस्त रूढ़ संख्याओं की संख्या बताएँ?
29. वह कौन सी संख्या है, जिसको अपने में ही 20 बार जोड़ने से परिणाम 861 आता हो?
30. यदि 97 में किसी संख्या से गुणा करते हैं तो उसमें 7584 की वृद्धि होती है तो वह संख्या बताएँ।
31. किसी संख्या को यदि पहले 3 से एवं बाद में 5 से विभाजित किया जाता है तो शेष क्रमशः 1 एवं 2 मिलते हैं। शेष कितना बचेगा, यदि उसी संख्या को 15 से विभाजित किया जाए?
32. ऐसी न्यूनतम संख्या बताएँ जिसमें पहले 7 से एवं फिर 9 से भाग देने पर शेष क्रमशः 3 एवं 5 प्राप्त होते हैं।
33. किसी संख्या में 36 से भाग देने पर शेष 21 बचता है। शेष क्या बचेगा, यदि उसी संख्या को 12 से विभाजित किया जाए?
34. किसी संख्या में 13 से गुणा करने पर गुणनफल में केवल 5-ही-5 मिलते हैं। ऐसी संख्या का न्यूनतम मान बताएँ।
35. यदि a = 16 एवं b = 15 हो तो $\frac{a^2+b^2+ab}{a^3-b^3}$ का मान बताएँ।
36. वह कौन सी सबसे बड़ी प्राकृत संख्या है, जिससे तीन लगातार सम प्राकृत संख्याओं का गुणनफल सदा विभाज्य हो?
37. यदि $\frac{x}{y}=\frac{3}{4}$ हो तो $\frac{6}{7}+\frac{y-x}{y+x}$ का मान क्या होगा?

yoursmahboob

38. यदि $\sqrt[n]{\left\{1+\frac{27}{169}\right\}}=\left\{1+\frac{x}{13}\right\}$ हो तो x = ... है।

39. * को वह कौन-सा न्यूनतम मान दिया जाए ताकि संख्या 6135 * 2, 9 से पूरी तरह विभाज्य हो जाए?

40. * का वह कौन-सा न्यूनतम मान है, जिसके लिए 97215*6, 11 से विभाज्य हो जाएगी?

41. * के किस न्यूनतम मान के लिए 91876*2, 8 से विभाज्य है?

42. चार अंकों वाली सबसे बड़ी संख्या कौन-सी है, जो 88 से पूरी तरह विभाजित हो जाए?

43. पहली रूढ़ संख्या कौन-सी है?

44. यदि संख्या (10^n-1) 11 से विभाज्य हो तो n

1) विषम संख्या है
2) सम संख्या है
3) कोई भी संख्या हो सकती है
4) 11 का अपवर्त्य है

45. यदि $\frac{a}{b}=\frac{4}{3}$ हो तो $\frac{3a+2b}{3a-2b}=?$

46. $\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{n}\right)=?$

47. $\left(2-\frac{1}{3}\right)\left(2-\frac{3}{5}\right)\left(2-\frac{5}{7}\right)\ldots\left(2-\frac{997}{999}\right)=?$

48. $\frac{137\times137+137\times133+133\times133}{137\times137\times137-133\times133\times133}=?$

49. $\frac{?}{54}=\frac{96}{?}$

50. $(6)^{10}\times(7)^{17}\times(11)^{27}$ में रूढ़ गुणनखंडों की संख्या बताएँ।

हल (संकेत)

1. $\frac{120}{8}=15$

2. 200 तक 13 से विभाज्य संख्याओं की संख्या $=\frac{200}{13}=15+\frac{5}{13}\approx15$

500 तक 13 से विभाज्य संख्याओं की संख्या $=\frac{500}{13}=38+\frac{6}{13}\approx38$

$\therefore$ अभीष्ट संख्या $=38-15=23$

yoursmahboob

3. 100 तक 13 के अपवर्तों की संख्या $= \frac{100}{13} = 7 + \frac{9}{13} \approx 7$

300 तक 13 के अपवर्तों की संख्या $= \frac{300}{13} = 23 + \frac{1}{13} \approx 23$

$\therefore$ अभीष्ट संख्या $= 23 - 7 = 16$

4. संख्याओं की संख्या (201) एक विषम संख्या है, इसलिए विषम संख्याओं की संख्या

$= \frac{1}{2}(201+1) = 101$ विषम संख्याएँ

$\therefore$ पहले 101 विषम संख्याओं का योगफल $= (101)^2 = 10201$

5. 309 तक की सम संख्याओं की संख्या $= \frac{1}{2}(309-1) = 154$

पहली 154 सम संख्याओं का योगफल $= 154(154+1) = 23870$

101 तक की सम संख्याओं की संख्या $= \frac{1}{2}(101-1) = 50$

$\therefore$ पहली 50 सम संख्याओं का योगफल $= 50(50+1) = 2550$

$\therefore$ अभीष्ट योगफल $= 23870 - 2550 = 21320$

6. यदि शृंखला सम संख्या से शुरू होकर विषम संख्या पर समाप्त होती हो तो अभीष्ट अंतर

$= \frac{151-50+1}{2} = \frac{102}{2} = 51$

नोट: 1) यदि शृंखला विषम संख्या से शुरू होती हो और विषम संख्या पर ही समाप्त भी होती हो तो ऐसा अंतर $= \frac{\text{अंतिम संख्या} + \text{पहली संख्या}}{2}$

2) यदि शृंखला सम संख्या से शुरू होकर विषम संख्या पर समाप्त होती हो तो ऐसा अंतर $= \frac{\text{अंतिम संख्या} - \text{पहली संख्या} + 1}{2}$

3) यदि शृंखला सम संख्या से शुरू होकर सम संख्या पर ही समाप्त होती हो तो ऐसा अंतर $= \frac{\text{अंतिम संख्या} + \text{प्रथम संख्या}}{2}$

7. 7 अंकों वाली न्यूनतम संख्या $= 1000000$

7 अंकों वाली महत्तम संख्या $= 9999999$

$\therefore$ 7 अंकों वाली संख्याओं की संख्या $= 9999999 - 1000000 + 1 = 9 \times 10^6$

8. जो संख्याएँ एक साथ 5 एवं 7 दोनों ही से विभाज्य हों तो वे संख्याएँ उनके लघुत्तम समापवर्त्य से भी विभाज्य होंगी:

yoursmahboob

5 एवं 7 का लघुतम समापवर्त्य = 35

$\therefore$ अभीष्ट संख्याओं की संख्या $= \frac{200}{35} = 5 + \frac{25}{35} \approx 5$

9. 3, 4 एवं 5 का ल.स. (लघुत्तम समापवर्त्य) = 60

200 तक 60 से विभाजित होने वाली संख्याओं की संख्या $= \frac{200}{60} = 3 + \frac{1}{3} \approx 3$

400 तक 60 से विभाजित होने वाली संख्याओं की संख्या $= \frac{400}{60} = 6 + \frac{2}{3} \approx 6$

$\therefore$ अभीष्ट संख्या $= 6 - 3 = 3$

10. मान लिया कि संख्याएँ x एवं y हैं।

तब, $x + y = 22$ ....(1)

$x - y = 14$ ....(2)

(1) एवं (2) को वर्ग करने पर,

$x^2 + y^2 + 2xy = 484$ ....(3)

$x^2 + y^2 - 2xy = 196$ ....(4)

(4) में से (3) घटाने पर,

$4xy = 288$

$\therefore \quad xy = \frac{288}{4} = 72$

द्रुत विधि:

I. दो संख्याओं का गुणनफल $= \frac{(\text{योगफल})^2 - (\text{अंतर})^2}{4}$

$$= \frac{(22)^2 - (14)^2}{4} = \frac{36 \times 8}{4} = 72$$

II. $x = \frac{22 + 14}{2} = 18$

$y = \frac{22 - 14}{2} = 4$

$\therefore xy = 18 \times 4 = 72$

11. मान लिया कि दो संख्याएँ x एवं y हैं।

$x + y = 30, x - y = 6$

या, $(x + y)(x - y) = 180$ या, $x^2 - y^2 = 180$

yoursmahboob

12. मान लिया कि दो पद x एवं y हैं।

प्रश्नानुसार,

$x - y = 28$ ..... (i)

एवं $xy = 39$ ..... (ii)

(ii) से (i) को विभाजित करने पर, $\frac{x}{xy} - \frac{y}{xy} = \frac{28}{39}$ या, $\frac{1}{y} - \frac{1}{x} = \frac{28}{39}$

13. 9680 को 71 से विभाजित करने पर हमें शेष मिलता है 24।

∴ 9680, 71 से पूरी तरह विभाज्य हो, इसके लिए इसमें $(71 - 24) = 47$ जोड़ने की जरूरत है।

∴ अभीष्ट संख्या $= 9680 + 47 = 9727$

14. महत्तम संख्या = 7431 एवं न्यूनतम संख्या = 1347

∴ अभीष्ट अंतर $7431 - 1347 = 6084$

15. $3675 = 3 \times 5 \times 5 \times 7 \times 7 = 3 \times 5^2 \times 7^2$

यहाँ 3 के अतिरिक्त सभी गुणनखंड वर्ग हैं। यदि 3675 को 3 से गुणा कर दिया जाए तो प्राप्त संख्या एक पूर्ण वर्ग होगी, जिसका एक गुणनखंड 3675 भी होगा।

∴ अभीष्ट न्यूनतम संख्या $= 3675 \times 3 = 11025$

16. 9600 में 78 से भाग देने पर शेष बचता है 6। यदि 9600 में से 6 घटा लिया जाए तो प्राप्त संख्या में कुछ भी शेष नहीं बचेगा। ∴ अभीष्ट न्यूनतम संख्या = 6

17. 3000 में 57 से भाग देने पर शेष मिलता है 36। इसलिए अभीष्ट न्यूनतम संख्या $= 57 - 36 = 21$, जिसे 3000 में जोड़ने पर प्राप्त संख्या 57 का अपवर्त्य हो जाती है अर्थात् यह संख्या 57 से पूरी तरह विभाज्य हो जाती है।

18. $Q = 105, R = 195, D = Q + R = 105 + 195 = 300$

भाज्य $= D \times Q + R = 31695$

19. ऐसी न्यूनतम संख्या $= 16 \times 13 = 208$

ऐसी महत्तम संख्या $= 16 \times 37 = 592$

अभीष्ट योगफल $= 16 \times 13 + 16 \times 14 + \ldots + 16 \times 37$

$= 16(13 + 14 + \ldots + 37)$

$= 16[(1 + 2 + \ldots + 37) - (1 + 2 + \ldots + 12)]$

$= 16\left[\frac{37 \times 38}{2} - \frac{12 \times 13}{2}\right]$

$= 16[703 - 78] = 10000$

20. 1001 का संभावित वर्गमूल = 32

32 से छोटी रूढ़ संख्याएँ = 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 एवं 31

यहाँ 1001, 7 से विभाज्य है, इसलिए यह रूढ़ संख्या नहीं है।

21. 401 का संभावित वर्गमूल = 20

yoursmahboob

20 से छोटी रूढ़ संख्याएँ – 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19।

40 उपर्युक्त किसी भी रूढ़ संख्या से विभाज्य नहीं है। इसलिए 40 एक रूढ़ संख्या है।

22. योगफल = 61 + 67 + 71 + 73 + 79 = 351

23. एक ऐसी संख्या लिखें, जिसमें केवल दो 7 हों (77)। इसमें 13 से भाग दें। यदि यह पूर्णतया विभाज्य है तो विभाजन से प्राप्त भागफल ही अभीष्ट संख्या है। यदि यह संख्या विभाज्य नहीं है, तब एक और 7 लिखें एवं 13 से इसकी विभाज्यता का परीक्षण करें। यदि यह पूर्णतया विभाज्य है तो भागफल ही अभीष्ट संख्या है। यदि नहीं तो एक और 7 लिखें और फिर उपर्युक्त क्रिया करें। इस तरह करते रहने पर

777777 ÷ 13 = 59829

24. मान लिया कि संख्या x है। प्रश्नानुसार, $16x - x = 225$

$$\therefore \quad x = \frac{225}{15} = 15$$

नोट: इस स्थिति में अभीष्ट संख्या = $\dfrac{\text{बढ़ा हुआ मान}}{\text{गुणक} - 1}$

25. 200 अंक एक, दो एवं तीन अंकों की संख्याएँ क्रमशः 9, 90 एवं 101 हैं।

$\therefore$ टाइपराइटर की कुंजी $= 9 \times 1 + 90 \times 2 + 101 \times 3$

$= 9 + 180 + 303 = 492$ बार दबानी होगी।

26. $R = 4, D = 3 \times R = 12, Q = \dfrac{D}{d} = \dfrac{12}{4} = 3$

भाज्य $= DQ + R = 12 \times 3 + 4 = 40$

27. अभीष्ट करोड़ता $= \dfrac{10000 - 6445}{79} = 45$

28. $(30)^6 = (2 \times 3 \times 5)^6 = 2^6 \times 3^6 \times 5^6$

2, 3, एवं 5 में से प्रत्येक का घातांक 6 है, इसलिए

रूढ़ संख्याओं की संख्या = 6 + 6 + 6 = 18

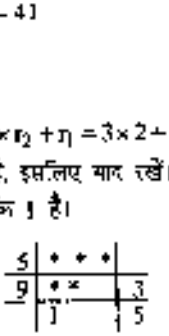
29. अभीष्ट संख्या $= \dfrac{861}{20+1} = \dfrac{861}{21} = 41$

30. अभीष्ट संख्या $= \dfrac{7584}{97-1} = 79$

31. **द्रुत विधि से:** अभीष्ट शेष $= d_1 \times r_2 + r_1 = 3 \times 2 + 1 = 7$

नोट: यह बहुत महत्वपूर्ण विधि है, इसलिए याद रखें।

32. अंतिम भागफल से शुरू करें जो कि 1 है।



yoursmahboob

** = 9 × 1 − 5 = 14

*** = 7 × 14 + 3 = 101

33. संख्या = 36x − 21 = 36x + 12 + 9 = (36x − 12) + 9

चूँकि (36x + 12), 12 से विभाज्य है, इसलिए शेष = 9

नोट: जब पहला भाजक दूसरे भाजक से विभाज्य हो, तो अभीष्ट शेष प्राप्त करने के लिए पहले शेष में दूसरे भाजक से भाग देना होगा

34. प्रश्न 23 के समान ही हल करें।

35. $\frac{a^2 + b^2 + ab}{a^3 - b^3} = \frac{1}{a-b} = \frac{1}{16-15} = 1$

36. ऐसी महत्तम संख्या = (2 × 4 × 6) = 48

37. $\frac{x}{y} = \frac{3}{4}$ (componendo-dividendo वाले नियम के अनुसार)

$\frac{y-x}{y-x} = \frac{4-3}{4+3} = \frac{1}{7}$

तब, $\frac{6}{7} + \frac{y-x}{y+x} = \frac{6}{7} + \frac{1}{7} = \frac{7}{7} = 1$

38. $\sqrt{1+\frac{27}{169}} = \sqrt{\frac{196}{169}} = \frac{14}{13} = 1 + \frac{1}{13}$ ∴ x = 1

39. कोई संख्या 9 से तभी विभाज्य होगी, जब उस संख्या का आंकिक योग भी 9 से विभाज्य हो। * को छोड़कर प्रदत्त संख्या के शेष सभी अंकों का योग = 17 है। यदि * = 1 रख दें तो प्रदत्त संख्या 9 से पूरी तरह विभाज्य हो जाएगी।

40. 97215 * 6

विषम-स्थानों पर स्थित अंकों का योग = 9 + 2 + 5 + 6 = 22

(* को छोड़कर) सम स्थानों पर स्थित अंकों का योग = 7 + 1 = 8

दोनों का अंतर या तो शून्य होना चाहिए या 11 से विभाज्य होना चाहिए।

इसलिए * = 3

41. अंतिम तीनों अंक 8 से विभाज्य होना चाहिए। इसलिए * = 3

42. चार अंकों वाली महत्तम संख्या = 9999

9999 में 88 से भाग देने पर शेष बचता है 55। अब यदि यह शेष 9999 में से घटा दिया जाए, तो प्राप्त संख्या 88 से पूर्णतया विभाज्य होगी।

∴ अभीष्ट संख्या = 9999 − 55 = 9944

43. 2

44. n एक सम संख्या होनी चाहिए।

45. $\frac{a}{b} = \frac{4}{3}$ (componendo-dividendo नियम के अनुसार)

yoursmahboob

$$\frac{3a+2b}{3a-2b}=\frac{3\times4+2\times3}{3\times4-2\times3}=\frac{18}{6}=3$$

46. $\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{4}{5}\times\ldots\times\frac{n-1}{n}=\frac{2}{n}$

47. $\frac{5}{3}\times\frac{7}{5}\times\frac{9}{7}\times\ldots\times\frac{1001}{999}=\frac{1001}{3}$

48. सूत्र $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$ का इस्तेमाल करें।

इस प्रकार प्रदत्त समीकरण $=\frac{1}{137-133}=\frac{1}{4}$

49. $(?)^2=54\times96$

$\therefore\ ?=\sqrt{9\times6\times6\times16}=3\times6\times4=72$

50. $(6)^{10}\times(7)^{17}\times(11)^{27}=(2)^{10}\times(3)^{10}\times(7)^{17}\times(11)^{27}$

$\therefore$ रूढ़ गुणनखंडों की कुल संख्या $=10+10+17+27=64$

yoursmahboob

द्विआधारी पद्धति
(Binary System)

संख्या पद्धति (Number System) एक पद्धति है जो विभिन्न संख्याओं को भिन्न भिन्न तरीके से निरूपित (represent) करता है। कई संख्या पद्धति हैं। सभी संख्या पद्धतियों का भिन्न भिन्न आधार होता है। आधार संख्या पद्धति में प्रयुक्त चिह्नों की संख्या को निर्दिष्ट करता है। उदाहरण के लिए, दशमलव पद्धति में आधार 10 होता है तथा इसमें 10 चिह्नों का प्रयोग (0, 1, 2, 3, ..., 9) होता है। संख्या पद्धति का कुछ और उदाहरण नीचे सारणी के रूप में दिया गया है:

संख्या पद्धति	आधार	चिह्नों का निरूपण
पंचाधारी संख्या पद्धति (Quinary No. System)	5	0, 1, 2, 3, एवं 4
अष्टाधारी संख्या पद्धति (Octal No. System)	8	0, 1, 2, 3, ..., 7
हेक्साडेसिमल संख्या पद्धति (Hexadecimal No. System)	16	0, 1, 2, 3, ..., 9, A (10) B (11), C (12), ... F (15)
द्विआधारी संख्या पद्धति (Binary No. System)	2	0 एवं 1

द्विआधारी संख्या पद्धति को जानकारी सर्वप्रथम सन् 1946 में जे. वी. न्यूमैन (JV Newman) ने दिया।

दशमलव संख्या को द्विआधारी संख्या में परिवर्तित करना

किसी दशमलव संख्या (Decimal Number) के समतुल्य द्विआधारी संख्या (Binary Number) ज्ञात करने के लिए हम उक्त दशमलव संख्या को लगातार 2 से तब तक भाग देते हैं जब तक कि अंतिम भागफल (Quotient) 1 प्राप्त नहीं होता है।

उदाहरण के लिए हम 89 को द्विआधारी पद्धति में परिवर्तित करते हैं।

2	89	$2 \times q_1$ (i.e. 44) = 88; 89 - 88 = 1 (r_1)
	44	$2 \times q_2$ (i.e. 22) = 44; 44 - 44 = 0 (r_2)
	22	$2 \times q_3$ (i.e. 11) = 22; 22 - 22 = 0 (r_3)
	11	$2 \times q_4$ (i.e. 5) = 10; 11 - 10 = 1 (r_4)
	5	$2 \times q_5$ (i.e. 2) = 4; 5 - 4 = 1 (r_5)
	2	$2 \times q_6$ (i.e. 1) = 2; 2 - 2 = 0 (r_6)
	1 (अंतिम भागफल)	

$q_1, q_2, \ldots\ldots$, पहला, दूसरा .....भागफल हैं तथा $r_1, r_2, \ldots\ldots$, पहला, दूसरा ....., शेष है। भाग के सभी चरणों के लिए सार्व भाजक (Common Divisor) 2 अपरिवर्तित रहता है तथा प्राप्त भागफल अगला भाज्य बन जाता है। यह प्रक्रिया लगातार तब तक चलता रहता है जब तक कि अंतिम भागफल 1 नहीं प्राप्त हो जाता है।

यहाँ, वास्तविक भाज्य (real dividend) में दो से भाग देने पर पहला भागफल q_1 (= 44)

yoursmanhood

हमारा दूसरा भाजक बन जाता है। अब 44 में 2 से भाग देने पर दूसरा भागफल q_2 (= 22) हमारा अगला भाज्य हो जाता है। और इसी तरह से आगे भी। प्रत्येक बार शेष को सावधानी पूर्वक लिखना चाहिए। जब अंतिम भागफल 1 के रूप में प्राप्त होता है तो अंततः हम सभी शेष को (अंतिम भागफल 1 को भी शामिल करते हुए) तीर के चिह्न के अनुसार लिखते हैं। अर्थात् हम अन्ततः निम्नलिखित तरीके से लिखते हैं:

सर्वप्रथम अंतिम भागफल, फिर अंतिम शेष, दूसरा अंतिम शेष,....., तीसरा शेष, फिर दूसरा शेष, एवं अंततः पहला शेष। अर्थात् 89 के समतुल्य द्विआधारी संख्या है : 1011001

या अंकन पद्धति (notation) से

$(89)_{10} = (1011001)_2$

आधार 10 दशमलव पद्धति के लिए तथा आधार 2 द्विआधारी पद्धति के लिए प्रयुक्त हुआ है।

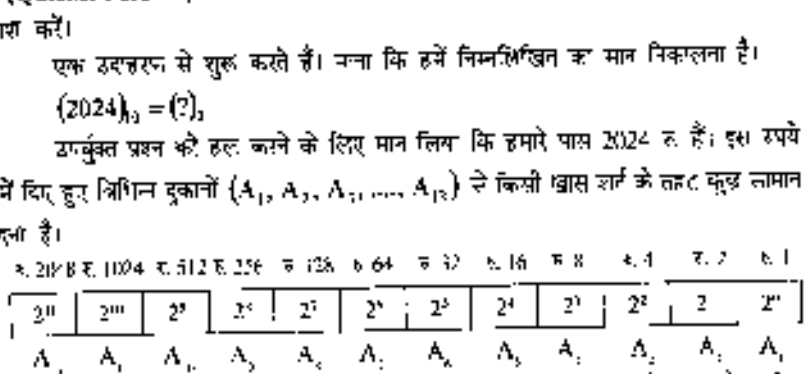
द्रुत विधि (Quicker Method):

पहली विधि छोटी संख्या के लिए उपयोगी तथा सुविधाजनक है। परंतु दी हुई संख्या बड़ी हो तो यह विधि काफी लंबी तथा अधिक समय लगाने वाली सिद्ध हो सकती है। इसलिए हमें द्रुत विधि (Quicker Method) की आवश्यकता है। नीचे दी गई विधि को ध्यानपूर्वक पढ़कर समझने की कोशिश करें।

एक उदाहरण से शुरू करते हैं। जैसा कि हमें निम्नलिखित का मान निकालना है।

$(2024)_{10} = (?)_2$

उपर्युक्त प्रश्न को हल करने के लिए मान लिया कि हमारे पास 2024 रु. हैं। इस रुपये से हमें दिए हुए विभिन्न दुकानों ($A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{12}$) से किसी खास शर्त के तहत कुछ सामान खरीदना है।



उपर्युक्त चित्र में $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{12}$ द्वारा विभिन्न दुकानों को दर्शाया गया है। प्रत्येक दुकान में केवल एक ही प्रकार का सामान मिलता है किसी एक खास दुकान में प्रत्येक सामान की कीमत अलग-अलग है और यह प्रत्येक दुकान के ऊपर लिखा गया है (उपर्युक्त चित्र को देखें)। उपर्युक्त चित्र में हम देख सकते हैं कि दुकानों $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{12}$ के प्रत्येक सामान की कीमत 2 के घात के रूप में दिया गया है (क्रमशः 1 रु., 2 रु., 4 रु., ..., 2048 रु.)

शर्तें

(i) हमें सामान खरीदना उस दुकान से प्रारंभ करना है जिससे हम हमारे पास उपलब्ध रकम से सबसे महंगा सामान खरीद सकें।

प्रदत्त प्रश्न में हम दुकान A_{11} से सामान खरीदना प्रारंभ करेंगे क्योंकि उपलब्ध रकम (2024 रु.) से सबसे महंगा सामान हम A_{11} (1024 रु.) से ही खरीद सकते हैं।

yoursmahboob

(ii) हमें एक दुकान से केवल एक ही सामान खरीदना है और उस दुकान के ठीक नीचे हम 1 लिखते हैं।

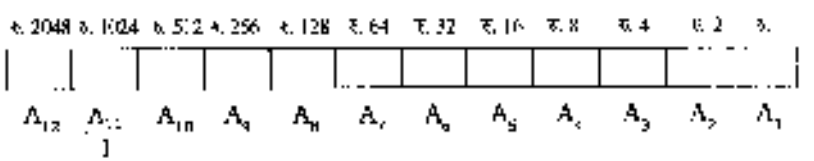
(iii) यदि हमारे पास किसी खास दुकान से एक सामान खरीदने के लिए पर्याप्त रकम नहीं हो तो हम उस दुकान के ठीक नीचे '0' लिखकर अगले दुकान पर बढ़ जाते हैं.

हम दुकान A_{11} से अपनी खरीददारी आरंभ करेंगे क्योंकि हमारे पास उपलब्ध रकम 2024 रु. है और दुकान A_{11} के प्रत्येक सामान की कीमत 1024 रु. है। हम दुकान A_{12} पर नहीं जा सकते हैं क्योंकि A_{12} के प्रत्येक सामान की कीमत 2048 रु. है और हमारे पास उपलब्ध रकम 2024 रु. ही है।

दुकान A_{11} से सामान खरीदकर उस दुकान के ठीक नीचे 1 लिखकर बची हुई रकम के साथ अगले दुकान पर जाना चाहिए (देखें (ii) देखें), और इसी तरह आगे भी।

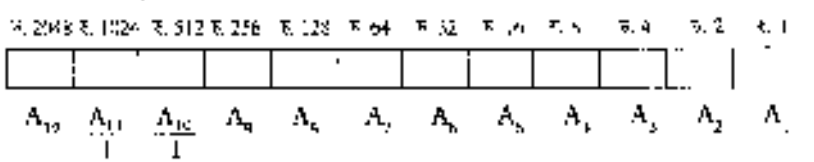
दुकान A_{11} पर

इस दुकान पर हम 1024 रु. का एक सामान खरीदकर दुकान के नीचे 1 लिखकर (जैसा कि नीचे चित्र में दर्शाया गया है) बची हुई रकम (2024 रु. − 1024 रु. =) 1000 रु. के साथ दुकान A_{10} पर चले जाते हैं।



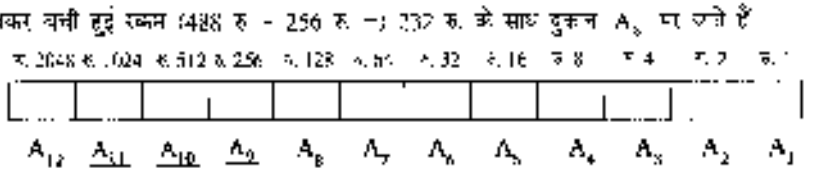
दुकान A_{10} पर

इस दुकान पर 512 रु. का एक सामान खरीदकर तथा दुकान के ठीक नीचे 1 लिखकर (जैसा कि चित्र में दर्शाया गया है) बची हुई रकम (1000 रु. − 512 रु. =) 448 रु. के साथ दुकान A_9 पर चले जाते हैं।



दुकान A_9 पर

हम इस दुकान पर 256 रु. का एक सामान खरीद सकते हैं और दुकान के ठीक नीचे 1 लिखकर बची हुई रकम (448 रु. − 256 रु. =) 192 रु. के साथ दुकान A_8 पर जाते हैं



yoursmahboob

दुकान A_8 पर

हम 128 रु. का एक सामान खरीदकर एवं दुकान के नीचे । लिखकर बची हुई रकम (256 रु. – 128 रु. =) 104 रु. के साथ दुकान A_7 पर जाते हैं।

रु. 2048	रु. 1024	रु. 512	रु. 256	रु. 128	रु. 64	रु. 32	रु. 16	रु. 8	रु. 4	रु. 2	रु. 1
A_{12}	A_{11}	A_{10}	A_9	A_8	A_7	A_6	A_5	A_4	A_3	A_2	A_1
	1	1	1	1							

दुकान A_7 पर

हम 64 रु. का एक सामान खरीदकर एवं दुकान A_7 के ठीक नीचे । लिखकर बची हुई रकम (104 रु. – 64 रु. =) 40 रु. के साथ दुकान A_6 पर जाते हैं

रु. 2048	रु. 1024	रु. 512	रु. 256	रु. 128	रु. 64	रु. 32	रु. 16	रु. 8	रु. 4	रु. 2	रु. 1
A_{12}	A_{11}	A_{10}	A_9	A_8	A_7	A_6	A_5	A_4	A_3	A_2	A_1
	1	1	1	1	1						

दुकान A_6 पर

हम 32 रु. का एक सामान खरीदकर तथा दुकान A_6 के नीचे । लिखकर बची हुई रकम (40 रु. – 32 रु. =) 8 रु. के साथ दुकान A_5 पर जाते हैं।

रु. 2048	रु. 1024	रु. 512	रु. 256	रु. 128	रु. 64	रु. 32	रु. 16	रु. 8	रु. 4	रु. 2	रु. 1
A_{12}	A_{11}	A_{10}	A_9	A_8	A_7	A_6	A_5	A_4	A_3	A_2	A_1
	1	1	1	1	1	1					

दुकान A_5 पर

इस दुकान पर प्रत्येक सामान की कीमत 16 रु. है परन्तु हमारे पास केवल 8 रुपये ही हैं। इसलिए इस दुकान पर हम सामान नहीं खरीद सकते हैं, इसलिए हम इस दुकान A_5 के ठीक नीचे '0' लिखकर (शर्त (iii) देखें) 8 रु. के साथ अगली दुकान A_4 पर जाते हैं।

रु. 2048	रु. 1024	रु. 512	रु. 256	रु. 128	रु. 64	रु. 32	रु. 16	रु. 8	रु. 4	रु. 2	रु. 1
A_{12}	A_{11}	A_{10}	A_9	A_8	A_7	A_6	A_5	A_4	A_3	A_2	A_1
	1	1	1	1	1	1	0				

दुकान A_4 पर

हम इस दुकान से 8 रु. का एक सामान खरीद सकते हैं तथा इस दुकान के ठीक नीचे । लिखते हैं। अब हमारे पास कुछ भी रकम शेष नहीं बचता है। फलतः हम दुकान A_3, A_2 एवं A_1

yoursmanhoob

से खरीददारी नहीं कर सकते हैं। इसलिए हम दुकान A_3, A_2 एवं A_1 के नीचे '0' लिख देते हैं (जैसा कि नीचे चित्र में दर्शाया गया है।)

रु. 2048	रु. 1024	रु. 512	रु. 256	रु. 128	रु. 64	रु. 32	रु. 16	रु. 8	रु. 4	रु. 2	रु. 1
2^{11}	2^{10}	2^9	2^8	2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2	2^0
A_{12}	A_{11}	A_{10}	A_9	A_8	A_7	A_6	A_5	A_4	A_3	A_2	A_1
	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0

अर्थात् उत्तर प्राप्त करने के लिए हम इसे निम्नलिखित रूप में लिखते हैं :

11111101000

पाठकों की सलाह दी जाती है कि इस विधि से द्विआधारी पद्धति पर आधारित प्रश्नों का हल करने का अभ्यास करें।

द्विआधारी संख्या को दशमलव संख्या में परिवर्तित करना

द्विआधारी पद्धति में 1 का मान जब हर बार वह अपनी बाईं ओर एक स्थान खिसकता है, स्वयं का दुगुना हो जाता है। तथा जहाँ कहीं भी 0 आता है उसका मान 0 होता है।

1011001 को उसके समतुल्य दशमलव संख्या में परिवर्तित करें। इसको आसानी से समझने के लिए हम 1011001 के प्रत्येक अंक को एक बॉक्स में निम्न प्रकार से लिखते हैं तथा प्रत्येक बॉक्स का मान उसके ऊपर लिखा जाता है।

2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
1	0	1	1	0	0	1

अब, $(1011001)_2$

$= 1\times2^6 + 0\times2^5 + 1\times2^4 + 1\times2^3 + 0\times2^2 + 0\times2^1 + 1\times2^0$

$= 64 + 0 + 16 + 8 + 0 + 0 + 1 \quad (\because 2^0 = 1)$

$= 64 + 16 + 8 + 1 = 89$

कुछ हल किए हुए प्रश्न

उदा. 1: 90 को उसके द्विआधारी समतुल्य में परिवर्तित करें।

2	90	0	(r_1)
	45	1	(r_2)
	22	1	(r_3)
	11	0	(r_4)
	5	1	(r_5)
	2	0	(r_6)
	1		(Q)

यहाँ, हमें प्राप्त होता है: $(90)_{10} = (1011010)_2$

yoursmahboob

सत्यापन:

2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
1	0	1	1	0	1	0

$$(1011010)_2 = 1\times2^6+0\times2^5+1\times2^4+1\times2^3+0\times2^2+1\times2^1+0\times2^0$$
$$=64+0+16+8+0+2+0=64+16+8+2=90$$

उदा. 2: 88 को द्विआधारी पद्धति में परिवर्तित करें।

2	88	0
	44	0
	22	0
	11	1
	5	1
	2	0
	1	

यहाँ, हमें प्राप्त होता है: $(88)_{10} = (1011000)_2$

सत्यापन:

2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
1	0	1	1	0	0	0

$$(1011000)_2 = 2^6+2^4+2^3 = 64+16+8 = 88$$

उदा. 3: निम्नलिखित संख्याओं को दशमलव द्विआधारी पद्धति में परिवर्तित करें तथा उत्तर का सत्यापन भी करें

(i) 2 (ii) 3 (iii) 4 (iv) 5 (v) 6 (vi) 7 (vii) 8

हल: (i)

2	2	0
	1	

अर्थात् $(2)_{10} = (10)_2$

(ii)

2	3	1
	1	

अर्थात् $(3)_{10} = (11)_2$

(iii)

2	4	0
	2	0
	1	

अर्थात् $(4)_{10} = (100)_2$

(iv)

2	5	1
	2	0
	1	

yoursmahboob

अर्थात् $(5)_{10} = (101)_2$

(v)

2	6	0
	3	1
	1	

अर्थात् $(6)_{10} = (110)_2$

(vi)

2	7	1
	3	1
	1	

अर्थात् $(7)_{10} = (111)_2$

(vi)

2	8	0
	4	0
	2	0
	1	

अर्थात् $(8)_{10} = (1000)_2$

सत्यापन:

(i) $(10)_2 = 1\times2^1 + 0\times2^0 = 2+0 = 2$

(ii) $(11)_2 = 1\times2^1 + 1\times2^0 = 2+1 = 3$

(iii) $(100)_2 = 1\times2^2 + 0\times2^1 + 0\times2^0 = 4+0+0 = 4$

(iv) $(101)_2 = 1\times2^2 + 0\times2^1 + 1\times2^0 = 4+0+1 = 5$

(v) $(110)_2 = 1\times2^2 + 1\times2^1 + 0\times2^0 = 4+2+0 = 6$

(vi) $(111)_2 = 1\times2^2 + 1\times2^1 + 1\times2^0 = 4+2+1 = 7$

(vii) $(1000)_2 = 1\times2^3 + 0\times2^2 + 0\times2^1 + 0\times2^0 = 8+0+0+0 = 8$

उदा. 4: एक निश्चित कूट (code) में 0 का चिह्न ⊖ है तथा 1 का चिह्न □ है। 1 से बड़ी संख्या के लिए कोई दूसरा चिह्न नहीं दिया गया है तथा कोई भी दूसरी संख्या सिर्फ इन्हीं दो चिह्नों के सहारे लिखा जाता है। चिह्न □ का अर्थ, इस कूट जब यह अपनी बाईं ओर खिसकता है तो, स्वयं का दुगुना हो जाता है।

0 को लिखा जाता है ⊖

1 को लिखा जाता है □

2 को लिखा जाता है □ ⊖

3 को लिखा जाता है □ □

4 को लिखा जाता है □ ⊖ ⊖

yourismahboob

अब निम्नलिखित प्रश्नों को हल करें :

(i) निम्नलिखित का मान क्या है?

$$2^3 + 2^2 \times 1.5 \times \frac{45}{54} \times \frac{3}{5} - 1^3$$

a) ⊕ □ □ ⊕ b) □ ⊕ ⊕ □ c) □ ⊕ □ ⊕
d) □ □ ⊕ ⊕ e) इनमें से कोई नहीं

(ii) यदि □ □ □ को □ □ ⊖ □ से गुणा किया जाता है तो परिणाम क्या होगा?

a) 165 b) 180 c) 175 d) 200 e) इनमें से कोई नहीं

(iii) निम्नलिखित में से कौन 56 का 37.5% के मान को निरूपित करता है?

a) □ □ ⊕ ⊕ □ b) □ ⊕ □ ⊕ □ c) □ ⊕ ⊖ □ □
d) □ ⊖ □ ⊕ ⊙ e) इनमें से कोई नहीं

(iv) निम्नलिखित में से कौन 42 को निरूपित करता है?

a) □ ⊖ ⊙ □ □ ⊙ b) □ ⊕ □ □ ⊖ ⊕ c) □ □ ⊕ ⊕ □ ⊕
d) □ ⊕ □ ⊕ □ ⊕ e) इनमें से कोई नहीं

(v) निम्नलिखित में से कौन-सा जोड़ा बराबर संख्याओं को निरूपित करता है?

a) 3^3, □ ⊕ ⊕ □ □ b) 4^2, □ ⊕ ⊕ □ ⊕
c) $2^3 \times 3^3$, □ ⊖ ⊕ □ ⊙ ⊙ ⊙ d) $2^2 \times 3^2$, □ ⊕ ⊖ □ □ ⊕
e) इनमें से कोई नहीं

(vi) यदि □ ⊕ ⊕ □ ⊕ ⊖ ⊕ ⊕ में □ ⊖ ⊖ □ ⊕ से भाग दिया जाता है तो परिणाम निम्नलिखित में से कौन-सा है?

a) □ □ ⊕ b) □ □ ⊖ □ c) □ ⊕ ⊕ □
d) □ ⊕ ⊕ ⊕ e) इनमें से कोई नहीं

(vii) □ □ ⊕ ⊕ □ एवं □ □ □ □ का म.स. (HCF) है

a) □ □ ⊕ b) ⊕ ⊕ □ c) □ ⊙ □
d) ⊕ □ ⊕ e) इनमें से कोई नहीं

(viii) □ ⊕ □ □ ⊖ ⊕ × □ □ ⊕ = ?

1) 20 b) 21 c) -19 d) 22 e) इनमें से कोई नहीं

हल: स्पष्टतः उपर्युक्त सभी प्रश्न द्विआधारी संख्या पद्धति पर आधारित हैं।

(i) $2^3 + 2^2 \times 1.5 \times \frac{45}{54} \times \frac{3}{5} - 1^3 = 8 + 4 \times 1.5 \times \frac{9}{18} - 1 = 7 + 3 - 10$

अब हमें 10 के समतुल्य द्विआधारी संख्या ज्ञात करनी है।

2	10	0
	5	1
	2	0
	1	

yoursmahboob

अर्थात्, $(10)_{10} = (1010)_2$

अब 0 एवं 1 के लिए प्रदत्त चिह्नों को प्रयोग करने पर,

$(1010)_2 = \square \oplus \square \odot \Rightarrow$ (c) उत्तर

(ii) प्रदत्त चिह्नों को प्रयोग करने पर, $\square\ \square\ \square\ \square$

$$= (1111)_2 = 1\times2^3 + 1\times2^2 + 1\times2^1 + 1\times2^0$$
$$= 8 + 4 + 2 + 1 = 15$$

एवं $\square\ \square \oplus \square = (1101)_2 = 1\times2^3 + 1\times2^2 + 0\times2^1 + 1\times2^0$

$$= 8 + 4 + 0 + 1 = 13$$

अब, $15 \times 13 = 195$

$\Rightarrow$ (c) उत्तर

(iii) 37.5% का $56 = \frac{3}{8} \times 56 = 21$

अब, 21 के समतुल्य द्विआधारी संख्या

2	21	1
	10	0
	5	1
	2	0
	1	

अर्थात्, $(21)_{10} = (10101)_2 = \square \oplus \square \oplus \square \Rightarrow$ (b) उत्तर

(iv)

2	42	0
	21	1
	10	0
	5	1
	2	0
	1	

अर्थात्, $(42)_{10} = (101010)_2 = \square \oplus \square \oplus \square \oplus \Rightarrow$ (d) उत्तर

(v) (a) $\square \oplus \oplus \square\ \square$ $\cdot (10011)_2 = 2^4 + 0 + 0 + 2^1 + 2^0$

$$= 16 + 2 + 1 = 19 \neq 27 (= 3^3)$$

(b) $\square \oplus \oplus \square \oplus$ $= (10010)_2 = 2^4 + 0 + 0 + 2^1 + 0$

$$= 16 + 2 = 18 \neq 16 (= 4^2)$$

(c) $\square \oplus \oplus \square \odot \ominus \oplus$

$$\Rightarrow (100100)_2 = 2^5 + 0 + 0 + 2^2 + 0 + 0$$

yoursmahboob

$= 64 + 8 = 72 = 8 \times 9 = 2^2 \times 3^2 \Rightarrow$ (c) उत्तर

(d) $\square \oplus \oplus \square \square \oplus = (100110)_2 = 2^5 + 0 + 0 + 2^2 + 2^1 + 0$

$= 32 + 4 + 2 = 19 \neq 36 (= 2^2 \times 3^2)$

(vi) $\square \oplus \oplus \square \oplus \oplus \oplus \oplus$

$\Rightarrow (10010000)_2 = 2^7 + 0 + 0 + 2^4 + 0 + 0 + 0 + 0 = 128 + 16 = 144$

$\square \oplus \oplus \square \oplus = (10010)_2 = 2^4 + 0 + 0 + 2^1 + 0 = 16 + 2 = 18$

अब, $144 \div 18 = 8 = (1000)_2 = \square \odot \oplus \ominus \Rightarrow$ (d) उत्तर

(vii) $\square \square \oplus \oplus \square = (11001)_2 = 2^4 + 2^3 + 0 + 0 + 2^0 = 16 + 8 + 1 = 25$

$\square \square \square \square = (1111)_2 = 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0 = 8 + 4 + 2 + 1 = 15$

25 एवं 15 का म. म. $(11001) - 5 - (101)_2 = \square \square \odot \Rightarrow$ (c) उत्तर

(viii) $\square \odot \square = 5$; $\square \oplus \oplus = 4$; $\square \square \oplus = 6$

$\therefore 5 + 4 \times 6 = 19$ $\therefore$ (c) उत्तर

yourstudybook

महत्तम समापवर्तक एवं लघुत्तम समापवर्त्य
(HCF and LCM)

1. महत्तम समापवर्तक (HCF या HCD या GCM)

गुणनखंड (Factor): एक संख्या को दूसरे का गुणनखंड कहा जाता है यदि वह दूसरे को पूरी तरह विभाजित कर दे। इस प्रकार 6 एवं 7, 42 के गुणनखंड हैं

समापवर्तक (Common Factor): वह संख्या जो दो या दो से अधिक दी हुई संख्याओं को पूर्णतया विभाजित कर दे, उन संख्याओं का समापवर्तक कहलाती है। इस प्रकार, संख्याओं 9, 18, 21 एवं 33 का एक समापवर्तक 3 है।

महत्तम समापवर्तक (Highest Common Factor): दो या उससे अधिक संख्याओं का महत्तम समापवर्तक वह महत्तम (सबसे बड़ी) संख्या है, जो सभी प्रदत्त संख्याओं को पूरी तरह विभाजित कर दे। इस प्रकार 18 एवं 24 का म.स. (HCF) है 6, क्योंकि 6 से बड़ी ऐसी कोई संख्या नहीं है, जिससे 18 एवं 24 दोनों एक साथ विभाजित हो जाएं।

नोट: महत्तम समापवर्तक (HCF) के लिए प्रायः महत्तम अपवर्तक (Highest Common Divisior) एवं उच्चतम समापक (Greatest Common Measure) पदों का भी इस्तेमाल किया जाता है।

दो या दो अधिक संख्याओं का महत्तम समापवर्तक

प्रथम विधि: रूढ़ गुणनखंडों की सहायता से

नियम: दी हुई संख्याओं के रूढ़ गुणनखंड (Prime Factor) निकाल लेते हैं। फिर उन गुणनखंडों का गुणनफल ज्ञात करते हैं जो संख्याओं में सम्मिलित हैं। यह उभयनिष्ठ गुणनखंडों का गुणनफल ही संख्याओं का महत्तम समापवर्तक होता है।

उदा. 1: 42 एवं 70 का महत्तम समापवर्तक निकालें।

हल: $42 = \underline{2} \times 3 \times 7$

$70 = \underline{2} \times 5 \times 7$

$\therefore$ म.स. $= 2 \times 7 = 14$

उदा. 2: 1365, 1560 एवं 1755 का महत्तम समापवर्तक निकालें।

हल: $1365 = \underline{3} \times \underline{5} \times 7 \times \underline{13}$

$1560 = 2 \times 2 \times 2 \times \underline{3} \times \underline{5} \times \underline{13}$

$1755 = 3 \times 3 \times \underline{3} \times \underline{5} \times \underline{13}$

$\therefore$ म.स. $= 3 \times 5 \times 13 = 195$

नोट: 1. महत्तम समापवर्तक निकालने के लिए यह जरूरी नहीं है कि प्रदत्त सभी संख्याओं को उनके रूढ़ गुणनखंडों में तोड़ा जाए। किसी एक संख्या के रूढ़ गुणनखंडों को निकाल लीजिए। फिर इनमें से उन रूढ़ गुणनखंडों का गुणनफल, जो कि शेष संख्याओं को पूरी तरह विभाजित करता है, ही अभीष्ट महत्तम समापवर्तक होता है।

उदा. 1 में 42 के 3 रूढ़ गुणनखंड हैं: $2 \times 3 \times 7$। इनमें से 2 एवं 7, 70 को पूरी तरह विभाजित कर देते हैं। इसलिए अभीष्ट महत्तम समापवर्तक है: $2 \times 7 = 14$

yousmahboob

उदा.-2 में 1365 के रूढ़ गुणनखंड हैं $3 \times 5 \times 7 \times 13$, इनमें से केवल तीन गुणनखंड 3, 5 एवं 13 ही शेष दोनों संख्याओं 1560 एवं 1755 को पूरी तरह विभाजित करते हैं इसलिए अभीष्ट म.स. (HCF) $= 3 \times 5 \times 13 = 195$

2. स्मरणीय है कि यदि संख्याओं को उनके म. स. से भाग दिया जाए तो परस्पर अभाज्य (prime) संख्याएँ प्राप्त होती हैं।

उदा. 1 में $42 \div 14 = 3$ एवं $70 \div 14 = 5$

3 एवं 5 आपस में रूढ़ हैं, क्योंकि 3 से 5 पूरी तरह विभाज्य नहीं है।

इसी तरह, उदा. 2 में $1365 \div 195 = 7$, $1560 \div 195 = 8$ एवं $1755 \div 195 = 9$। 7, 8, 9 आपस में रूढ़ हैं क्योंकि वे एक दूसरे को विभाजित नहीं कर पाते।

उपर्युक्त से स्पष्ट है कि उदा. 1 के संख्याओं को निम्नलिखित रूप में लिखा जा सकता है।

$42 = 14 \times 3$ एवं $70 = 14 \times 5$

इस प्रकार यदि संख्याएँ x, y हों और उनका म. स. m हो तो उन संख्याओं को निम्नलिखित रूप में लिखा जा सकता है।

$x = ma, y = mb$; जहाँ कि a, b परस्पर अभाज्य संख्याएँ हैं।

3. यदि संख्याओं का म. स. 1 हो तो वे संख्याएँ परस्पर अभाज्य होंगी।

4. वह संख्या जो दी हुई दो संख्याओं का समापवर्तक है उन संख्याओं के योग तथा अंतर अथवा उनके किसी अपवर्त्य (multiple) के योग तथा अंतर का भी अपवर्तक (factor) होती है।

व्याख्या: यदि m, x तथा y का समापवर्तक है तो $x = ma$ तथा $y = mb$, अतः $x - y = m(a - b)$ तथा $x + y = m(a + b)$ अथवा $px + qy = m(pa + qb)$ तथा $px - py = m(pa - qb)$। स्पष्ट है कि m, $x - y$, $x + y$, $px + qy$ तथा $px - qy$ का अपवर्तक है।

उदाहरण के लिए, 9 एवं 15 का समापवर्तक 3 है। अतः 3, $(9 + 15)$ तथा $(15 - 9)$ का अथवा $(9 \times 3 + 15 \times 4)$ तथा $(15 \times 4 - 9 \times 3)$ का अपवर्तक है।

5. उपर्युक्त से हम अनुमान लगा सकते हैं कि संख्याओं का म. स. वही होगा जो उनके अंतर का म. स. होगा।

व्याख्या:

यदि x, y, z का म. स. m है तो $x = ma$, $y = mb$, $z = mc$ जहाँ कि a, b, c उपर्युक्त संख्याएँ हैं। अतः $x - y = m(a - b)$, $y - z = m(b - c)$, $z - x = m(c - a)$, अब यदि $(a - b)$, $(b - c)$ एवं $(c - a)$ परस्पर अभाज्य हों तो $(x - y)$, $(y - z)$, $(z - x)$ का म. स. भी m होगा।

परन्तु यदि $(a - b)$, $(b - c)$, $(c - a)$ परस्पर अभाज्य नहीं हैं तो $(x - y)$, $(y - z)$, $(z - x)$ का म. स. m', x, y, z के म. स. m का अपवर्त्य (multiple) होगा; अर्थात् $m' = pm$। इस दशा में p का मान ज्ञात करके m का मान प्राप्त किया जा सकता है। हालाँकि ऐसी स्थिति, अधिकांश प्रश्नों में नहीं आएगी।

उदाहरण के लिए,

96, 120 एवं 180 का म. स. 12 है। संख्याओं का अंतर 24, 60 एवं 84 है। इनका म. स. भी 12 है, क्योंकि $24 = 12 \times 2$, $60 = 12 \times 5$, $84 = 12 \times 7$ में 2, 5, 7 परस्पर अभाज्य हैं.

yourmathbooo

किन्तु यदि हम 15, 25 एवं 35 का म. स. लें तो वह 5 होगा। संख्याओं का अंतर 10, 10 एवं 20 है। इनका म. स. 10 होगा जो दी हुई संख्याओं के म. स. 5 के बराबर नहीं है, अपितु उसका दुना है $(10 = 2 \times 5)$, क्योंकि $10 = 5 \times 2$, $10 = 5 \times 2$, $20 = 5 \times 4$ में 2, 2, 4 परस्पर अभाज्य नहीं हैं। इस दशा में, यदि 10 के गुणनखण्ड 2 एवं 5 का देखें तो 2 संख्याओं को विभाजित नहीं करता, किन्तु 5 पूर्णतया विभाजित करता है। अतः संख्याओं का म. स. 5 है।

दूसरी विधि: भाग विधि

नियम: बड़ी संख्या में छोटी संख्या से भाग दीजिए, फिर भाजक में शेष से भाग दीजिए, पुनः शेष से पिछले शेष में भाग दीजिए और ऐसा तब तक जारी रखिए, जब तक कि कोई भी शेष न बचे। अंतिम भाजक ही अभीष्ट महत्तम समापवर्तक (म. स. या HCF) होगा।

उदा. 1:

```
42)70(1
   42
   28)42(1
      28
      14)28(2
         28
          0
```

नोट: म.स. निकालने का उपर्युक्त नियम निम्नलिखित दो सिद्धांतों पर आधारित है:

i) किसी संख्या को विभाजित करने वाली संख्या उस संख्या के अपवर्त्य को भी विभाजित करती है। उदाहरण के लिए 6, 18 को विभाजित करता है, इसलिए 6, 18 के किसी भी अपवर्त्य को विभाजित करेगा।

ii) कोई संख्या यदि दी हुई दो संख्याओं को विभाजित करती है तो वह उन संख्याओं के योगफल एवं अंतर के साथ-साथ उनके योगफल एवं अंतर के अपवर्त्यों (multiple) को भी विभाजित करेगी।

इस प्रकार 25 एवं 15 का समापवर्तक 5, $(25 + 15)$ एवं $(25 - 15)$ का भी समापवर्तक है।

इसी तरह 5, $(25 \times a + 15 \times b)$ एवं $(25 \times a - 15 \times b)$ का भी समापवर्तक है। (यहाँ a एवं b पूर्णांक हैं।)

इन सिद्धांतों के आधार पर,

42 एवं 70 का म.स. = 28 एवं 42 का म.स. [$\because$ $28 = 70 - 42$]

= 14 एवं 28 का म.स. [$14 = 42 - 28$]

= 14 एवं 14 का म.स. [$14 = 28 - 14$]

$\therefore$ 42 एवं 28 का म.स. = 14

13281 एवं 15844 का म.स. = 2563 एवं 13281 का म.स. [$2563 = 15844 - 13281$]

= 466 एवं 2563 का म.स. [$466 = 13281 - 5 \times 2563$]

= 233 एवं 466 का म.स. [$233 = 2563 - 5 \times 466$]

= 233 एवं 233 का म.स.

$\therefore$ 13281 एवं 15844 का म.स. = 233

youtsmahboob

उपर्युक्त विधि बड़ा दिलचस्प है। लेकिन इसका इस्तेमाल करने से पूर्व इसे अच्छी तरह समझ लेना आवश्यक है।

दो से अधिक संख्याओं का महत्तम समापवर्तक (H.C.F) निकालना

नियम: प्रदत्त संख्याओं में से किन्हीं दो का महत्तम समापवर्तक निकालें फिर इस म.स. के साथ अगली संख्या का महत्तम समापवर्तक निकालें और यह प्रक्रिया तब तक जारी रखें जब तक कि सभी संख्याएँ निबट न जाएँ। आखिरी महत्तम समापवर्तक ही अभीष्ट म.स. होगा।

उदा. 1: 1365, 1560 एवं 1755 का महत्तम समापवर्तक निकालें।

हल:

```
1365)1560(1
     1365
      195)1365(7
          1365
             0
```

∴ 1365 एवं 1560 का म.स. = 195

```
पुनः 195)1755(9
         1755
            0
```

∴ अभीष्ट म.स. = 195

तीसरी विधि:

महत्तम समापवर्तक निकालने की प्रक्रिया को निम्नलिखित विधि से सरल किया जा सकता है:

i) नियम का प्रयोग करने से पूर्व दोनों संख्याओं में उभयनिष्ठ गुणनखंडों को हटाया जा सकता है; पर इस तरह से प्राप्त म.स. में उभयनिष्ठ गुणनखंड (जिसे हटाया गया था) से गुणा करना न भूलें।

ii) यदि प्रदत्त संख्याओं में से किसी में भी ऐसा एक गुणनखंड है, जो दूसरे में मौजूद नहीं है तो उसे नजरंदाज किया जा सकता है.

iii) हल करने के दौरान, किसी चरण में भी यदि आप पाते हैं कि भाजक में कोई ऐसा गुणनखंड है, जो भाज्य में नहीं है, तो इसे नजरंदाज कर सकते हैं। क्योंकि कोई भी ऐसा गुणनखंड, जो केवल एक (भाजक/भाज्य) में मौजूद हो, किसी भी तरह म.स. को उभयनिष्ठ नहीं करता.

उदा. 42237 एवं 75582 का म.स. निकालें।

हल: $42237 = 9 \times 4693$

$75582 = 2 \times 9 \times 4199$

नियम (ii) के आधार पर 2 को नजरंदाज किया जा सकता है क्योंकि यह उभयनिष्ठ गुणनखंड नहीं है। पर '9' एक उभयनिष्ठ गुणनखंड है इसलिए इसे सुरक्षित रखकर (नियम (i) से) 4199 एवं 4693 का म.स. निकालते हैं।

```
4199)4693(1
     4199
      494
```

494, 7 से विभाज्य है पर 4199, 7 से विभाज्य नहीं है इसलिए हम 494 को 7 से विभाजित

yoursmahboob

करते हैं एवं 247 तथा 4199 लेकर आगे बढ़ते हैं। नियम (iii) से।

```
247)4199(17
    247
    1729
    1729
      0
```

∴ 4199 एवं 247 का म.स. = 247

प्रदत्त संख्याओं का म.स. = 247 × 9 = 2223

नोट: यदि दो संख्याओं का महत्तम समापवर्तक 1 हो तो वे दोनों संख्याएँ आपस में अ.भ (अभिन्नाज्य) होंगी।

छोटी संख्याओं का म.स. (HCF of smaller numbers)

यदि संख्याएँ बहुत बड़ी नहीं हों तो अति शीघ्रता पूर्वक म.स. (HCF) निकालने के लिए हम निम्नलिखित चरणों का अनुसरण कर सकते हैं।

उदाहरण के लिए,

(i) 8, 20, 28 एवं 44 का म.स. ज्ञात करें।

हल : चरण I: जैसा कि हम जानते हैं कि म.स. सभी संख्याओं का सबसे बड़ा गुणनखंड (highest factor) होता है, यह सबसे छोटी संख्या से बड़ा नहीं हो सकता है। अतः, सबसे छोटी संख्या 8 लेते हैं।

चरण II: अन्य संख्याओं में 8 से भाग दिया जाता है। चूँकि यह 20 को पूर्णतया विभाजित नहीं करता है, अतः 8 हमारा म.स. नहीं हो सकता है।

चरण III: 8 का दूसरा सबसे बड़ा गुणनखंड अर्थात् (8 ÷ 2 =) 4 लेते हैं। अन्य संख्याओं की 4 द्वारा विभाज्यता की जाँच करते हैं। चूँकि यह अन्य सभी संख्याओं को विभाजित करता है, हमारा म.स. 4 है।

(ii) 21, 15 एवं 36 का म.स. ज्ञात करें।

हल : चरण I: सबसे छोटी संख्या 15 लेते हैं। चूँकि यह अन्य संख्याओं को विभाजित नहीं करता है, अतः यह हमारा म.स. नहीं हो सकता है।

चरण II: 15 का दूसरा सबसे बड़ा गुणनखंड अर्थात् (15 ÷ 3 =) 5 लेते हैं। चूँकि यह अन्य संख्याओं को विभाजित नहीं करता है, अतः यह भी हमारा म.स. नहीं हो सकता है।

चरण III: अगला सबसे बड़ा गुणनखंड अर्थात् (15 ÷ 5 =) 3 लेते हैं, चूँकि यह अन्य संख्याओं को भी विभाजित करता है, अतः हमारा म.स. 3 है।

(iii) 72, 126 एवं 198 का म.स. ज्ञात करें।

हल : चरण I: सबसे छोटी संख्या अर्थात् 72 लेते हैं, चूँकि यह अन्य किसी संख्या को विभाजित नहीं करता है, यह हमारा म.स. नहीं है।

yoursmahboob

चरण II: 72 का दूसरा सबसे बड़ा गुणनखंड अर्थात् (72 ÷ 2 =) 36 लेते हैं। इसे अस्वीकृत किया जाता है, क्योंकि यह अन्य संख्याओं को विभाजित नहीं करता है।

चरण III: अगला गुणनखंड अर्थात् (72 ÷ 3 =) 24 लेते हैं। इसे भी अस्वीकृत कर दिया जाता है, क्योंकि यह 126 को विभाजित नहीं करता है।

चरण IV: अगला गुणनखंड अर्थात् (72 ÷ 4 =) 18 लेते हैं। चूँकि यह अन्य सभी संख्याओं को विभाजित करता है, हमारा म.स. 18 है।

(iv) 24, 60, 84 एवं 108 का म.स. ज्ञात करें।

हल: सबसे छोटी संख्या 24 को HCF के रूप में अस्वीकृत किया जाता है। 24 का अगला सबसे बड़ा गुणनखंड अर्थात् (24 ÷ 2 =) 12 अभीष्ट म.स. है क्योंकि यह अन्य सभी संख्याओं को विभाजित करता है।

दो या अधिक परिमाणों का म.स. निकालना

सर्वप्रथम उन्हें एक इकाई में बदल लें।

उदा. वह अधिकतम वजन बताएँ जो 1 कि.ग्रा. 235 ग्राम एवं 3 कि.ग्रा. 430 ग्राम में उपस्थित हो।

हल: 1 कि.ग्रा. 235 ग्रा. = 1235 ग्राम

3 कि.ग्रा. 430 ग्रा. = 3030 ग्राम

अधिकतम उपस्थित वजन = 1235 एवं 3430 का महत्तम समापवर्तक = 5 ग्राम

दशमलव युक्त संख्याओं का म.स.

नियम: सर्वप्रथम (यदि जरूरी हो तो) प्रदत्त संख्याओं में दशमलव के बाद अंकों की संख्या बराबर बना लें; फिर दशमलव को नजरंदाज करके इन संख्याओं को ऐसे इस्तेमाल करें, जैसे कि ये पूर्णांक हों। फिर इनका म.स. निकालें। प्राप्त म.स. में यथास्थान (जैसा कि प्रदत्त संख्या में था) दशमलव लगा दें।

उदा. 1: 16.5, 0.45 एवं 15 का म.स. निकालें.

हल: प्रदत्त संख्याएँ 16.50, 0.45 एवं 15.00 के समतुल्य हैं।

पहला चरण: 1650, 45 एवं 1500 का म.स. निकालें।

इनका म.स. = 15

दूसरा चरण: अभीष्ट म.स. = 0.15

उदा. 2: 1.7, 0.51 एवं 0.153 का म.स. निकालें।

हल: प्रदत्त संख्याएँ 1.700, 0.510 एवं 0.153 के समतुल्य हैं।

पहला चरण: 1700, 510 एवं 153 का म० स० निकालें।

इनका म.स. = 17

∴ **दूसरा चरण:** अभीष्ट म.स. = 0.017

दो भिन्नों का म.स. (HCF)

परिभाषा: दो या उससे अधिक भिन्नों का महत्तम समापवर्तक वह उच्चतम भिन्न है, जो दिए गए समस्त भिन्नों से पूर्णतया विभाज्य हो।

yoursmahboob

नियम: सर्वप्रथम दिए गए भिन्नों को उनके न्यूनतम रूप में व्यक्त करें।

$$\text{फिर म.स.} = \frac{\text{अंशों का महत्तम समापवर्तक}}{\text{हरों का लघुत्तम समापवर्त्य}}$$

नोट: भिन्नों (Fraction) का म.स. हमेशा एक भिन्न ही होता है, पर लघुत्तम समापवर्त्य के संदर्भ में यह पूर्णतया लागू नहीं होता।

उदा. 1: $\frac{54}{9}, 3\frac{9}{17}$ एवं $\frac{36}{51}$ का महत्तम समापवर्तक निकालें।

हल: यहाँ $\frac{54}{9} = \frac{6}{1}, 3\frac{9}{17} = \frac{60}{17}$ एवं $\frac{36}{51} = \frac{12}{17}$

$\therefore$ प्रदत्त भिन्न अपने न्यूनतम रूप में $\frac{6}{1}, \frac{60}{17}$ एवं $\frac{12}{17}$ हैं।

$$\therefore \text{म.स.} = \frac{\text{6, 60 एवं 12 का म.स.}}{\text{1, 17 एवं 17 का ल.स.}} = \frac{6}{17}$$

नोट: दृष्टव्य है कि प्रदत्त सभी संख्याएँ $\frac{6}{17}$ से पूर्णतया विभाज्य हैं।

उदा. 2: वह महत्तम लंबाई क्या है जो $3\frac{1}{2}$ मी. एवं $8\frac{3}{4}$ मी. में समान बार मौजूद हो।

हल: $3\frac{1}{2} = \frac{7}{2}$ एवं $8\frac{3}{4} = \frac{35}{4}$

$\therefore$ अभीष्ट अधिकतम लंबाई $= \frac{7}{2}$ एवं $\frac{35}{4}$ का म.स.

$$= \frac{\text{7 एवं 35 का म.स.}}{\text{2 एवं 4 का ल.स.}} = \frac{7}{4} = 1\frac{3}{4} \text{ मीटर}$$

महत्तम समापवर्तक से संबद्ध विविध उदाहरण

उदा. 1: वह सबसे बड़ी संख्या कौन-सी है जिससे 2400 एवं 1810 से भाग देने पर शेष क्रमशः 6 एवं 4 बचते हों?

हल: चूँकि भाग देने पर 6 एवं 4 शेष बचते हैं, इसलिए (2400 − 6) एवं (1810 − 4) उस संख्या से पूरी तरह विभाज्य होने चाहिए।

$\therefore$ अभीष्ट महत्तम संख्या = 2394 एवं 1806 का म.स. = 42

उदा. 2: वह सबसे बड़ी संख्या कौन-सी है जिससे 38, 45 एवं 52 से भाग देने पर शेष क्रमशः 2, 3 एवं 4 बचते हों?

हल: अभीष्ट अधिकतम संख्या = (38 − 2), (45 − 3) एवं (52 − 4) का महत्तम समापवर्तक = 36, 42 एवं 48 का म. स. = 6.

yousmahboob

उदा. 3: वह महत्तम संख्या कौन-सी है जिससे 470, 751 एवं 1030 में भाग देने पर शेष हर स्थिति में 7 बचता हो?

हल: अभीष्ट अधिकतम संख्या = (470 − 7), (751 − 7) एवं (1030 − 7) का म.स. = 31

उदा. 4: उस संख्या का अधिकतम मान बताएँ, जिससे 76, 151 एवं 226 में भाग देने पर शेष समान आते हों। वह समशिष्ट शेष भी बताएँ।

हल: मान लें कि समशिष्ट शेष = k है।

तब प्रश्नानुसार, (76 − k), (151 − k) एवं (226 − k) अभीष्ट संख्या से पूर्णतया विभाज्य होंगे। हमें पता है कि यदि दो संख्याएँ किसी खास संख्या से विभाज्य हों तो उन दो संख्याओं का अंतर भी उस खास संख्या से विभाज्य होगा। इसलिए {(151 − k) − (76 − k)}, {(226 − k) − (151 − k)} एवं {(226 − k) − (76 − k)} अर्थात 75, 75 एवं 150 अभीष्ट संख्या से विभाज्य होंगी।

∴ अभीष्ट संख्या = 75, 75 एवं 150 का म.स. = 75

एवं शेष = 76 ÷ 75 = 1

उदा. 5: जब 11284 एवं 7655 को तीन अंकों की किसी संख्या से विभाजित करते हैं, तो समान शेष प्राप्त होता है। तीन अंकों वाली वह संख्या बताएँ।

हल: अभीष्ट संख्या निश्चित रूप से (11284 − 7655) या 3629 का एक गुणनखंड होना चाहिए। 3629 = 19 × 191

∴ 191 ही अभीष्ट संख्या है।

उदा. 6: दो संख्याओं का गुणनफल 7168 है एवं उनका लघुतम समापवर्तक 16 है तो संख्याएँ क्या हैं?

हल: अभीष्ट संख्याएँ निश्चित रूप से लघुतम समापवर्तक का अवयव होना चाहिए। मान लिया कि संख्याएँ 16a एवं 16b हैं, जहाँ a एवं b आपस में रूढ़ दो संख्याएँ हैं।

∴ 16a × 16b = 7168 या ab = 28

वे जोड़े, जिनका गुणनफल 28 होता है: (28, 1); (14, 2); एवं (7, 4)

14 एवं 2 आपस में रूढ़ नहीं हैं, इसलिए इन्हें छोड़ देंगे। इसलिए अभीष्ट संख्याएँ हैं: (28 × 16, 1 × 16); (7 × 16, 4 × 16) ⇒ (448, 16) एवं (112, 64)

उदा. 7: वह सबसे बड़ी संख्या ज्ञात करें जिससे 276 और 716 में भाग देने के पश्चात् हरेक स्थिति में समान शेष बचे।

हल: दो संख्याओं के उनके अंतर से भाग देने पर हरेक स्थिति में समान शेष बचता है। परंतु यदि उन दो संख्याओं का अंतर किसी एक संख्या से छोटा हो तो, अंतर के लगभग बड़े भाजक के लेते हैं जो दोनों संख्याओं से छोटा हो।

716 − 276 = 440 (जो 276 से बड़ा है।)

अतः अभीष्ट संख्या 440 का सबसे बड़ा भाजक जो 276 से छोटा हो, होगा।

∴ अभीष्ट संख्या = 220

2. लघुत्तम समापवर्त्य

समापवर्त्य (Common Multiple): दो या उससे अधिक संख्याओं का समापवर्त्य वह

yoursmahboob

संख्या है, जो उन सभी संख्याओं से पूर्णतया विभाज्य हो। उदाहरण के लिए 30, 2,3,5,6,10 तथा 15 का समापवर्त्य है

लघुतम समापवर्त्य (LCM या Least Common Multiple): दो या उससे अधिक संख्याओं का लघुतम समापवर्त्य वह न्यूनतम संख्या है, जो उन सभी संख्याओं से पूर्णतया विभाज्य हो

इस प्रकार 15 समापवर्त्य है 3 एवं 5 का।

30 समापवर्त्य है 3 एवं 5 का।

45 एक समापवर्त्य है 3 एवं 5 का।

पर 3 एवं 5 का लघुतम समापवर्त्य है 15।

दो या उससे अधिक संख्याओं का लघुतम समापवर्त्य निकालना

पहली विधि: रूढ़ गुणनखंड विधि

नियम: प्रदत्त संख्याओं को उनके रूढ़ गुणनखंडों में विभाजित कर लें। इसके बाद इन गुणनखंडों से सर्वनिष्ठ रूप से मौजूद रूढ़ संख्याओं के महत्तम घात का गुणनफल निकाल लें। यही गुणनफल लघुतम समापवर्त्य (LCM ल.म.) है।

उदा. 1: 8, 12, 15 एवं 21 का ल.स. निकालें।

हल: $8 = 2 \times 2 \times 2 = 2^3$

$12 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 = 2^2 \times 3$

$15 = 3 \times 5$

$21 = 3 \times 7$

यहाँ संख्याओं में मौजूद रूढ़ गुणनखंड 2, 3, 5 एवं 7 हैं और इनका महत्तम घातांक क्रमशः 2^3, 3, 5 एवं 7 हैं।

$\therefore$ अभीष्ट ल.स. $= 2^3 \times 3 \times 5 \times 7 = 840$

उदा. 2: 18, 24, 60 एवं 150 का ल.स. निकालें

हल: $18 = 2 \times 3 \times 3 = 2 \times 3^2$

$24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 = 2^3 \times 3$

$60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5 = 2^2 \times 3 \times 5$

$150 = 2 \times 3 \times 5 \times 5 = 2 \times 3 \times 5^2$

यहाँ संख्याओं में मौजूद रूढ़ गुणनखंड 2, 3, 5 हैं, जिनके महत्तम घातांक क्रमशः 2^3, 3^2 एवं 5^2 हैं।

$\therefore$ अभीष्ट ल.स. $= 2^3 \times 3^2 \times 5^2 = 1800$

नोट: दो संख्याओं, जो परस्पर रूढ़ (Prime) हैं, का ल. स. उन संख्याओं के गुणनफल के बराबर होता है।

इस प्रकार 15 एवं 17 का ल. स. $= 15 \times 17 = 255$

youtube/habib

दूसरी विधि: बहुत सारी छोटी-छोटी संख्याओं का ल. स. निम्नलिखित विधि से प्राप्त किया जा सकता है :

प्रदत्त संख्याओं को कॉमा (,) के सहारे पृथक् करके एक पंक्ति में सजा दें। किसी भी ऐसी रूढ़ संख्या (2, 3, 5, 7 आदि) से इन्हें विभाजित करें, जिससे इनमें से कम-से कम दो संख्याओं में भाग लग जाए। पहली पंक्ति के नीचे अविभाजित संख्या एवं विभाजित संख्याओं का भागफल लिख दें. यह प्रक्रिया तब तक दुहराते चलें, जब तक आपस में रूढ़ संख्याओं की पंक्ति न आ प्रकट हो। समस्त भाजकों एवं अंतिम पंक्ति में मौजूद संख्याओं का गुणनफल ही अभीष्ट ल.स. है।

नोट: गणना में आसानी के ख्याल से किसी भी चरण में उन संख्याओं को छोड़ा जा सकता है, जो एक ही पंक्ति में मौजूद हों एवं एक दूसरे के गुणनखंड हों।

उदा. 1: 12, 15, 90, 108, 135 एवं 150 का लघुतम समापवर्त्य निकालें।

हल:

2	12, 15, 90, 108, 135, 150	...(1)
3	6, 54, 135, 75	...(2)
3	18, 45, 25	...(3)
5	6, 15, 25	...(4)
	6, 1, 5	...(5)

∴ अभीष्ट ल.स. $= 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 6 \times 5 = 2700$

पहली पंक्ति में 12 एवं 15 को छोड़ दिया गया है क्योंकि ये क्रमशः 108 एवं 90 के गुणनखंड हैं।

दूसरी पंक्ति में 45 को छोड़ दिया गया है क्योंकि यह 135 का एक गुणनखंड है

पाँचवीं पंक्ति में 1 को छोड़ दिया गया है क्योंकि यह 6 का एक गुणनखंड है।

नोट: 1. दो संख्याओं का गुणनफल उनके महत्तम समापवर्तक एवं लघुतम समापवर्त्य के गुणनफल के बराबर होता है।

उदाहरण के लिए, 12 एवं 15 के ल.स. एवं म.स. क्रमशः 60 एवं 3 हैं।

$12 \times 15 = 180$

ल.स. × म.स. $= 60 \times 3 = 180$

इस प्रकार, संख्याओं का गुणनफल = ल.स. × म.स.

2. दो संख्याओं का ल.स. प्राप्त करने के लिए, किसी एक संख्या में म.स. से भाग दें एवं भागफल में दूसरी संख्या से गुणा कर दें।

दशमलव वाले अंकों का ल.स.

नियम: सर्वप्रथम दशमलव के बाद अंकों की संख्या समान बना लें। फिर इन संख्याओं में से दशमलव हटा कर उन्हें पूर्णांक की तरह इस्तेमाल करें तथा उनका ल.स. निकाल लें, फिर ल.स. में यथास्थान दशमलव डाल दें।

yoursmahboob

उदा.: 0.6, 9.6 एवं 0.36 का ल.स. निकालें।

हल: प्रदत्त संख्याएँ 60, 960 एवं 36 के समतुल्य हैं।

60, 960 एवं 36 का ल.स. = 2880

∴ अभीष्ट ल.स. = 28.80

भिन्नों का ल.स.

दो या उससे अधिक भिन्नों का ल.स. वह न्यूनतम भिन्न या पूर्णांक है, जो प्रदत्त सभी भिन्नों से विभाज्य हो।

नियम: सर्वप्रथम प्रदत्त भिन्नों को उनके लघुत्तम रूप में लिखें।

$$\text{भिन्न, ल.स.} = \frac{\text{अंशों का ल.स.}}{\text{हरों का म.स.}}$$

उदा. 1: निम्नलिखित का ल.स. निकालें।

a) $\frac{1}{2}, \frac{5}{8}$ b) $\frac{108}{375}, 1\frac{17}{25}, \frac{54}{55}$ c) $4\frac{1}{2}, 3, 10\frac{1}{2}$

हल: a) $\text{अभीष्ट ल.स.} = \frac{\text{1 एवं 5 का ल.स.}}{\text{2 एवं 8 का म.स.}} = \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$

b) $\frac{108}{375} = \frac{36}{125}; 1\frac{17}{25} = \frac{42}{25}$

इस प्रकार प्रदत्त भिन्न $\frac{36}{125}, \frac{42}{25}$ एवं $\frac{54}{55}$ हैं।

$$\text{अभीष्ट ल.स.} = \frac{\text{36, 42 एवं 54 का ल.स.}}{\text{125, 25 एवं 55 का म.स.}} = \frac{756}{5} = 151\frac{1}{5}$$

c) $4\frac{1}{2} = \frac{9}{2}, 10\frac{1}{2} = \frac{21}{2}$

इस प्रकार प्रदत्त भिन्न हैं: $\frac{9}{2}, \frac{3}{1}$ एवं $\frac{21}{2}$

$$\text{अभीष्ट ल.स.} = \frac{\text{9, 3 एवं 21 का ल.स.}}{\text{2, 1 एवं 2 का म.स.}} = \frac{63}{1} = 63$$

नोट: उपर्युक्त उदाहरण 1(c) में हमने देखा कि ल.स. एक पूर्णांक है। इससे हम इस नतीजे पर पहुँचते हैं कि भिन्नों का ल.स. भिन्न भी हो सकता है एवं पूर्णांक भी।

उदा. 2: एक अक्ष पर तीन चक्के लगे हैं। पहला, दूसरा तथा तीसरा चक्का एक मिनट में 36, 48 तथा 54 चक्कर लगाते हैं। तीनों चक्कों पर शुरूआत में काला निशान लगा है। कितने समय के पश्चात् तीनों चक्कों के काले दाग पुनः एक साथ हो जाएँगे?

हल: पहला, दूसरा तथा तीसरा चक्का को एक चक्कर पूरा करने में क्रमशः $\frac{60}{36}$ से, $\frac{60}{48}$ से,

yoursmahboob

तथा $\frac{60}{54}$ से लगता है:

$\therefore$ अभीष्ट समय $= \left(\frac{60}{36}, \frac{60}{48}$ तथा $\frac{60}{54}$ का लघुतम समापवर्त्य$\right)$

$= \frac{60}{6} = 10$ सेकेंड

ल.स. से संबद्ध विविध उदाहरण

उदा. 1: दो संख्याओं का ल.स. 2079 है एवं म.स. 27। यदि एक संख्या 189 है तो दूसरी संख्या बताएँ।

हल: अभीष्ट संख्या $= \frac{\text{ल.म.} \times \text{म.स.}}{\text{पहली संख्या}} = \frac{2079 \times 27}{189} = 297$

उदा. 2: वह न्यूनतम संख्या कौन-सी है जिसमें 18, 24, 30 एवं 42 से भाग देने पर हर स्थिति में शेष 1 ही बचता हो?

हल: निश्चय ही अभीष्ट संख्या प्रदत्त संख्याओं के ल.म. से एक बड़ी होगी।

अब, $18 = 2 \times 3^2$

$24 = 2^3 \times 3$

$30 = 2 \times 3 \times 5$

$42 = 2 \times 3 \times 7$

$\therefore$ ल.स. $= 3^2 \times 2^3 \times 5 \times 7 = 2520$

$\therefore$ अभीष्ट संख्या $= 2520 + 1 = 2521$

उदा. 3: वह सबसे छोटी संख्या बताएँ जिसमें 52, 78 एवं 117 से भाग देने पर क्रमशः 33, 59 एवं 98 शेष बचता हो।

हल: चूँकि $52 - 33 = 19$, $78 - 59 = 19$, $117 - 98 = 19$

$\therefore$ प्रत्येक स्थिति में शेष भाजक से 19 कम है इसलिए यदि हम अभीष्ट संख्या में 19 जोड़ दें तो वह राशि 52, 78 एवं 117 से पूर्णतया विभाज्य होगी।

इसलिए अभीष्ट संख्या 52, 78 एवं 117 के ल. स. से 19 कम होगी

52, 78 एवं 117 का ल. स. $= 468$

$\therefore$ अभीष्ट संख्या $= 468 - 19 = 449$

उदा. 4: 6 अंकों की वह सबसे बड़ी संख्या बताएँ जिसमें 6, 7, 8, 9 एवं 10 से भाग देने पर शेष क्रमशः 4, 5, 6, 7 एवं 8 बचता हो।

हल: 6, 7, 8, 9 एवं 10 का ल. स. $= 2520$

6 अंकों की सबसे बड़ी संख्या $= 999999$

999999 को 2520 से भाग देने पर शेष बचता है 2079

yoursmahboob

इसलिए 6 अंकों की संख्या जो कि 2520 से विभाज्य है = 999999 − 2079 = 997920

चूँकि 6 − 4 = 2, 7 − 5 = 2, 8 − 6 = 2, 9 − 7 = 2 एवं 10 − 8 = 2

∴ प्रत्येक स्थिति में शेष भाजक से 2 कम है।

∴ अभीष्ट संख्या = 997920 − 2 = 997918

उदा. 5: 900 से कम वह सबसे बड़ी संख्या बताएँ जो 8, 12, एवं 28 से विभाज्य हो।

हल : सबसे छोटी संख्या जो 8, 12 एवं 28 से विभाज्य है = 8, 12 एवं 28 का ल. स. = 168

स्पष्टतः 168 का अभ्यर्थ भी 8, 12 एवं 28 से पूर्णतया विभाजित होगा।

चूँकि अभीष्ट संख्या 900 से ज्यादा नहीं हो सकती है, इसलिए संख्या है : 168 × 5 = 840

उदा. 6: वह सबसे छोटी संख्या बताएँ जिसमें 2, 3, 4, 5 एवं 6 से भाग देने पर प्रत्येक दशा में शेष 1 बचता हो, परन्तु उस संख्या में 7 से भाग देने पर शेष कुछ भी नहीं बचता हो।

हल : 2, 3, 4, 5 एवं 6 का ल. स. = 60

∴ अभीष्ट संख्या अवश्य ही 60k + 1 होनी चाहिए ; जहाँ k एक धनात्मक पूर्णांक है।

⇒ 60k + 1 = (7 × 8 + 4)k + 1 = (7 × 8k) + (4k + 1)

प्रश्नानुसार, इस संख्या को 7 से विभाज्य होना है। k के किसी भी मान के लिए संख्या का (7 × 8k) भाग हमेशा 7 से विभाज्य होगा। यहाँ पर (4k + 1) को 7 से विभाज्य होने के लिए k का सबसे छोटा मान ज्ञात होगा। अब हमलोग k = 1, 2, 3, 4 ---- का मान (4k + 1) में रखकर 7 से विभाज्यता की जाँच करते हैं। जहाँ पर k का मान 5 है।

∴ अभीष्ट संख्या = 60k + 1 = 60 × 5 + 1 = 301

नोट : उपर्युक्त उदाहरण को दूसरे शब्दों में निम्न प्रकार से लिखा जा सकता है।

" एक व्यक्ति के पास बच्चों में वितरित करने हेतु कुछ खिलौने हैं। सर्वप्रथम वह प्रत्येक बच्चे को 2 खिलौने देता है, फिर 3, फिर 4, फिर 5 एवं फिर 6, लेकिन प्रत्येक स्थिति में उसके पास 1 खिलौना बच जाता है। जब वह प्रत्येक बच्चे को 7 खिलौने देता है तो उसके पास कुछ भी नहीं बचता है। उस व्यक्ति के पास कम-से-कम कितना खिलौना हो सकता है?"

इसको निम्न प्रकार से भी लिखा जा सकता है।

"एक माली कुछ पौधे पंक्तियों में लगाना चाहता है। यदि वह 2 पौधे प्रत्येक पंक्ति में लगाए तो 1 पौधा बचा रहता है। इसी प्रकार 3, 4, 5, 6 पौधे प्रति पंक्ति में लगाने पर प्रत्येक दशा में 1 पौधा बचा रहता है। परन्तु 7 पौधे प्रति पंक्ति में लगाने से उसके पास एक भी पौधा नहीं बचता। बताओ उसके पास पौधों की छोटी-से-छोटी संख्या क्या होगी?"

उदा. 7: 1936 में कौन सी छोटी-से छोटी संख्या घटायी जाए कि शेष को 9, 10 एवं 15 से भाग देने पर प्रत्येक दशा में 7 शेष बचे?

हल : 9, 10 एवं 15 का ल. स. = 90

1936 को 90 से भाग देने पर 46 शेष बचता है। लेकिन 7 को शेष 46 का एक भाग है।

∴ अभीष्ट संख्या = 46 − 7 = 39

yousmahboob

उदा. 8: 10,000 में कौन-सी बड़ी-से-बड़ी संख्या घटाई जाए कि शेष 32, 36, 48 एवं 54 से पूर्णतया विभाज्य हो?

हल : 32, 36, 48 एवं 54 का ल. स. = 864

∴ अभीष्ट बड़ी-से-बड़ी संख्या = 10000 − 864 = 9136

उदा. 9: 7 का वह सबसे छोटा अपवर्त्य बताएँ जिसमें 2, 3, 4, 5 एवं 6 से भाग देने पर क्रमशः 1, 2, 3, 4, एवं 5 शेष बचता है।

हल : 2, 3, 4, 5 एवं 6 का ल. स. = 60

और दूसरी संख्याएँ जो कि 2, 3, 4, 5 एवं 6 से पूर्णतया विभाज्य हों = 60k ; k एक धनात्मक पूर्णांक है

चूँकि 2 − 1 = 1, 3 − 2 = 1, 4 − 3 = 1, 5 − 4 = 1 एवं 6 − 5 = 1 इसलिए प्रत्येक दशा में शेष भाजक से 1 कम है।

∴ अभीष्ट संख्या = 60k − 1 = (7 × 8k) + (4k − 1)

प्रश्नानुसार, इस संख्या को 7 से विभाज्य होना है। k के किसी भी मान के लिए (7 × 8k), 7 से विभाज्य है। यहाँ पर हमें k का वह मान चुनना है जो (4k − 1) को 7 से विभाज्य बनाता है। अब हम k = 1, 2, 3, ... का मान (4k − 1) में रखकर 7 से इसकी विभाज्यता की जाँच करते हैं। यहाँ पर k का मान 2 है।

∴ अभीष्ट संख्या = 60k − 1 = 60 × 2 − 1 = 119

प्रमेय: ***किसी दो संख्याओं का जोड़ तथा ल.स. का म.स., उन संख्याओं के म. स. के बराबर होता है।***

प्रमाण: माना कि दो संख्याएँ x तथा y हैं तथा उसका म.स. H है।

अतः $x = Ha$

तथा $y = Hb$

जहाँ a तथा b परस्पर अभाज्य संख्याएँ हैं।

x, y का ल.स. = Hab

और, $x + y = H(a + b)$

अगर 'a' तथा 'b' परस्पर अभाज्य संख्याएँ हैं तो $(a + b)$ तथा ab भी परस्पर अभाज्य होंगी। इससे यह निष्कर्ष निकलता है कि $H(a + b)$ तथा Hab का म.स. 'H' ही होगा जो x तथा y का भी म.स. है।

उदा. 10: दो संख्याओं का जोड़ 584 है तथा ल.स. 1095 है। दोनों संख्याओं का म.स. तथा दोनों संख्याएँ अलग अलग ज्ञात करें।

हल: $584 = 2 \times 2 \times 2 \times 73$

$1095 = 3 \times 5 \times 73$

yoursmahboob

अभीष्ट म.स. = 584 तथा 1095 का म.स. = 73

तथा, $584 = 73 \times 8$

$1095 = 73 \times 15$

अतः $ab = 15$ तथा $a + b = 8$

$\Rightarrow a = 3$ तथा $b = 5$

अभीष्ट संख्याएँ $= 73 \times 3 = 219$ तथा $73 \times 5 = 365$

प्रमेय: ***किसी समुच्चय में 'n' संख्याएँ हैं। किसी भी दो संख्या का म.स. 'H' तथा सभी 'n' संख्याओं का ल.स. 'L' है। सभी संख्याओं का गुणनफल $\left[(H)^{n-1} \times L\right]$ होगा।***

उदा. 11: चार संख्याओं में किसी भी दो संख्याओं का म.स. 7 है तथा सभी चार संख्याओं का ल.स. 2310 है। चारों संख्याओं का गुणनफल ज्ञात करें।

हल: उपरोक्त सूत्र से,

चारों संख्याओं का गुणनफल $= (7)^{4-1} \times 2310 = 343 \times 2310 = 792330$

अभ्यास प्रश्न

1. वह बड़ी-से-बड़ी संख्या ज्ञात करें जिससे 2930 एवं 3250 में भाग देने पर शेष क्रमशः 7 एवं 11 बचता हो।
2. 715 का अपवर्त्य प्राप्त करने के लिए 825 में कौन-सी छोटी-से-छोटी संख्या से गुणा करना पड़ेगा ?
3. किसी दो संख्याओं का ल.स. 2310 है एवं उनका म.स. 30 है। यदि एक संख्या 7×30 हो तो दूसरी संख्या ज्ञात करें ।
4. तीन घंटियाँ एक साथ बजना प्रारंभ करती हैं और वे क्रमशः 0.25, 0.1 और 0.125 सेकेंड के बाद बजती हैं। तो कितने समय के बाद वे तीनों फिर एक साथ बजेंगी?
5. वह न्यूनतम राशि, जो 2.50 रु., 20 रु., 1.20 रु. एवं 7.50 रु. में सम्मिलित हो, का मान ज्ञात करें।
6. वह बड़ी-से-बड़ी संख्या बताएँ जिससे 410, 751 एवं 1030 में भाग देने पर प्रत्येक दशा में 7 शेष बचता हो।
7. $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{6}$ एवं $\frac{7}{15}$ का म. स. एवं ल. स. निकालें।
8. तीन व्यक्ति एक 11 कि. मी. लंबी वृत्ताकार पथ पर एक साथ एक ही दिशा में चलना प्रारंभ करते हैं। उनकी गति क्रमशः 4, 5.5 एवं 8 कि. मी. प्रति घंटा है। वे तीनों एक साथ कितने समय बाद प्रारंभिक बिन्दु पर मिलेंगे?

yoursmahboob

9. वह छोटी से-छोटी पूर्ण संख्या का मान बताएँ जो $1\frac{1}{2}, 1\frac{1}{3}, 2\frac{1}{4}, 3\frac{1}{2}$ एवं $4\frac{1}{5}$ से पूर्णतया विभाज्य हो।

10. 48, 36, 72, एवं 24 का म.स. उन संख्याओं के ल.स. में कितनी बार सम्मिलित है?

11. वह छोटी-से-छोटी संख्या बताएँ जो 4, 5, 6, 15 एवं 18 से पूरी तरह विभाज्य हो।

12. वह छोटी-से छोटी संख्या ज्ञात कीजिए जिसमें 8, 12, एवं 16 से भाग देने पर प्रत्येक दशा में 3 शेष बचे किन्तु 7 से भाग देने पर कुछ भी शेष न बचे

13. वह बड़ी-से-बड़ी संख्या ज्ञात कीजिए जिससे 55, 127 एवं 175 में भाग देने पर प्रत्येक दशा में समान शेष बचे।

14. 11 का न्यूनतम अपवर्त्य ज्ञात कीजिए जिसमें 8, 12 एवं 16 से भाग देने पर 3 शेष बचे।

15. 3500 में कौन-सी न्यूनतम संख्या जोड़ी जाए ताकि वह संख्या 42, 49, 56 एवं 63 से पूर्णतया विभाज्य हो?

16. वह न्यूनतम संख्या ज्ञात कीजिए जिसमें 72, 80 एवं 88 से भाग देने पर क्रमशः 52, 60, एवं 68 शेष बचे।

17. चार अंकों की वह सबसे बड़ी संख्या ज्ञात कीजिए जिसमें 2, 3, 4, 5, 6 एवं 7 से भाग देने पर प्रत्येक दशा में 1 शेष बचे।

18. वह बड़ी से बड़ी संभव लम्बाई का मान ज्ञात कीजिए जिससे 7 मी., 3मी. 85 से. मी. एवं 12 मी. 95 से. मी. लम्बाइयों को पूर्णतया मापा जा सके।

19. 15 मी. 17 सेमी लंबा तथा 9 मी. 2 सेमी चौड़ा एक कमरे की छत पर कम से-कम कितनी बराबर वर्गाकार टाइलें लगेंगी?

20. वह बड़ी से बड़ी संख्या ज्ञात कीजिए जिससे 77, 147 एवं 252 में भाग देने पर प्रत्येक दशा में समान शेष बचे:

21. तीन विभिन्न चौराहे (road-crossings) पर ट्रैफिक लाइट्स क्रमशः 48 सेकेंड, 72 सेकेंड एवं 108 सेकेंड बाद बदलता है यदि वे तीनों लाइट्स 8 बजकर 20 मिनट पर एक साथ बदलते हों तो पुनः वे कितने बजे एक साथ बदलेंगे?

22. दो संख्याओं का म. स. एवं ल.स. क्रमशः 44 एवं 264 है। यदि पहली संख्या में 2 से भाग दिया जाता है तो भागफल 44 प्राप्त होता है। दूसरी संख्या क्या है?

23. दो संख्याओं का गुणनफल 2160 है एवं उनका म.स. 12 है। संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

24. चार अंकों की बड़ी-से-बड़ी तथा पाँच अंकों की छोटी-से-छोटी संख्याएँ ज्ञात कीजिए जिनका म.स. 144 हो।

25. वह न्यूनतम संख्या ज्ञात करें जिसमें से प्रत्येक 12, 18, 32 या 40 को बराबर बार घटाया जा सके।

26. वह न्यूनतम संख्या ज्ञात कीजिए जिसमें यदि 8 जोड़ दिया जाए तो वह 32, 36 एवं 40 से पूर्णतया विभाज्य हो जाए।

yourmahboob

27. दो संख्याओं का योग 528 है और उनका म.स. 33 है। इस तरह की कितनी संख्याएँ हो सकती हैं?

28. एक पाठशाला के 391 छात्रों और 323 छात्राओं को बड़ी से बड़ी बराबर वर्गों में विभाजित किया गया है ताकि प्रत्येक वर्ग के छात्रों की संख्या प्रत्येक वर्ग के छात्राओं की संख्या के बराबर हो। कुल कितने वर्ग हैं?

29. क्या 1000 को ऐसे दो भागों में विभक्त किया जा सकता है जिनका म.स. 15 हो ?

30. सिद्ध करें कि संख्याएँ 2205 एवं 4862 परस्पर अभाज्य (prime) हैं।

31. 1294 में से कौन सी छोटी-से-छोटी संख्या घटाई जाए कि 9, 11 एवं 13 से भाग देने पर प्रत्येक दशा में 6 शेष बचे?

32. 300 एवं 400 के बीच वैसी संख्याओं का योग बताएँ जिसमें 6, 9 एवं 12 से भाग देने पर (a) कुछ भी शेष न बचे ; एवं (b) प्रत्येक दशा में 4 शेष बचे

33. भाग विधि द्वारा दो संख्याओं का म.स. निकालने में अंतिम भाजक 18 तथा भागफल 2, 7 एवं 3 आते हैं संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

34. एक फल विक्रेता ने कुछ सेब 107.50 रु. में खरीदे और उनमें से कुछ सेब 68.80 रु. में बिना लाभ या हानि के बेच दिए। सिद्ध कीजिए कि उसके पास अब भी कम-से-कम 9 सेब शेष हैं।

35. तीन संख्याओं का ल. स. 360 है और म. स. 6 है। यदि दो संख्याएँ 24 एवं 36 हों तो तीसरी छोटी-से-छोटी संख्या क्या होगी?

36. दो संख्याओं का योग 56 है और उनका ल. स. 105 है। उनका म. स. ज्ञात कीजिए। वे संख्याएँ भी ज्ञात कीजिए।

37. तीन संख्याओं का ल. स. 210 और म. स. 7 है तथा संख्याओं का योग 70 है वे संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

38. ऐसी दो संख्याएँ ज्ञात कीजिए जिनका ल. स. 1188 एवं म. स. 9 हो।

39. चार घंटियाँ 6, 8, 12, तथा 18 सेकेंड के अंतर पर बजती हैं। यदि वे 12 बजे एक साथ बजना आरंभ करें तो बताइए कि फिर कब एक साथ बजेंगी और 6 मिनट के अन्दर वे कितनी बार एक साथ बजेंगी?

40. दो दँतिहार पहिए आपस में सटकर चलते हैं। एक में 32 दाँत व दूसरे में 36 दाँत हैं। यदि बड़ा पहिया प्रति सेकेंड 64 चक्कर लगाता है तो ज्ञात कीजिए कि 10 मिनट की अवधि में दो विशेष दाँत कितने बार एक दूसरे के संपर्क में आएँगे?

हल (संकेत)

1. (2930 7) और (3250 11) का म. स. ही इस प्रकार की सबसे बड़ी संख्या होगी।
2923 एवं 3239 का म. स. = 79

yoursmahboob

2. $825 = 3 \times 5 \times 5 \times 11$; $715 = 5 \times 11 \times 13$

स्पष्टतः 5, 11 एवं 13, 715 के किसी भी अपवर्त्य के गुणनखण्ड होंगे।

$\therefore$ 825 को 715 के ऐसे गुणनखण्ड या गुणनखंडों से गुणा करना चाहिए जो 825 में नहीं हो

$\therefore$ अभीष्ट न्यूनतम संख्या = 13

3. अभीष्ट संख्या $= \dfrac{2310 \times 30}{7 \times 30} = 330$

4. दोनों घड़ियाँ एक साथ 0.25 सेकेंड, 0.1 सेकेंड एवं 0.125 सेकेंड के ल.स. के बराबर के समयांतराल के बाद बजेंगी।

0.25, 0.1 एवं 0.125 का ल. स. = (250, 100 और 125 का ल. स.) × 0.001

= 500 × 0.001 = 0.5 सेकेंड

5. 2.5, 20, 1.2 एवं 7.5 का ल. स. = (25, 200, 12 एवं 75 का ल. स.) × 0.1

= 600 × 0.1 = 60 रु.

6. अभीष्ट संख्या = (410 − 7), (751 − 7) एवं (1030 − 7) का म. स.

= 31

7. न. म. $= \dfrac{\text{अंश का म.स.}}{\text{हर का ल.स.}} = \dfrac{1}{30}$

ल. म. $= \dfrac{\text{अंश का ल.स.}}{\text{हर का म.स.}} = \dfrac{140}{1} = 1$

8. एक चक्कर काटने में उनके द्वारा लिया गया समय क्रमशः

$= \dfrac{11}{4}, \dfrac{11}{5.5}$ एवं $\dfrac{11}{8}$ घंटे

$= \dfrac{11}{4}, \dfrac{2}{1}$ एवं $\dfrac{11}{8}$ घंटे

$\dfrac{11}{4}, \dfrac{2}{1}$ एवं $\dfrac{11}{8}$ का ल. स. $= \dfrac{\text{11, 2, 11 का ल.स.}}{\text{4, 1, 8 का म. स.}} = \dfrac{22}{1} = 22$ घंटे

$\therefore$ 22 घंटे के बाद वे मिलेंगे।

9. अभीष्ट न्यूनतम संख्या = दिए हुए संख्याओं का ल. म.

10. 48, 36, 72, 24 का म. स. = 12

48, 36, 72, 24 का ल. स. = 144

$\therefore$ ल. स. = 12 × म. स.

yoursmahboob

11. 4, 5, 6, 15, 18 का ल. स. = 180; यह दी हुई संख्याओं से पूर्णतया विभाज्य है।

$180 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 = 2^2 \times 3^2 \times 5$

इस प्रकार, 180 को यदि 5 से गुणा ($180 \times 5 = 900$) कर दिया जाए तो वह संख्या एक पूर्ण वर्ग होगा तथा साथ ही 4, 5, 6, 15 एवं 18 से विभाज्य होगा।

12. न्यूनतम संख्या जिसमें 8, 12, एवं 16 से भाग देने पर 3 शेष बचता हो

$= 8, 12, 16$ का ल. स. + 3

$= 48 + 3 = 51$

दूसरी ऐसी संख्याएँ $= 48 \times 2 + 3 = 99,$

$= 48 \times 3 + 3 = 147, \ldots\ldots$

$\therefore$ अभीष्ट संख्या जो 7 से विभाज्य है $= 147.$

नोट: यह एक जाँच एवं भूल (Trial-and-error) विधि है।

13. माना कि x शेष बचता है, तो संख्याएँ $(55 - x), (127 - x)$ एवं $(175 - x)$ अभीष्ट संख्या से पूर्णतया विभाज्य होंगी।

अब, हम जानते हैं कि यदि दो संख्याएँ किसी खास संख्या से विभाज्य हो तो उन संख्याओं का अंतर भी उस खास संख्या से विभाज्य होगी।

इसलिए, संख्याएँ $(127 - x) - (55 - x), (175 - x) - (127 - x)$ एवं $(175 - x) - (55x - x)$ या 72, 48 एवं 120 अभीष्ट संख्या से विभाज्य होंगी।

$\therefore$ अभीष्ट संख्या = 48, 72 एवं 120 का म. स. = 24

नोट: संख्याओं के धनात्मक अंतर का म. स. निकालें, इससे आपका काम काफी आसानी से हो जाएगा।

14. 8, 12 एवं 16 का ल. स. = 48

इस प्रकार की संख्याएँ $= (48 \times 1 + 3) = 51,$

$= (48 \times 2 + 3) = 99,$ जो कि 11 से विभाज्य है।

$\therefore$ अभीष्ट संख्या $= 99$

नोट: यह एक जाँच-एवं-भूल (Trial-and-error) विधि है। विस्तार-विधि से इसे हल करने की कोशिश करें।

16. $72 - 52 = 20, 80 - 60 = 20, 88 - 68 = 20.$

हमलोग देखते हैं कि प्रत्येक स्थिति में शेष, भाजक से 20 कम है। इस प्रकार यदि हम अभीष्ट संख्या में 20 जोड़ दें तो वह संख्या 72, 80, एवं 88 से पूर्णतया विभाज्य होगी।

72, 80 एवं 88 का ल. स. = 7920।

$\therefore$ अभीष्ट संख्या $= 7920 - 20 = 7900$

17. 4 अंकों की सबसे बड़ी संख्या = 9999

yoursmahboob

2, 2, 4, 5, 6, 7, का ल. स. = 420

9999 में 420 से भाग देने पर 339 शेष बचता है।

∴ 4 अंकों की सबसे बड़ी संख्या जो 2, 3, 4, 5, 6 एवं 7 से पूर्णतया विभाज्य हो

= 9999 - 339 = 9660

∴ अभीष्ट संख्या = 9660 − 1 = 9661

18. अभीष्ट लंबाई = 7 मी., 3.85 मी. एवं 12.95 मी. का ग. म.

= (700, 385 एवं 1295 का म. स.) × 0.01 मी.

= 35 × 0.01 मी. = 0.35 मी. = 35 सेमी

19. प्रत्येक टाइल की भुजा = 1517 और 902 का म. स.

= 41 से. मी.

प्रत्येक टाइल का क्षेत्रफल = 41 × 41 सेमी²

∴ टाइलों की अभीष्ट संख्या = $\frac{1517 \times 902}{41 \times 41}$ = 814

20. प्रश्न संख्या 13 की तरह हल करें।

अभीष्ट संख्या = (147 − 77), (252 − 147) एवं (252 − 77) का म. स.

= 70, 105, 175 का म. स. = 35

21. 48, 72, एवं 108 का ल. स. = 432

432 सेकेंड के बाद ट्रैफिक लाइट्स एक साथ बदलेगा = 7 मिनट 12 सेकेंड

∴ वे एक साथ 8 बजकर 27 मिनट एवं 12 सेकेंड पर बदलेंगी।

22. पहली संख्या = 2 × 44 = 88

∴ दूसरी संख्या = $\frac{\text{ल. म.} \times \text{म. स.}}{88} = \frac{44 \times 264}{88}$ = 132

23. म. स. = 12

माना कि संख्याएँ 12x एवं 12y हैं।

अब, 12x × 12y = 2160

∴ xy = 15

x एवं y के संभावित मान = (1, 15); (3, 5); (5, 3); (15, 1)

∴ संख्याओं के संभावित जोड़े = (12, 180) एवं (36, 60)

24. अभीष्ट संख्या को 144 का अवयव होना चाहिए।

4 अंकों की सबसे बड़ी संख्या = 9999

9999 में 144 से भाग देने पर 63 शेष बचता है।

yoursmahboob

∴ 4 अंकों की अभीष्ट सबसे बड़ी संख्या – 9999 – 63 = 9936

पुनः पाँच अंकों की सबसे छोटी संख्या – 10000

10000 में 144 से भाग देने पर 64 शेष बचता है।

∴ 5 अंकों की अभीष्ट न्यूनतम संख्या = 10000 + (144 – 64) = 10080

25. अभीष्ट संख्या = 12, 18, 32 एवं 40 का ल. स. = 1440

26. 32, 36 एवं 40 का ल. स. = 1440

∴ अभीष्ट संख्या = 1440 – 8 = 1432

27. माना कि संख्याएँ 33a एवं 33b हैं।

अब, 33a + 33b = 528

या, 33 (a – b) = 528

∴ a + b = 16

a एवं b के संभावित मान = (1, 15); (2, 14); (3, 13); (4, 12); (5, 11); (6, 10); (7, 9); एवं (8, 8)

इनमें से ऐसी संख्याओं के जोड़े जो परस्पर अभाज्य (prime) हैं:

(1, 15); (3, 13), (5, 11) एवं (7, 9)

∴ संख्याओं के संभावित जोड़े: (33, 495); (99, 429); (165, 363); (231, 297)

28. वर्गों की संख्या = 391 तथा 323 का म. स. = 17

29. यदि दो संख्याएँ किसी खास संख्या से विभाज्य हों तो उन संख्याओं का योग भी उस खास संख्या से विभाज्य होगी।

उपर्युक्त नियम से : यदि 1000 के दोनों भागों का म. स. 15 हो तो 1000 अवश्य ही 15 से विभाज्य होगी। लेकिन ऐसा नहीं है। इसलिए 1000 के दो ऐसे भाग नहीं हो सकते जिनका म. स. 15 हो।

30. यदि संख्याएँ परस्पर अभाज्य हों तो उनका म. स. 1 होता है। दूसरे शब्दों में, यदि दो संख्याओं का म. स. 1 हो तो वे संख्याएँ परस्पर अभाज्य होंगी। इस स्थिति में यहाँ पर म. स. 1 है। अतः संख्याएँ परस्पर अभाज्य हैं।

31. 9, 11 एवं 13 का ल. स. = 1287

∴ वह संख्या जिसमें 9, 11 एवं 13 से भाग देने पर प्रत्येक दशा में शेष 6 बचे = 1287 + 6 = 1293

∴ अभीष्ट न्यूनतम संख्या = 1294 – 1293 = 1

32. 6, 9 एवं 12 का ल. स. = 36

(a) 16 का अपवर्त्य जो 300 एवं 400 के बीच में पड़ता हो = 324, 360 एवं 396

∴ अभीष्ट योग = 324 + 360 + 396 = 1080

(b) यहाँ प्रत्येक दशा में शेष 4 बचता है।

yoursmartboob

∴ संख्याएँ = (324 + 4) = 328 एवं (360 − 4) = 364

संख्या (396 − 4) = 400, 300 एवं 400 के बीच नहीं पड़ता है इसलिए यह स्वीकार्य नहीं है।

∴ अभीष्ट योग = 328 + 364 = 692

33.

a) b (2
2a
c) a (7
7c
18) c (3
c
×

∴ अंतिम भाजक = 18 और भागफल = 3

∴ भाज्य c = 18 × 3 = 54

∴ अब भाजक = 54, भागफल = 7, शेष = 18

∴ भाज्य a = 7 × 54 + 18 = 396

∴ अब भाजक = 396, भागफल = 2, अब शेष = 54

∴ भाज्य b = 2 × 396 + 54 = 846

∴ संख्याएँ 396 तथा 846 हैं।

34. चूँकि 1 सेब का अधिक से अधिक मूल्य

= 107.50 रु. एवं 68.80 रु. का म. स.

= 10750 पै. एवं 6880 पै. का म. स. = 430 पै. = 4.30 रु.

∴ कम से कम खरीदे गए सेब = $\frac{107.50}{4.30}$ = 25

तथा कम-से-कम बचे गए सेब = $\frac{68.80}{4.30}$ = 16

∴ कम से कम शेष सेब = 25 − 16 = 9

35. माना कि तीसरी संख्या x है।

चूँकि संख्याओं का म. स. = 6

∴ संख्याओं को निम्नप्रकार से लिखा जा सकता है।

24 = 6 × 2 × 2

36 = 6 × 2 × 3

x = 6 × y

∴ संख्याओं का ल. स. = 6 × 2 × 2 × 3 × y = 72y

yoursmahboob

$\therefore$ $72y = 360$ या $y = 5$

$\therefore$ तीसरी छोटी-से-छोटी संख्या $= 6 \times 5 = 30$

नोट: तीसरी संख्या को हम इस प्रकार भी लिख सकते हैं।

$x = 6 \times 2 \times 2 \times 3 \times y$

किन्तु x में $6 \times y$ होना आवश्यक है इसलिए अन्य संख्याओं में $2 \times 2 \times 3$ में से कोई भी गुणनखण्ड चुना जा सकता है। अर्थात् संख्या $(6 \times 5) \times 2$, $(6 \times 5) \times 3$, $(6 \times 5) \times 2 \times 3$, $(6 \times 5) \times 2 \times 2 \times 3$,

अर्थात् 60, 90, 150, 360 भी ली जा सकती है। किन्तु इन सब संख्याओं में 30 सबसे छोटी संख्या है।

36. संख्याओं का म. स. – उनके योग एवं ल. स. का म. स.

$\therefore$ अभीष्ट म. स. $= 56$ एवं 105 का म. स. $= 7$

$\therefore$ संख्याओं का म. स. 7 है।

$\therefore$ संख्याएँ $= 7a$ एवं $7b$; जहाँ a, b, परस्पर अभाज्य हैं।

अब, इनका योग $= 7a + 7b = 56$ या $a + b = 8$ ..... (i)

और इनका ल. स. $7ab = 105$ या $a + b = 15$ ..... (ii)

(i) के अनुसार निम्नलिखित जोड़े प्राप्त होंगे

(1, 7), (2, 6) (3, 5) (4, 4)

जिनमें अभाज्य जोड़े केवल (1, 7) एवं (3, 5) हैं।

(ii) के अनुसार इनका गुणनफल 15 होना चाहिए

$\therefore$ संख्याएँ $= 7 \times 3$ एवं $7 \times 5 = 21$ एवं 35

नोट: दो संख्याओं के योग एवं उनके ल. स. का म. स. संख्याओं के म.स. के बराबर होता है।

व्याख्या :

यदि संख्याएँ x एवं y हों और म. स. m तथा ल. स. l हो तो

$x = ma$, $y = mb$; जहाँ कि a, b आपस में अभाज्य हैं।

$\therefore$ $l = mab$

$x + y = m(a + b)$

स्पष्ट है कि $(x + y)$ एवं l का म. स. m होगा।

37. संख्याओं का म. स. $= 7$

$\therefore$ संख्याएँ $= 7a, 7b$ एवं $7c$; जहाँ a, b एवं c परस्पर अभाज्य हैं।

$\therefore$ उनका योग $= 7a + 7b + 7c = 70$ $\therefore$ $a + b + c = 10$

पुनः इनका ल. स. $= 7k = 210$

$\therefore$ $k = 30$; जहाँ $k =$ a, b एवं c का ल. स.

yoursmahboob

चूँकि $k = 1 \times 2 \times 3 \times 5$

$\therefore$ वे संख्याएँ जिनका ल. स. 30 है, निम्नलिखित होंगी।

(1, 2, 15); (1, 3, 10); (1, 5, 6); (2, 3, 5); (1, 1, 30); (2, 5, 6); (3, 3, 10) (5, 5, 6); (2, 2, 15) आदि।

इनमें से केवल (2, 3, 5) ऐसी संख्याएँ हैं जिनका जोड़ 10 है।

$\therefore$ a, b, c का उपयुक्त मान = 2, 3, 5

$\therefore$ अभीष्ट संख्याएँ = 7a, 7b, 7c = $7 \times 2, 7 \times 3, 7 \times 5$ = 14, 21, 35

38. माना कि संख्याएँ x, y हैं। चूँकि उनका म. स. 9 है, अतः संख्याओं को निम्नलिखित रूप में लिखा जा सकता है:

$x = 9a, \quad y = 9b;$ जहाँ a, b परस्पर अभाज्य हैं।

इन संख्याओं का ल. स. = 9ab

$\therefore$ 9ab = 1188 या, ab = 132

अब वह जोड़े जिनका गुणनफल 132 है, निम्नलिखित हैं:

(1, 132), (2, 66), (3, 44), (4, 33), (6, 22), (11, 12)

इनमें से दो जोड़े (2, 66) एवं (6, 22) परस्पर अभाज्य नहीं हैं।

$\therefore$ सही जोड़े (1, 132), (3, 44), (4, 33), एवं (11, 12)

अर्थात् a = 11, b = 132; a = 3, b = 44; a = 4, b = 33 एवं a = 11, b = 12

$\therefore$ अभीष्ट संख्याएँ = x, y = 9a, 9b

$= 9 \times 1, 9 \times 132; 9 \times 3, 9 \times 44; 9 \times 4, 9 \times 33$ एवं $9 \times 11, 9 \times 12$

= 9, 1188; 27, 396; 36, 297 एवं 99, 108

39. 6, 8, 12 एवं 18 का ल. स. = 72

$\therefore$ घंटियाँ 72 सेकेंड के बाद अर्थात् 1 घण्टा 12 मिनट पर पुनः एक साथ बजेंगी।

6 मिनट के अंदर, $\frac{6 \times 60}{70} = 5$ बार एक साथ बजेंगी

40. 32 एवं 36 का ल. स. = 288

अर्थात् 288 सेकेंड बाद दो विशेष दौड़ फिर संपर्क में आएँगे। जिसमें छोटे वाहन के $(288 \div 32) = 9$ चक्कर एवं बड़े वाहन के $(288 \div 36) = 8$ चक्कर लगा चुके होंगे।

चूँकि बड़ा वाहन 1 सेकेंड में 64 चक्कर लगाता है

इसलिए 1 सेकेंड में दो विशेष दौड़ $(64 + 8) = 8$ बार सम्पर्क में आएँगे।

$\therefore$ 10 घंटे में सम्पर्क $10 \times 60 \times 60 \times 8 = 288000$ बार

yoursmahboob

प्राथमिक बीजगणित
(Elementary Algebra)

***बीजगणितीय व्यंजक* (Algebraic Expression):** वर्णिक संख्याओं एवं गणित की मूल संक्रियाओं के निर्देशक चिह्नों से निर्मित व्यंजक बीजगणितीय व्यंजक कहलाता है।

बीजगणितीय व्यंजक एकपदीय (monomial) कहलाता है, जब इसमें केवल एक पद हो। जैसे $6x$, $-3y$ आदि। इसे द्विपदीय (binomial) कहा जाता है, यदि इसमें दो पद हों। जैसे, $p^2+2r, -x^2+2x$ आदि। इसे बहुपदीय (polynomial) कहा जाता है, यदि इसमें 2 से अधिक पद हों

***बहुपदीय व्यंजकों का जोड़ एवं घटाव* (Addition and Subtraction of Polynomials):** समान पदों के गुणांकों को आपस में जोड़ या घटाया जाता है। मान लीजिए, $(3x^2+2x-3)$ एवं $(5x^3-2x^2-x)$ दो बहुपदीय व्यंजक हैं। इन दोनों व्यंजकों का योग:

$$5x^3+(3x^2-2x^2)-(2x+x)-3 = 5x^3+x^2+3x-3$$

इन दोनों बहुपदीय व्यंजकों के घटाने का तात्पर्य है, बड़े बहुपद में से छोटे को घटाना

$$(5x^3-2x^2+x)-(3x^2-2x-3) = 5x^3-2x^2+x-3x^2+2x+3$$
$$= 5x^3+(-2x^2-3x^2)-(x-2x)+3$$
$$= 5x^3-5x^2-x+3$$

उदा. 1: निम्नलिखित का योगफल ज्ञात करें:

$$-15a^2+3ab-6b^2,\ a^2-5ab+11b^2,\ -7a^2-18ab-13b^2$$

एवं $26a^2-16ab-7b^2$

हल: $(-15a^2+3ab-6b^2)+(a^2-5ab+11b^2)+(-7a^2-18ab-13b^2)$
$-(26a^2-16ab-7b^2)$

$$=(-15a^2-a^2-7a^2-26a^2)+(3ab-5ab-18ab-16ab)$$
$$+(-6b^2+11b^2-13b^2-7b^2)$$
$$=-5a^2-36ab-15b^2$$

उदा. 2: यदि $P=a^4+a^3+a^2-6$,

$Q=a^2-2a^3-2+3a$ एवं

yoursmahboob

$R = 8 - 3a - 2a^2 + a^3$

तो $P + Q - R$ का मान ज्ञात करें।

हल: $P + Q - R = (a^4 + a^3 + a^2 - 6) + (a^2 - 2a^3 - 2 + 3a) + (8 - 3a - 2a^2 + a^3)$

$= a^4 + (a^3 - 2a^3 + a^3) + (a^2 + a^2 - 2a^2) + (3a - 3a) + (-6 - 2 + 8)$

$= a^4 + 0 + 0 + 0 + 0 = a$

शेषफल प्रमेय (Remainder Theorem): यह प्रमेय $(x - a)$ के रूप में अभिव्यक्त पहले भाग के विभाजक एवं शेष $f(x)$ के बीच के संबंध को निरूपित करता है।

यदि x का समाकल फलन (integral function), $(x - a)$ द्वारा तब तक विभाजित किया जाता है, जब तक कि शेष x से रहित न हो जाए तो शेष का मान उतना ही होता है जितना कि मूल फलनक में x की जगह 'a' रखने से प्राप्त होता। दूसरे शब्दों में, यदि $f(x)$ को $(x - a)$ से विभाजित किया जाए तो शेष $f(a)$ बचता है। उदाहरण के लिए, जब $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 4$ में $(x - 2)$ से भाग दिया जाता है तो शेष बचता है $f(2)$। यानि $f(2) = 2^3 - 2(2)^2 + 3(2) - 4 = 2$

नोट: 1) यदि $f(x)$ को $(x + a)$ से विभाजित किया जाता है तो शेष होगा $f(-a)$

2) यदि $f(x)$ को $(ax + b)$ से विभाजित किया जाता है तो शेष बचेगा $f\left(-\frac{b}{a}\right)$

3) यदि $f(x)$ को $(ax - b)$ से विभाजित किया जाता है तो शेष बचेगा $f\left(\frac{b}{a}\right)$

4) शेष प्राप्त करने की प्रक्रिया निम्नलिखित है।

I. भाजक का मान शून्य कर दीजिए। उदाहरण के लिए यदि भाजक $(ax + b)$ हो तो

$(ax + b) = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$

II. शेष x के मान का एक फलन होगा जैसे $f\left(-\frac{b}{a}\right)$। इसी तरह आप अन्य शेष को भी प्राप्त कर सकते हैं।

उदा. 1: भाग की क्रिया का इस्तेमाल किए बिना $(x^3 + 4x^2 + 6x - 2) \div (x + 5)$ का शेष ज्ञात करें।

हल: **पहला चरण:** भाजक $(x + 5)$ का मान शून्य रखें

$x + 5 = 0 \rightarrow x = -5$

दूसरा चरण: शेष $f(-5)$ होगा।

$f(-5) = (-5)^3 + 4(-5)^2 + 6(-5) - 2$

$= -125 + 100 - 30 - 2 = -57$

yoursmahboob

उदा. 2: शेष ज्ञात करें, जब $(27x^3 - 9x^2 - 3x - 8)$ को $(3x+2)$ से विभाजित किया जाता है।

हल: **पहला चरण:** $3x + 2 = 0 \rightarrow x = -\frac{2}{3}$

दूसरा चरण: शेष $= f\left(-\frac{2}{3}\right)$

$$\therefore\ f\left(-\frac{2}{3}\right) = 27\left(-\frac{2}{3}\right)^3 - 9\left(-\frac{2}{3}\right)^2 + 3\left(-\frac{2}{3}\right) - 8$$

$$= -8 - 4 - 2 - 8 = -22$$

उदा. 3: यदि व्यंजक $(Px^3 + 3x^2 - 3)$ एवं $(2x^3 - 5x + P)$ को $(x-4)$ से विभाजित करने पर समान शेष बचता है तो P का मान निकालें।

हल: यदि शेष R_1 एवं R_2 हों तो,

$R_1 = f(4) = P(4)^3 + 3(4^2) - 3 = 64P + 45$

$R_2 = f(4) = 2(4)^3 - 5(4) + P = P + 108$

प्रश्नानुसार, $R_1 = R_2$

$\therefore\ 64P + 45 = P + 108$

या, $63P = 63$

$\therefore\ P = 1$

उदा. 4: यदि $px^3 + x^2 - 2x - q$, $(x-1)$ एवं $(x+1)$ दोनों से पूरी तरह विभाज्य हो तो p एवं q का मान ज्ञात करें।

हल: पूरी तरह विभाज्य होने का मतलब है शेष शून्य बचना।

जब भाजक $(x-1)$ है तब शेष

$f(1) = p - 1 - 2 - q = 0$

$\rightarrow p - q = 1 \quad ...(1)$

जब भाजक $(x+1)$ है तब शेष

$f(-1) = p(-1)^3 + (-1)^2 - 2(-1) - q = 0$

$\Rightarrow -p - 1 - 2 - q = 0$

$\Rightarrow p + q = 3 \quad ...(2)$

(1) एवं (2) को सरल करने पर,

$p = 2$ एवं $q = 1$

बहुपदीय व्यंजकों का गुणनखंड निकालना

शेषफल प्रमेय पर आधारित गुणनखंड प्रमेय बहुपदीय व्यंजकों का गुणनखंड निकालने में बहुत उपयोगी है।

yourmahboob

गुणनखंड प्रमेय (Factor Theorem): मान लीजिए कि $f(x)$ एक बहुपदीय व्यंजक है एवं 'a' एक वास्तविक संख्या है, तो निम्नलिखित दो परिणाम सत्य सिद्ध होते हैं:

(i) यदि $f(a) = 0$ तो $(x-a)$, $f(x)$ का एक गुणनखंड होगा।

(ii) यदि $(x-a)$, $f(x)$ का एक गुणनखंड हो तो $f(a) = 0$

उदा. 1: यदि $f(x) = x^3 - 12x^2 + 44x - 48$ तो पता करें कि क्या $(x-2)$ एवं $(x-3)$, $f(x)$ के गुणनखंड हैं?

हल: a) यह पता करने के लिए कि $(x-2)$, $f(x)$ का गुणनखंड है या नहीं, हम $f(a)$ यानि $f(2)$ का मान निकालते हैं। यदि इसका मान शून्य के बराबर आता है तो $(x-2)$, $f(x)$ का एक गुणनखंड होगा। [गुणनखंड प्रमेय (i) से]

$$f(2) = 2^3 - 12\times 2^2 + 44\times 2 - 48 = 0$$

$\therefore$ गुणनखंड प्रमेय के अनुसार, $(x-2)$, $f(x)$ का एक गुणनखंड है।

b) $(x-3)$, $f(x)$ का गुणनखंड है या नहीं, यह पता करने के लिए उपर्युक्त प्रक्रिया से $f(3)$ लेकर संपन्न किया जाता है।

$$f(3) = 3^3 - 12\times 3^2 + 44\times 3 - 48 = 3$$

$\Rightarrow f(a) = f(3) \neq 0$

$\therefore (x-3)$, $f(x)$ का गुणनखंड नहीं है

उदा. 2: गुणनखंड प्रमेय के आधार पर यह बताएँ कि $(3x-1)$, $(27x^3 - 9x^2 - 6x + 2)$ का गुणनखंड है या नहीं।

हल: यहाँ $(3x-1) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$

यदि $(3x-1)$, $f(x)$ का गुणनखंड है तो $f\left(\frac{1}{3}\right)$ का मान शून्य होना चाहिए।

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = 27\left(\frac{1}{3}\right)^3 - 9\left(\frac{1}{3}\right)^2 - 6\left(\frac{1}{3}\right) + 2$$

$$= 1 - 1 - 2 + 2 = 0$$

$\therefore (3x-1)$, प्रदत्त बहुपदीय व्यंजक का एक गुणनखंड है.

नोट: 1. यह देखा जा सकता है कि गुणनखंड प्रमेय, शेषफल प्रमेय से किस प्रकार प्राप्त किया जाता है: 'जब शेष शून्य हो तो भाजक उस व्यंजक का एक गुणनखंड होता है।'

2. यदि $f(a) = 0$, तो $(x-a)$, $f(x)$ का एक गुणनखंड होगा।

3. यदि $f(-a) = 0$ तो $(x+a)$, $f(x)$ का एक गुणनखंड होगा।

4. यदि $f(x) = 0$, जब $x = a$ एवं $x = b$ तो $f(x)$, $(x-a)$ एवं $(x-b)$ से पूर्णतया विभाज्य होगा अर्थात् $(x-a)$ एवं $(x-b)$ दोनों $f(x)$ के गुणनखंड हैं।

yourshahboob

5. यदि दो या उससे अधिक चरों से युक्त सममिकल फलन (integral function) शून्य के बराबर हो, जबकि इसके दोनों चर समान माने जाते हों, तब वह फलन इन दोनों चरों के अन्तर से पूर्णतया विभाज्य होता है। उदाहरण के लिए,

$(b-c), (c-a)$ एवं $(a-b)$, $a(b-c)^3+b(c-a)^3-c(a-b)^3=0$ के गुणनखंड हैं।

प्रमाण: प्रदत्त समीकरण में $b-c$ रखें

$$a(c-c)^3+c(c-a)^3-c(a-c)^3=0 \cdot c(c-a)^3-c(c-a)^3=0$$

$\therefore$ $(b-c)$ प्रदत्त व्यंजक का एक गुणनखंड है।

इसी तरह यह भी दिखाया जा सकता है कि $(c-a)$ एवं $(a-b)$ भी दिए गए व्यंजक के गुणनखंड हैं।

विभाज्यता की शर्तें (Conditions of Divisibility)

1) $x^n+a^n, (x+a)$ से पूर्णतया विभाज्य होता है यदि 'n' एक विषम संख्या हो।

उदाहरण के लिए, $a^5+b^5, (a+b)$ से पूर्णतया विभाज्य है।

2) $x^n+a^n, (x-a)$ से पूर्णतया विभाज्य नहीं होता है यदि n एक सम संख्या हो

उदाहरण के लिए, $a^8+b^8, (a-b)$ से पूर्णतया विभाज्य नहीं है।

3) $x^n+a^n, (x-a)$ से कभी भी विभाज्य नहीं है। उदाहरण के लिए, a^7+b^7 या $a^{10}+b^{10}, (a-b)$ से पूर्णतया विभाज्य नहीं है।

4) $x^n-a^n, (x-a)$ से पूर्णतया विभाज्य होगा, यदि और केवल यदि n एक सम संख्या हो उदाहरण के लिए $x^6-a^6, (x+a)$ से पूर्णतया विभाज्य है।

5) $x^n-a^n, (x-a)$ से पूर्णतया विभाज्य है, चाहे n सम संख्या हो या विषम संख्या।

उदाहरण के लिए, x^9-a^9 एवं $x^{111}-a^{111}, (x-a)$ से पूर्णतया विभाज्य है

प्रमाण: ऊपर दिए गए समस्त कथन प्रमाणित किए जा सकते हैं। यहाँ हम केवल कथन 1) एवं 5) को प्रमाणित करेंगे। शेष कथनों को आप स्वयं प्रमाणित करें।

(1) x^n+a^n यदि $x-a$ से पूर्णतः विभाज्य है तो, $f(-a)=(-a)^n+a^n=0$

यह तभी संभव है जब 'n' एक विषम संख्या हो।

(5) x^n-a^n यदि $(x-a)$ से पूर्णतया विभाज्य है तो, $f(a)=a^n-a^n=0$

यह n के सभी मानों के लिए सत्य है।

yoursmahboob

उदा. 3: व्यंजक $5^{2n} - 2^{3n}$ में निम्नलिखित में से कौन-सा गुणनखंड है?

1) 3 2) 7 3) 10 4) 17 5) इनमें से कोई नहीं

हल: $5^{2n} - 2^{3n} = (5^2)^n - (2^3)^n = (25^n) - (8)^n$

चूँकि 'n' के विषय में कुछ भी ज्ञात नहीं है, इसलिए शर्त (5) से (25−8) एक गुणनखंड है यानि 17, $5^{2n} - 2^{3n}$ का एक गुणनखंड है।

उदा. 4: यदि n एक धनात्मक पूर्णांक हो तो $(41)^n - 1$ के विस्तार में अंतिम अंक क्या होगा?

1) 2 2) 1 3) 0 4) −1 5) इनमें से कोई नहीं

हल: $(41)^n$ के विस्तार में अंतिम अंक हमेशा 1 होगा, चाहे n का मान कुछ भी हो।

$\therefore$ $(41)^n - 1$ में आखिरी अंक '0' होगा।

अथवा,

किसी भी धनात्मक पूर्णांक n के लिए, $(41-1), (41)^n - (1)^n$ का गुणनखंड है या पूर्ण विभाजक है। अब चूँकि $(41 - 1) = 40$ उपर्युक्त व्यंजक का एक गुणनखंड है, इसलिए $(41)^n - 1$ के विस्तार में आखिरी अंक शून्य होगा।

उदा. 5: यदि n कोई धनात्मक पूर्णांक हो तो $2^{12n} - 6^{4n}$ के विस्तार में आखिरी दो अंक क्या होंगे?

हल: $(2^6)^{2n} - (6^2)^{2n} = (64)^{2n} - (36)^{2n}$

$\because$ 2n एक सम पूर्णांक है, इसलिए उपर्युक्त व्यंजक (64 + 36) से पूर्णतया विभाज्य होना चाहिए। [शर्त (4) के अनुसार] इसलिए (64 + 36) = 100 उपर्युक्त व्यंजक का एक गुणनखंड है। $\therefore$ $2^{12n} - 6^{4n}$ के विस्तार में आखिरी दो अंक = 00

उदा. 6: n के सभी पूर्णांक मानों के लिए व्यंजक $(7^{2n} - 3^{3n})$ निम्नलिखित में से किसका अपवर्त्य है?

1) 22 2) 12 3) 10 4) 11 5) 24

हल: $7^{2n} - 3^{3n} = (7^2)^n - (3^3)^n = 49^n - 27^n$

शर्त (5) के अनुसार, 49 − 27 = 22, प्रदत्त व्यंजक का एक गुणनखंड है।

उदा. 7: $27x^3 - 9x^2 - 6x - 5$ में से कितना घटाया जाए कि वह $(3x - 1)$ से पूर्णतया विभाजित हो जाए?

हल: यहाँ शेषफल के नियम से शेष प्राप्त किया जाएगा:

$$3x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$$

yoursmahboob

$\therefore$ शेष $f\left(\frac{1}{3}\right) = 27\left(\frac{1}{3}\right)^3 - 9\left(\frac{1}{3}\right)^2 - 6\left(\frac{1}{3}\right) - 5$

$= 1 - 1 - 2 - 5 = -7$

यदि प्रदत्त व्यंजक में से (-7) घटा दिया जाए तो प्रदत्त पाजल से पूर्णतया विभाजित हो जाएगा।

$\therefore$ अभीष्ट मान $= -7$

***बहुपदीय व्यंजक के शून्य मान के लिए प्रमेय* (Theorem for zero of a polynomial)**

माना कि $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_n$

पूर्णांक गुणांकों से युक्त एक बहुपदीय व्यंजक है यदि पूर्णांक k एक शून्यमान बहुपद हो तो k, a_n का एक गुणनखंड होगा।

साधित उदाहरण: निम्नलिखित बहुपद के संदर्भ में उन के वे सभी पूर्णांक मान ज्ञात करें जिसके लिए बहुपद का मान शून्य हो।

$f(y) = y^3 - 2y^2 + y + 4$

हल: मान लें कि व्यंजक $f(y)$, k के लिए शून्य मान देता है। उपर्युक्त प्रमेय के अनुरूप, k, a_n का एक गुणनखंड होगा।

यहाँ $a_n = 4$ है, इसलिए k के सभी संभावित मान $1, -1, 2, -2, 4$ एवं -4 हैं।

अब एक एक करके सभी मानों को परखें

(i) $f(1) = 1^3 - 2\times1^2 + 1 + 4 = 4 \quad \because f(1) \neq 0$

इसलिए 1, $f(y)$ का शून्यमान नहीं देता है।

(ii) $f(-1) = (-1)^3 - (2)(-1)^2 + (-1) + 4 = 0$

$\because f(-1) = 0 \therefore (-1)$ के लिए प्रदत्त व्यंजक का मान शून्य है।

(iii) इसी तरह $2, -2, 4$ एवं -4, $f(y)$ का शून्यमान नहीं देते हैं इसलिए $f(y)$ का शून्यमान देनेवाला पूर्णांक केवल (-1) है यदि अन्य किन्हीं मानों के लिए $f(y)$ शून्य के बराबर है तो वे मान पूर्णांक नहीं हैं।

***द्विघात समीकरण* (Quadratic Equation)**

जिस समीकरण में उस राशि का महत्तम मान 2 हो, उसे 'द्विघात समीकरण' कहते हैं; उदाहरण के लिए: $ax^2 + bx + c = 0$ के अनुरूप समीकरण द्विघात समीकरण है।

दो रैखिक बहुपदीय व्यंजकों के गुणनफल से भी द्विघात समीकरण प्राप्त होता है। मान लें कि $(lx + m)$ एवं $(px + q)$ दो रैखिक बहुपदीय व्यंजक हैं, यहाँ $l \neq 0$, $p \neq 0$, तब इन दोनों बहुपदों का गुणनफल एक बहुपदीय द्विघात समीकरण $lpx^2 + (lq + mp)x + mq$ देता। इसका मानक रूप

yoursmahboob

$ax^2 + bx + c$ है। यहाँ $a = lp$, $b = (lq + mp)$ एवं $c = mq$ है।

द्विघात समीकरण का गुणनखंड निकालना (Factorization of Quadratic Equations):

द्विघात बहुपद $ax^2 + bx + c$ का गुणनखंड तभी निकाला जा सकता है, जब r एवं s की ऐसी संख्याएँ विद्यमान हों, जिसके लिए

i) $r + s = b$

ii) $r + s = b = x$ के गुणांक $= lq + mp$

iii) $r \times s = ac = l.p.m.q = x^2$ का गुणांक $\times$ अचर

साधित उदाहरण: $2x^2 + 11x - 5$ का गुणनखंड निकालें।

हल: i) यहाँ $a = 2, b = 11$ एवं $c = 5$

ii) दो संख्याएँ r एवं s का पता लगाइए, ताकि $r + s = b = 11$

तथा $r \times s = a \times c = 2 \times 5 = 10$, जो कि 10 एवं 1 हैं

iii) अब मध्य पद $11x$ को दो भागों में तोड़िए

$11x = 10x + 1x$

$\therefore \quad 2x^2 + 11x + 5 = 2x^2 + 10x + 1x + 5$

$= 2x(x+5) + 1(x+5) = (2x+1)(x+5)$

द्विघात समीकरण के गुणनखंड की शर्तें:

सभी द्विघात समीकरणों का गुणनखंड निकालना संभव नहीं है। किसी द्विघात समीकरण का गुणनखंड निकालना संभव है या नहीं, यह निम्नलिखित तरीके से जाना जा सकता है:

1) यदि $b^2 - 4ac > 0$, तब प्रदत्त द्विघात समीकरण का गुणनखंड निकाला जा सकता है

2) यदि $b^2 - 4ac < 0$, तब इसका गुणनखंड निकालना संभव नहीं है।

मूलपद संख्याओं एवं किसी व्यंजक का गुणनखंड निकालने के लिए आमतौर से निम्नलिखित सूत्र महत्वपूर्ण हैं:

1. $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

2. $(a+b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

3. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

4. $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

5. $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

6. $a^3 + b^3 = (a-b)^3 - 3ab(a+b)$

7. $a^3 - b^3 = (a-b)^3 + 3ab(a-b)$

8. $(a-b)^2 = (a-b)^2 + 4ab$

yoursmahboob

9. $(a-b)^2=(a+b)^2-4ab$

10. $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

11. $(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3(b+c)(c+a)(a+b)$

12. $a^2-b^2=(a+b)^2-2ab$

13. $a^2+b^2=(a-b)^2+2ab$

14. यदि $a+b+c=0$ हो तो $a^3+b^3+c^3=3abc$.

15. $x^2+x(a-b)+ab=(x+a)(x+b)$

16. $a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+3abc=(a+b+c)(ab+bc+ca)$

17. $ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)-2abc=(a+b)(b-c)(c+a)$

18. $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)=-(a-b)(b-c)(c-a)$

घातांक प्रमेय (Theory of Indices): व्यंजक a^m से तात्पर्य है, m गुणनखंडों से प्राप्त गुणनफल जिसमें प्रत्येक गुणनखंड 'a' के बराबर है। जब m एक धन पूर्णांक है तो m को a का घात (exponent या power या index) कहा जाता है। यदि किसी राशि का घात शून्य हो तो उसका मान 1 के बराबर होता है। उदाहरण के लिए, $a^0=1, 1^0=1, (-1)^0=1$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^0=1, (3)^0=1, (1000)^0=1 \text{ आदि}$$

जब कभी घात को अंश से हर में या हर से अंश में ले जाया जाता है तो उसका चिह्न बदल जाता है। उदाहरण के लिए,

$$a^m=\frac{1}{a^{-m}}, \frac{1}{a^m}=a^{-m}, \frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$$

घातांक का नियम (Law of Indices): घातांक युक्त गणितीय प्रश्नों को हल करने वक्त निम्नलिखित सूत्रों को याद रखना चाहिए:

(1) $x^m\times x^n=x^{m+n}$

(2) $(x^m)^n=x^{mn}$

(3) $(xy)^m=x^m y^m$

(4) $\frac{x^m}{x^n}=x^{m-n}$ यदि $m>n$ एवं $\frac{x^m}{x^n}=\frac{1}{x^{n-m}}$ यदि $n>m$

yousmanbooks

उपर्युक्त सभी नियमों में m एवं n धन पूर्णांक हैं। बीज गणित में मूल (root) संबंधित प्रश्नों को घातांक के नियमों के सहारे ही हल किया जाता है। उदाहरण के लिए, $\sqrt[3]{a}$ का तात्पर्य है $a^{1/2}$, $\sqrt[4]{a}$ से तात्पर्य है $a^{1/4}$, $a^{3/4}$ का अर्थ है $\sqrt[4]{a^3}$

***महत्तम समापवर्तक* (HCF):** दो या दो से अधिक बीजगणितीय व्यंजकों का म.स. निम्नलिखित विधि से निकाला जा सकता है:

1) गुणनखंड-विधि से, एवं 2) भाग-विधि से

गुणनखंड विधि में सर्वप्रथम प्रदत्त व्यंजकों के गुणनखंडों को अलग-अलग निकाल लिया जाता है इन गुणनखंडों में से उभयनिष्ठ गुणनखंडों को अलग छाँट लिया जाता है फिर इन्हें आपस में गुणा करते हैं। यह गुणनफल ही अभीष्ट महत्तम समापवर्तक है।

उदाहरण के लिए, यदि $8(x^2 - 5x + 6)$ एवं $12(x^2 - 9)$ का महत्तम समापवर्तक निकालना हो, तो सर्वप्रथम प्रदत्त व्यंजकों का गुणनखंड निकालेंगे:

प्रदत्त व्यंजक = $8(x^2 - 5x + 6)$ एवं $12(x^2 - 9)$

$8(x^2 - 2x + 6) = 4 \times 2(x - 3)(x - 2)$

$12(x^2 - 9) = 4 \times 3(x - 3)(x + 3)$

उभयनिष्ठ गुणनखंड = 4 एवं $(x - 3)$

$\therefore$ महत्तम समापवर्तक $= 4 \times (x - 3) = 4x - 12$

***लघुत्तम समापवर्त्य* (LCM):** दो या दो से अधिक बीजगणितीय व्यंजकों में से सबसे छोटा सार्व गुणज (या समापवर्त्य) लघुत्तम समापवर्त्य (LCM) कहलाता है। यदि केवल दो व्यंजक दिए गए हों तो सर्वप्रथम प्रदत्त व्यंजकों का महत्तम समापवर्तक गुणनखण्ड विधि या भाग विधि द्वारा निकालते हैं। तदुपरान्त निम्नलिखित सूत्र के सहारे उसका लघुत्तम समापवर्त्य निकाल लिया जाता है:

$$\text{दो व्यंजकों का लघुत्तम समापवर्त्य} = \frac{\text{प्रदत्त व्यंजकों का गुणनफल}}{\text{उनका महत्तम समापवर्तक}}$$

इस प्रकार, $8(x^2 - 5x + 6)$ एवं $12(x^2 - 9)$ का ल.स.

$= \dfrac{8(x^2 - 5x + 6) \times 12(x^2 - 9)}{4(x - 3)}$ [सूत्र के अनुसार]

$= 24(x^2 - 5x + 6)(x + 3)$

$= 24(x^3 - 5x^2 + 6x + 3x^2 - 15x + 18) = 24(x^3 - 2x^2 - 6x + 18)$

***द्विघात समीकरण का हल* (Solving Quadratic Equation):** किसी भी द्विघात समीकरण को हल करने पर चर के हमेशा दो मान प्राप्त होते हैं। चर के इन मानों को समीकरण का मूल (roots) कहा जाता है:

yoursmahboob

कोई भी द्विघात समीकरण या तो गुणनखंड विधि या सूत्र-विधि या हल-विधि (यदि मूल परिमेय हो) से हल किया जा सकता है।

1) गुणनखंड-विधि: यदि किसी द्विघात समीकरण को गुणनखंड विधि से हल करना हो तो सर्वप्रथम प्रदत्त समीकरण के गुणनखंडों को निकालें एवं बायें पक्ष को शून्य मानकर इन गुणनखंडों को अलग-अलग सरल करें। इस प्रकार चर का मान प्राप्त हो जाता है। उदाहरण के लिए, द्विघात समीकरण $x^2 - 5x + 6 = 0$ को हल करने के लिए सर्वप्रथम $x^2 - 5x + 6$ के गुणनखंडों को निकालते हैं।

$x^2 - 5x - 6$ के गुणनखंड $(x - 1)$ एवं $(x - 2)$ हैं।

इसलिए $(x - 3)(x - 2) = 0$

अब प्रत्येक खंड को शून्य मानकर सरल करें:

$(x - 3) = 0 \Rightarrow x = 3$

$(x - 2) = 0 \Rightarrow x = 2$

$\therefore$ चर के मान 3 एवं 2 हैं। हल हैं: $x = 3$ या $x = 2$

2) सूत्र-विधि: यदि किसी द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ को हल करना हो तो, निम्नलिखित सूत्र का इस्तेमाल किया जाता है:

$$x = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

धन एवं ऋण चिह्नों को अलग करने पर x के दो मान प्राप्त होते हैं। $b^2 - 4ac$ को विविक्तकर (discriminant) कहा जाता है। द्विघात समीकरण को हल करने से प्राप्त चर के दोनों मानों को समीकरण का मूल (roots of the equation) कहते हैं। इन मूलों को α एवं β से निर्दिष्ट किया जाता है।

पाया गया है कि द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के दोनों मूलों को योग $\frac{-b}{a}$ के बराबर होता है। अर्थात् $\alpha + \beta = \frac{-b}{a}$ एवं मूलों का गुणनफल $\frac{c}{a}$ के बराबर होता है

अर्थात् $\alpha \times \beta = \frac{c}{a}$

किसी द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के लिए

i) मूल बराबर होंगे यदि $b^2 = 4ac$

ii) मूल वास्तविक एवं असमान होंगे यदि $b^2 > 4ac$

iii) मूल अवास्तविक एवं असमान होंगे यदि $b^2 < 4ac$

yourshahboob

3) द्रुत-विधि (यदि मूल परिमेय हो): यदि द्विघात समीकरण $ax^2+bx+c=0$ के रूप में हो तो निम्नलिखित विधि द्वारा मूल निकाला जा सकता है।

पहला चरण: x^2 के गुणांक एवं अचर पद का गुणनफल प्राप्त करें।

यहाँ समीकरण है

$$ax^2+bx+c=0$$

$$a\times c = ac \quad \text{(गुणनफल)}$$

दूसरा चरण: 'ac' के ऐसे गुणनखंडों को निकालें जिनका योगफल x के गुणांक के बराबर हो।

माना कि 'ac' के अभीष्ट गुणनखंड p एवं q हैं।

$$ax^2+bx+c=0$$

$$a\times c$$

$$p \qquad q$$

तीसरा चरण: दूसरे चरण में प्राप्त गुणनखंडों को x^2 के गुणांक से विभाजित करें।

$$ax^2+bx+c=0$$

$$a\times c$$

$$p \qquad q$$

$$\downarrow \qquad \downarrow$$

$$\frac{p}{a} \qquad \frac{q}{a}$$

चौथा चरण: तीसरे चरण में प्राप्त मानों का चिह्न बदलें।

$$ax^2+bx+c=0$$

$$a\times c$$

$$p \qquad q$$

$$\downarrow \qquad \downarrow$$

$$\frac{p}{a} \qquad \frac{q}{a}$$

$$\downarrow \qquad \downarrow$$

$$-\frac{p}{a} \qquad \frac{q}{a}$$

इस प्रकार $\left(-\frac{p}{a}\right)$ एवं $\left(\frac{q}{a}\right)$ प्रदत्त समीकरण $ax^2+bx+c=0$ के मूल हैं।

yoursmahboob

हम उपर्युक्त विधि को उदाहरण के सहारे आसानी से समझ सकते हैं।

मान लिया कि समीकरण $10x^2 - x - 21$ का मूल निकालना है।

निम्नलिखित चरणों पर ध्यान दें।

पहला चरण: $10x^2 - x - 21$

$-21 \times 10 = -210$ [x^2 के गुणांक एवं अचर राशि में गुणा करें]

दूसरा चरण: 14 $\quad$ −15 [−210 के ऐसे गुणनखंडों को ज्ञात करें जिसका योगफल x के गुणांक के बराबर हो यानि (−1)

$14 \times (-15) = -210$ एवं $14 + (-15) = -1$]

तीसरा चरण: $\frac{14}{10} = \frac{7}{5}$ $\quad$ $\frac{-15}{10} = \frac{3}{2}$ [दूसरे चरण में प्राप्त गुणनखंडों में x^2 के गुणांक से भाग दें]

चौथा चरण: $\frac{-7}{5}$ $\quad$ $\frac{3}{2}$ [तीसरे चरण में प्राप्त मानों के चिह्नों को बदल दें]

इस प्रकार $\frac{-7}{5}$ एवं $\frac{3}{2}$ प्रदत्त समीकरण के मूल हैं।

साधित उदाहरण:

उदा. 1: $12x^2 - 25x - 117 = 0$ का मूल निकालें।

हल: $12x^2 - 25x - 117$

$12 \times (-117) \Rightarrow (-13 \times 3 \times 3 \times 2 \times 2 \times 3)$

52 $\quad$ 27

$\frac{52}{12} = \frac{13}{3}$ $\quad$ $\frac{-27}{12} = \frac{-9}{4}$

$\frac{-13}{3}$ $\quad$ $\frac{9}{4}$

$\therefore \frac{-13}{3}$ एवं $\frac{9}{4}$ प्रदत्त समीकरण के मूल हैं।

yoursmahboob

उदा. 2: $35x^2 + x - 12 = 0$ का मूल निकालें।

हल:

$$35x^2 + x - 12$$

$$35 \times (-12) \Rightarrow (-5 \times 7 \times 3 \times 4)$$

$$21 \qquad 20$$

$$\downarrow \qquad \downarrow$$

$$\frac{21}{35} = \frac{3}{5} \qquad \frac{-20}{35} = \frac{-4}{7}$$

$$\downarrow \qquad \downarrow$$

$$\frac{-3}{5} \qquad \frac{4}{7}$$

$\therefore \frac{-3}{5}$ एवं $\frac{4}{7}$ प्रदत्त समीकरण के हल हैं।

उदा. 3: $91x^2 + 20x + 1 = 0$ के मूल निकालें।

हल:

$$91x^2 + 20x + 1$$

$$91 \times 1 \Rightarrow (7 \times 13)$$

$$7 \qquad 13$$

$$\downarrow \qquad \downarrow$$

$$\frac{7}{91} = \frac{1}{13} \qquad \frac{13}{91} = \frac{1}{7}$$

$$\downarrow \qquad \downarrow$$

$$\frac{1}{13} \qquad \frac{-1}{7}$$

$\therefore$ प्रदत्त समीकरण के मूल हैं: $\frac{-1}{13}$ एवं $\frac{-1}{7}$

उदा. 4: I. $6x^2 - x - 35 = 0$

II. $6y^2 + 41y + 63 = 0$

द्विघात समीकरणों I एवं II के मूलों (roots) की तुलना करें।

निम्नलिखित में से और मान्य है:

1) $x > y$ 2) $x < y$ 3) $x \geq y$ 4) $x \leq y$ 5) $x = y$

yoursmahboob

हल: 3;

I. $6x^2 - x - 35 = 0$

$6 \times (-35)$

$-15 \quad 14$

$\downarrow \quad \downarrow$

$\frac{-15}{6} = \frac{-5}{2} \quad \frac{14}{6} = \frac{7}{3}$

$\downarrow \quad \downarrow$

$\frac{5}{2} \quad \frac{7}{3}$

II. $6y^2 + 41y + 63 = 0$

6×63

$27 \quad 14$

$\downarrow \quad \downarrow$

$\frac{27}{6} = \frac{9}{2} \quad \frac{14}{6} = \frac{7}{3}$

$\downarrow \quad \downarrow$

$\frac{-9}{2} \quad \frac{-7}{3}$

प्रदत्त द्विघात समीकरणों I एवं II के मूलों की तुलना करने पर हमें $x \geq y$ प्राप्त होता है। अतः सही उत्तर (3) है।

प्रदत्त मूलों के आधार पर द्विघात समीकरण का निर्माण: यदि द्विघात समीकरण के मूल दिए गए हों एवं उनके आधार पर द्विघात समीकरण का निर्माण करना हो तो निम्नलिखित सूत्र का इस्तेमाल किया जाता है,

समीकरण = $x^2 - x$ (मूलों का योग) + मूलों का गुणनफल = 0

उदाहरण के लिए, यदि प्रदत्त मूल 2 एवं 3 हों तो अभीष्ट समीकरण:

$x^2 - (3+2)x + 3 \times 2 = 0 \Rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0$

नोट:

i) द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के मूल एक दूसरे के व्युत्क्रम होंगे यदि $a = c$ हो।

ii) यदि किसी द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ का एक मूल शून्य हो तो $c = 0$

iii) यदि द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ का एक मूल दूसरे मूल का ऋणात्मक व्युत्क्रम हो तो $c = -a$

iv) यदि दोनों मूल शून्य के बराबर हों तो $b = 0$ एवं $c = 0$

v) यदि एक मूल अनन्त हो तो $a = 0$ और यदि दोनों ही मूल अनन्त हों तो $a = 0$ एवं $b = 0$

vi) यदि मूल परिमाण में समान हों पर चिह्न में विपरीत हों तो $b = 0$

vii) यदि दो द्विघात समीकरणों $ax^2 + bx + c = 0$ एवं $a_1x^2 + b_1x + c_1 = 0$ का एक मूल उभयनिष्ठ हो तो $(bc_1 - b_1c)(ab_1 - a_1b) = (ca_1 - c_1a)^2$

viii) यदि इनके दोनों ही मूल समान हों तो, $\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}$

yoursmartboob

साधित प्रश्न

उदा. 1: निम्नलिखित द्विघात समीकरणों के विविक्तकर (Discriminant) ज्ञात करें। समीकरणों के मूलों की प्रकृति भी बताएँ, सत्यापित करें

(i) $x^2 - 4x + 3 = 0$

(ii) $3x^2 + 4x - 3 = 0$

(iii) $5x^2 + 7x = 0$

(iv) $2x^2 - 6x + 7 = 0$

हल: (i) $x^2 - 4x + 3 = 0$ में; $a = 1, b = -4, c = 3$

$\therefore D = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 3 = 16 - 12$

$= 4 > 0$ एवं पूर्ण वर्ग भी है। इसलिए मूल (roots) भिन्न परिमेय संख्याएँ होंगी।

अब मूल $= \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \dfrac{-(-4) + \sqrt{4}}{2 \times 1}$

$= \dfrac{4 \pm 2}{2} = 2 + 1 = 3$ एवं 1

ये भिन्न परिमेय संख्याएँ हैं।

(ii) $3x^2 + 4x - 3 = 0$ में, $a = 3, b = 4, c = -3$

$\therefore d = b^2 - 4ac = (4)^2 - 4 \times 3(-3) = 16 + 36 = 52 > 0$

एवं पूर्ण वर्ग नहीं है इसलिए मूल भिन्न अपरिमेय संख्याएँ होंगी

अब मूल $\dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \dfrac{-4 \pm \sqrt{52}}{2 \times 3} = \dfrac{-4 \pm 2\sqrt{13}}{2 \times 3}$

$= \dfrac{-2 \pm \sqrt{13}}{3} = \dfrac{4 + \sqrt{13}}{3}$ एवं $\dfrac{-4 - \sqrt{13}}{3}$

(iii) यहाँ $a = -5, b = 7, c = 0$

$\therefore D = b^2 - 4ac = (7)^2 - 49 > 0$ एवं एक पूर्ण वर्ग भी है। इसलिए मूल भिन्न परिमेय संख्याएँ होंगी।

अब, मूल $= \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \dfrac{-7 \pm \sqrt{49}}{2 \times (-5)} = \dfrac{-7 \pm 7}{-10}$

$= \dfrac{0}{-10}$ एवं $\dfrac{-14}{-10}$ अर्थात् 0 एवं $\dfrac{7}{5}$

चूँकि यहाँ $c = 0$ है, इसलिए हम इस समीकरण को निम्नलिखित तरीके से आसानी से हल कर सकते हैं।

yoursmahboob

$-5x^2 + 7x = 0$ या, $x(-5x + 7) = 0$

$\Rightarrow$ या तो $x = 0$ या $-5x + 7 = 0$

$\Rightarrow 5x = 7 \rightarrow x = \frac{7}{5}$

अतः, हमें $x = 0$ एवं $\frac{7}{5}$ प्राप्त होता है।

(iv) यहाँ $a = 2, b = -6, c = 7$

$\therefore D = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \times 2 \times 7 = 36 - 56 = -20 < 0$

इसलिए, मूल काल्पनिक होंगे।

अब, मूल $= \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{-20}}{2 \times 2}$

$= \frac{6 \pm \sqrt{5}i}{2 \times 2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}i}{2}$

$= \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}i$ एवं $\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}i$

उदा. 2: एक द्विघात समीकरण बनाएँ, जिसके मूल हैं:

(i) 3 एवं −5 (ii) 2 एवं 7 तथा इनको सत्यापित करें।

हल: (i) द्विघात समीकरण होगा:

x^2 − मूलों का योग x + मूलों का गुणनफल = 0

या, $x^2 - \{3 + (-5)\} \times x + 3 \times (-5) = 0$

या $x^2 - (-2)x + (-15) = 0$

या, $x^2 + 2x - 15 = 0$

सत्यापन: $D = 4 + 60 = 64$

$\therefore$ मूल $= \frac{-2 \pm \sqrt{64}}{2 \times 1} = \frac{2 \pm 8}{2} = -1 \pm 4$

अर्थात् 3 एवं (−5)

(ii) $x^2 - (2 + 7) \times x + 2 \times 7 = 0$ या, $x^2 - 9x + 14 = 0$

सत्यापन: $D = 81 - 56 = 25$

$\therefore$ मूल $= \frac{-(-9) \pm \sqrt{25}}{2 \times 1} = \frac{9 \pm 5}{2} = \frac{14}{2}$ एवं $\frac{4}{2} = 7$ एवं 2

उदा. 3: (i) यदि किसी समीकरण $x^2 - 19x + 88 = 0$ का एक मूल 8 है, तो उसका दूसरा मूल ज्ञात करें।

yousufmahboob

(ii) यदि किसी समीकरण $4x^2 - 27x + 18 = 0$ का एक मूल 6 हो तो उसका दूसरा मूल ज्ञात करें।

हल: (i) मूलों का गुणनफल $= \frac{c}{a} = \frac{88}{1} = 88$

$\therefore$ दूसरा मूल $= \frac{88}{\text{प्रदत्त मूल अर्थात } 8} = 11$

अथवा,

मूलों का योग $= -\frac{b}{a} = \frac{-19}{1} = 19$

$\therefore$ दूसरा मूल $= 19 - 8 = 11$

(ii) अभीष्ट दूसरा मूल

$= \left(\text{मूलों का योग} = -\frac{b}{a} = \frac{27}{4}\right) - \text{प्रदत्त मूल } (-6) \text{ अर्थात } \frac{27}{4} - 6 = \frac{3}{4}$

उदा. 4: निम्नलिखित समीकरणों के मूल ज्ञात करें।

(i) $2x^2 + 3x - 5 = 0$ (ii) $x^2 - 8x + 7 = 0$

नोट: जब $a + b + c = 0$ हो तो उनका एक मूल हमेशा 1 होगा।

हल: यहाँ $a + b + c = 2 + 3 + (-5) = 0$

इसलिए, समीकरण $2x^2 + 3x - 5 = 0$ का एक मूल 1 होगा

$\therefore$ दूसरा मूल = मूलों का योग − एक मूल $= -\frac{3}{2} - 1 = -\frac{5}{2}$

इसलिए अभीष्ट मूल = 1 एवं $-\frac{5}{2}$

उदा. 5: 600 कि.मी. की यात्रा में एक मोटर बाइक, साइकिल से एक घंटे में 20 कि. मी. ज्यादा तेज चलती है। साइकिल मोटर-बाइक की तुलना में यात्रा पूरी करने के लिए 15 घंटा ज्यादा लेती है। उनकी गति क्या है?

हल: माना कि साइकिल की गति = x कि. मी./घंटा

$\therefore$ प्रश्नानुसार, मोटर-बाइक की गति = $(x + 20)$ कि. मी./घंटा

साइकिल के द्वारा लिया गया समय $= \frac{600}{x}$ एवं

मोटर-बाइक के द्वारा लिया गया समय

$= \frac{600}{x + 20}$ − साइकिल के द्वारा लिया गया समय से 15 घंटे कम है।

yoursmahboob

अर्थात्, $\frac{600}{x+200} = \frac{600}{x} - 15$

या, $\frac{40}{x+20} = \frac{40}{x} - 1 = \frac{40-x}{x}$

या, $40x = 40(x+20) - x(x+20)$

या, $40x = 40x + 800 - x^2 - 20x$

या, $x^2 + 20x - 800 = 0$

$$\therefore x = \frac{-20 \pm \sqrt{(20)^2 - 4\times1\times(-800)}}{2\times1} = \frac{-20 \pm \sqrt{400+3200}}{2}$$

$$= \frac{-20 \pm 60}{2} = -10 \pm 30 = 20 \text{ या } -40$$

चूँकि x, साइकिल की गति है, ऋणात्मक नहीं हो सकता है। इसलिए, $x = -40$ स्वीकार्य नहीं है।

$\therefore x$, साइकिल की गति = 20 कि. मी. प्रति घंटा एवं मोटर बाइक की गति

$x + 20 = 20 + 20 = 40$ कि. मी./घंटा

उदा. 6: $3^{2x+1} - 3^x = 3^{x+3} - 3^2$ समीकरण को हल करें।

हल: $3^{2x} \times 3 - 3^x = 3^x \times 3^3 - 3^2$

या, $3(3^x)^2 - 3^x = 27 \times 3^x - 9$

या, $3m^2 - m = 27m - 9$; जहाँ $m = 3^x$

या, $3m^2 - 28m + 9 = 0$

$$\therefore m = \frac{28 \pm \sqrt{(28)^2 - 4\times3\times9}}{2\times3} = \frac{28 \pm \sqrt{676}}{2\times3}$$

$$= \frac{28 \pm 26}{2\times3} = \frac{14 \pm 13}{3} = 9, \frac{1}{3}$$

जब $m = 9$, तो $3^x = 9 = 3^2$ $\therefore x = 2$ एवं

जब $m = \frac{1}{3}$, तो $3^x = \frac{1}{3} = 3^{-1}$, $\therefore x = -1$

उदा. 7: m के किस मान के लिए, समीकरण $-9x^2 + 12x - m = 0$ एक रैखिक व्यंजक (linear expression) का पूर्ण वर्ग हो सकता है?

हल: एक रैखिक व्यंजक $ax + b = 0$ $(a \neq 0)$ के रूप में होता है; a एवं b अचर होता है।

एक द्विघात समीकरण, जिसके मूल α एवं β हों, $(x-\alpha)(x-\beta) = 0$ होता है।

yoursmahboob

यदि $\alpha = \beta$ तो समीकरण $(x-\alpha)^2$ हो जाता है।

यदि किसी द्विघात समीकरण के दोनों मूल बराबर हों तो, $D = 0$ होता है,

$\therefore$ प्रदत्त समीकरण $9x^2 - 12x - m = 0$ एक रैखिक व्यंजक का पूर्ण वर्ग हो सकता है, यदि $D = 0$ या $b^2 - 4ac = (12)^2 - 4 \times 4(-9)(-m) = 0$

या, $144 - 36m = 0 \quad \therefore m = \frac{144}{36} = 4$

सत्यापन: यदि समीकरण $-9x^2 + 12x - m = 0$ में m का मान 4 रखते हैं तो समीकरण $-9x^2 + 12x - 4 = 0$ हो जाता है।

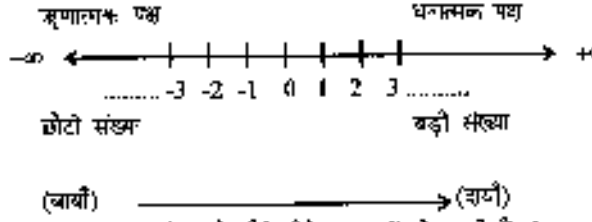
या, $9x^2 - 12x + 4 = 0$ या, $(3x - 2)^2 = 0$

स्पष्टतः $(3x - 2)$ एक $(ax + b)$ के रूप का रैखिक व्यंजक है। यहाँ $a = 3$ एवं $b = -2$ है।

द्विघात व्यंजक (Quadratic Expression):

एक व्यंजक जो कि $ax^2 + bx + c$ के रूप में हो जहाँ, $a \neq 0$ एवं a, b, c सभी वास्तविक संख्याएँ हैं तो उस व्यंजक को x में द्विघात व्यंजक कहा जाता है. व्यंजक $ax^2 + bx + c$ के साथ का समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ होता है।

द्विघात व्यंजक के चिह्न निर्धारण का वर्णन करने से पहले हम वास्तविक संख्या रेखा (real number line) की परिकल्पना का अध्ययन करेंगे



यह एक वास्तविक संख्या रेखा है। जैसे जैसे हम दायीं ओर बढ़ते हैं संख्या का मान बढ़ता जाता है। इसलिए $2 < 3, -3 < -2$, (वास्तविक संख्या रेखा) पर चूँकि -2, -3 के, दायीं ओर है इसलिए -2, -3 से बड़ा है।

इस प्रकार, $-2 < 0, \quad 2 < 1, \quad 1.5 < -0.5, -1.999 > 2$

द्विघात व्यंजक का चिह्न-निर्धारण (Sign-scheme)

नोट: 1. द्विघात व्यंजक का चिह्न-निर्धारण हमेशा x के वास्तविक मानों के लिए किया जाता है। हम दो काल्पनिक संख्याओं की तुलना नहीं कर सकते हैं।

इसलिए, यह कहना कि $3i > 2i$ या, $4i < 9i$ बिल्कुल गलत होगा।

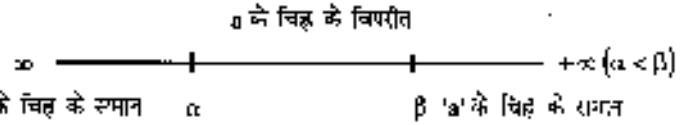
माना कि किसी द्विघात व्यंजक $ax^2 + bx + c = y$ (मान लिया) के साथ की द्विघात

yoursmanhoob

समीकरण $ax^2+bx+c=0$ के मूल α एवं β हैं। तो x के सभी वास्तविक मानों के लिए;

स्थिति I: यदि α एवं β वास्तविक एवं बराबर या दोनों काल्पनिक अर्थात् $D \le 0$ हों तो y अर्थात् ax^2+bx+c का चिह्न 'a' के चिह्न के समान यानि x^2 के गुणांक के समान होगा। यानि, यदि $D \le 0$ एवं 'a' धनात्मक है तो y भी हमेशा धनात्मक होगा तथा यदि 'a' ऋणात्मक है तो y भी हमेशा ऋणात्मक होगा।

स्थिति II: यदि α एवं β वास्तविक एवं असमान हों अर्थात् $D>0$ हो तो y अर्थात् ax^2+bx+c का चिह्न निर्धारण निम्नलिखित होगा:



उदा. I: दिखाइए व्यंजक x^2-4x+7 का चिह्न निर्धारण करें।

हल: x^2-4x+7 के साथ का समीकरण $x^2-4x-7=0$ है।

$D=(-4)^2-4\times1\times7=16-28=-12<0$ अर्थात् मूल काल्पनिक हैं।

यहाँ $a=1>0$। इसलिए x के सभी वास्तविक मानों के लिए प्रदत्त व्यंजक x^2-4x+7 धनात्मक होगा।

नोट: x के सभी वास्तविक मानों ($x=0.2, 32.07, \frac{3}{8}, -4, -32.07, 2-\sqrt{5}$ इत्यादि हो सकता है) के लिए, $x^2-4x+7>0$

आप $x=$ कोई भी वास्तविक संख्या रखकर x^2-4x+7 की सत्यता की जाँच कर सकते हैं।

माना कि, $x=-4.2$ तो x^2-4x+7

$$=(-4.2)^2-4\times(-4.2)+7=17.64+16.8+7>0$$

जब, $x=0.07$ हो तो $x^2-4x+7=(0.07)^2-4\times0.07+7$

$$=0.07(0.07-4)+7=0.07\times(-3.93)+7=7-0.2751>0$$

जब $x=2-\sqrt{5}$ हो तो x^2-4x+7

$$=(2-\sqrt{5})^2-4(2-\sqrt{5})+7$$

$$=4+5-4\sqrt{5}-8+4\sqrt{5}+7$$

$$=1+7>0$$

yoursmahboob

2. यहाँ, $D = -12 < 0$, अर्थात् मूल काल्पनिक हैं।

$$\text{मूल} = \frac{b \pm \sqrt{D}}{2a} \quad \text{अर्थात्} = \frac{(-4) \pm \sqrt{-12}}{2 \times 1}$$

$$= \frac{4 \pm 2\sqrt{3}i}{2} = 2 \pm \sqrt{3}i$$

इसलिए यदि $x = 2 + \sqrt{3}i$ या $2 - \sqrt{3}i$ रखने पर, प्रदत्त व्यंजक शून्य हो जाता है तो व्यंजक धनात्मक या ऋणात्मक नहीं हो सकता है।

जब $x = 2 - \sqrt{3}i$, तो $x^2 - 4x + 7$

$$= (2 + \sqrt{3}i)^2 - 4(2 + \sqrt{3}i) + 7$$

$$= 4 + 3i^2 + 4 + 3i - 8 - 4\sqrt{3}i - 7$$

$$= 4 + 3 \times (-1) - 8 + 7 \quad (\because i^2 = -1)$$

$$= 4 + 3 - 1 = 0$$

उसी प्रकार, जब $x = 2 + \sqrt{3}i$ हो तो $x^2 - 4x + 7 = 0$

3. x के काल्पनिक मानों के लिए व्यंजक का चिह्न-निर्धारण नहीं किया जा सकता है। यदि हम प्रदत्त व्यंजक में $x = 4i$ रखते हैं तो

$$x^2 - 4x + 7 = (4i)^2 - 4(4i) + 7$$

$$= 16i^2 - 16i + 7$$

$$= 16 \times (-1) - 16i + 7$$

$$= -16 - 16i + 7 = -9 - 16i$$

प्राप्त होता है जो कि काल्पनिक है और इसकी किसी भी काल्पनिक या वास्तविक संख्या से तुलना नहीं की जा सकती है। इसलिए यहाँ पर मूल $2 \pm \sqrt{3}i$ (जो कि काल्पनिक हैं) को छोड़कर व्यंजक के चिह्न-निर्धारण का उद्देश्य अर्थहीन हो जाता है।

उदा. 2: x के किन मानों के लिए $9x^2 + 42x - 49 > 0$ है?

हल: इसके साथ का समीकरण है: $9x^2 + 42x + 49 = 0$

$$D = (42)^2 - 4 \times 9 \times 49 = 1764 - 1764 = 0$$

यहाँ x^2 का गुणांक $= a = 9 > 0$

इसलिए, x के सभी वास्तविक मानों के लिए $9x^2 + 42x + 49 > 0$
अर्थात् प्रदत्त व्यंजक हमेशा धनात्मक होगा।

उदा. 3: ज्ञात करें कि प्रदत्त व्यंजक $-x^2 + 3x + 28$, x के किन-किन मानों के लिए धनात्मक, ऋणात्मक या शून्य के बराबर है?

yoursmahboob

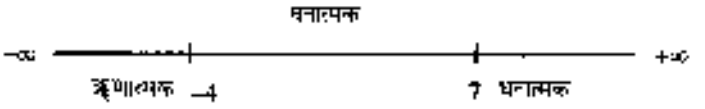
हल: दत्त का समीकरण $-x^2+3x+28=0$ है।

$D=3^2-4\times(-1)\times 28=9+112=121>0$

समीकरण के मूल $=\dfrac{3\pm\sqrt{121}}{2\times(-1)}=\dfrac{-3\pm 11}{2}=\dfrac{8}{-2},\dfrac{-14}{-2}=-4,7$

यहाँ x^2 का गुणांक है $-1<0$

इसलिए प्रदत्त व्यंजक का चिह्न निर्धारण (Sign-scheme) निम्नलिखित है



अर्थात्,

स्थिति (i): यदि $-4<x<7, -x^2+3x+28>0$

स्थिति (ii) यदि $x<-4$ या $x>7, -x^2+3x+28<0$

स्थिति (iii) यदि $x=-4$ या $x=7, -x^2+3x+28=0$

नोट: उपर्युक्त तीनों स्थितियों (i) एवं (ii) की सत्यता की जाँच, x के कोई मान जिसमें कि गणना में आसानी हो, को रखकर की जा सकती है।

यदि $x=0, -4<0<7$ हो तो

$-x^2+3x+28=0+0+28=28>0$

यदि $x=-5, -5<-4$, हो तो

$-x^2-3x+28=-25-15+28=-12<0$

यदि $x=10, 10>7$ हो तो

$-x^2+3x+28=-100+30+28=-42<0$

उदा. 4: x के मानों के किस विस्तार (range) के लिए व्यंजक $2x^2-4x-7$ अ-धनात्मक (non-positive) है?

हल: समीकरण $\Rightarrow 2x^2-4x-7=0$

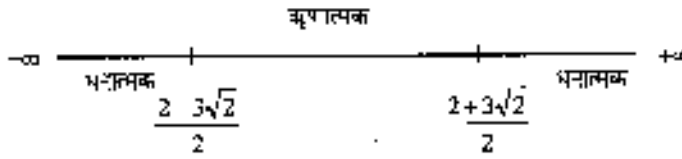
$D=(-4)^2-4\times 2\times(-7)=16+56=72>0$

यहाँ x^2 का गुणांक 2 है जो कि $2>0$

मूल $=\dfrac{-(-4)\pm\sqrt{72}}{2\times 2}=\dfrac{4\pm 6\sqrt{2}}{4}=\dfrac{2\pm 3\sqrt{2}}{2}$

yoursmahboob

इसलिए प्रदत्त व्यंजक $2x^2-4x-7$ का चिह्न निर्धारण निम्नलिखित है:



$x=\frac{2\pm3\sqrt{2}}{2}$ के लिए, प्रदत्त व्यंजक शून्य होगा

$\frac{2-3\sqrt{2}}{2}<x<\frac{2+3\sqrt{2}}{2}$ के लिए, प्रदत्त व्यंजक ऋणात्मक है। शेष सभी मानों के लिए व्यंजक धनात्मक है।

इस प्रकार, $\frac{2-3\sqrt{2}}{2}\le x\le\frac{2+3\sqrt{2}}{2}$ के लिए प्रदत्त व्यंजक अ-धनात्मक (non-positive) है; अर्थात् व्यंजक या तो शून्य है या ऋणात्मक है।

नोट: यदि आप चिह्न-निर्धारण (sign scheme) की जाँच करना चाहते हैं तो $\sqrt{2}$ का सन्निकट मान रखकर आगे बढ़ें। उदाहरण के लिए $\sqrt{2}=1.4$ (सन्निकट) लें।

अब, मूल $=\frac{2\pm3\times1.4}{2}=1+3\times0.7=1\pm2.1=3.1$ एवं -1.1

चूँकि मूल को सन्निकटन के द्वारा ज्ञात किया गया है इसलिए चिह्न-निर्धारण (sign-scheme) की जाँच करते समय ऐसे मानों को जो मूल के नजदीक हों नहीं लेने चाहिए।

$x=1$ रखने पर, $\left[\because \frac{2-3\sqrt{2}}{2}<1<\frac{2+3\sqrt{2}}{2}\right]$

$2x^2-4x-7=2-4-7=-9<0$

$x=5$ रखने पर, $2x^2-4x-7=2\times25-20-7=23>0$

$x=-2$ रखने पर $2x^2-4x-7=2\times4+8-7=9>0$

इस प्रकार हम चिह्न निर्धारण (sign-scheme) को सही पाते हैं।

उदा. 5: निम्नलिखित में से किसके लिए असमीकरण (inequality) $b^2+8b\ge9b-14$ सही है?

(i) $b\ge5, b\le-5$ (ii) $b\ge5, b\le4$ (iii) $b\ge6, b\le-6$

(iv) $b\ge4, b\le-4$ (v) $b>6, b<4$

प्रदत्त असमीकरण $b^2+8b\ge9b+14$ है।

yoursmahboob

अर्थात् $b^2 + 8b - 9b - 14 \geq 0$

या $b^2 - b - 14 \geq 0$

समीकरण $b^2 - b - 14 = 0$ के लिए

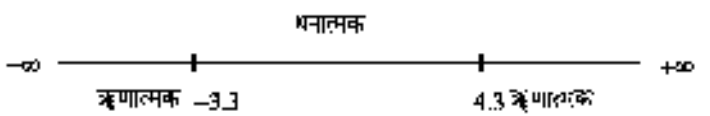
$D = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-14) = 1 + 56 = 57 > 0$

यहाँ b^2 का गुणांक $= 1 > 0$ एवं

मूल $= \dfrac{-(-1) \pm \sqrt{57}}{2 \times 1} = \dfrac{1 \pm 7.6}{2} \left[\sqrt{57} = 7.6\right]$ (लगभग)

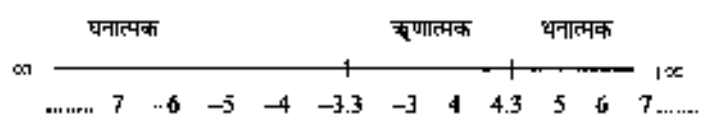
$= 4.3$ एवं -3.3

इसलिए व्यंजक $b^2 - b - 14$ के लिए चिह्न-निर्धारण (sign-scheme) निम्नलिखित है।



इस प्रकार, $b < 3.3$ या $b \geq 4.3$ के लिए, $b^2 - b - 14 \geq 0$

सभी विकल्प को ज्ञात करने के लिए हम सभी विकल्पों को चिह्न-निर्धारण (sign-scheme) की वास्तविक संख्या रेखा पर निम्नलिखित रूप से रखते हैं।



अब हम प्रत्येक विकल्प को एक एक करके सुपेलित करते हैं। स्पष्टतः विकल्प (i) सही है। विकल्प (ii) भी सही है। इन दोनों विकल्पों के पर्यवेक्षण से स्पष्ट होता है कि विकल्प (i) की अपेक्षा विकल्प (ii) ज्यादा सटीक है। यद्यपि विकल्प (iii) भी सही है। परंतु यह विकल्प (ii) के करीब नहीं है। विकल्प (iv) एवं (v) सही नहीं हैं। इसलिए विकल्प (ii) सही उत्तर है।

उपरोक्त परिचर्चा का सारांश (Summary of the above discussions)

असमीकरण (inequality) $ax^2 + bx + c \leq 0$ या $a_1x^2 + b_1x + c_1 \geq 0$ का हल चिह्न निर्धारण (Sign scheme) के दो रूपों में स्थित है।

yoursmaboob

हल (अर्थात् x के मान) या तो इनके मूलों (अर्थात् $\alpha \le x \le \beta$) के बीच या इनके मूलों के बाहर (अर्थात् $x \le \alpha$ या $x \ge \beta$) स्थित हैं। अब, प्रश्न यह उठता है कि किस स्थिति में x के मान इनके मूलों के बीच स्थित होंगे तथा किस स्थिति में इनके मूलों के बाहर।

निम्नलिखित दो बिन्दुओं को याद रखें तथा उपरोक्त सभी परिचर्चाओं को भूल जाएँ। उपर्युक्त दो असमीकरणों के लिए, जहाँ a तथा a_1 धनात्मक हैं।

(i) $ax^2 + bx + c \le 0 \Rightarrow \alpha < x < \beta$

(ii) $a_1x^2 + b_1x + c_1 \ge 0 \rightarrow x \le \alpha$ या $x \ge \beta$

नोट : उपरोक्त बिन्दुओं को याद रखने के लिए, ध्यान दें कि जब असमीकरण शून्य से कम होगा (less than zero), तो x के मान का प्रसार (अर्थात् $\alpha \le x \le \beta$) छोटा होगा तथा जब असमीकरण शून्य से ज्यादा (more than zero) होगा, तो x के मान का प्रसार बड़ा (अर्थात् $-\infty \le x \le \alpha$ या $\beta \le x \le -\infty$) होगा।

अब हम उपर्युक्त उदाहरणों की परिचर्चा फिर से करेंगे।

उदा. 4 लें: $2x^2 - 4x - 7 \le 0$ के लिए x का प्रसार ज्ञात करें।

इससे संबंधित समीकरण है, $2x^2 - 4x - 7 = 0$ तथा इनके मूल हैं $\frac{2 \pm 3\sqrt{2}}{2}$

यहाँ हम देखते हैं कि असमीकरण शून्य से कम है, इसलिए x का प्रसार इनके मूलों के बीच स्थित होगा।

अतः, $\frac{2 - 3\sqrt{2}}{2} \le x \le \frac{2 + 3\sqrt{2}}{2}$

उदा. 5 लें: $b^2 + 8b \ge 9b + 14$

$\Rightarrow b^2 - b - 14 \ge 0$

$\Rightarrow b = -3.3, 4.3$

चूँकि असमीकरण शून्य से अधिक है, इसलिए b के मान का प्रसार बड़ा होगा।

$\Rightarrow b \le -3.3$ या $b \ge 4.3$

अतः निकटतम उत्तर है (ii), अर्थात् $b \ge 5$, $b \le -4$

yoursmahboob

उदा. 3 लें : $-x^2+3x+28$

संगत (corresponding) समीकरण के मान हैं : - 4 एवं 7

स्थिति I: जब, $-x^2+3x+28 \le 0$:

x^2 के ऋणात्मक चिह्न को बदल दें, अर्थात् (-1) से गुणा करें

तो, $x^2-3x-28>0$

अब, चूँकि असमीकरण शून्य से ज्यादा है, x के मान का प्रसार (range) बड़ा होगा। अर्थात् $x \le -4,\ x \ge 7$

स्थिति II: जब, $-x^2+3x+28 \ge 0$

तो, $x^2-3x-28<0$

चूँकि असमीकरण शून्य से छोटा है, x के मान का प्रसार (range) छोटा होगा।

अर्थात् $-4 \le x \le 7$.

नोट : उपरोक्त स्थिति में असमीकरण के मूल चिह्न का अनुसरण नहीं करें; सर्वप्रथम x^2 के गुणांक (coefficient) को धनात्मक बनाएँ तथा तदनुसार असमीकरण के चिह्न को परिवर्तित करें।

उदा. 6: यदि x तथा y एक अचर है तो सिद्ध करें कि xy महत्तम तब होगा जब x = y होगा

हल: $xy=\left(\frac{x+y}{2}\right)^2-\left(\frac{x-y}{2}\right)^2$

हम जानते हैं कि किसी भी वास्तविक संख्या का वर्ग ≥ 0 होता है।

इसलिए, $\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 \ge 0$ एवं $\left(\frac{x-y}{2}\right)^2 \ge 0$

चूँकि $(x+y)$ अचर है, इसलिए xy महत्तम तब होगा जब $\left(\frac{x-y}{2}\right)^2=0$

या, $\frac{x-y}{2}=0$, या $x-y=0$ या, x = y

उदा. 7: निम्नलिखित में से P का कौन-सा मान असमीकरण (inequality) $P(P-3)<4P-12$ को संतुष्ट करता है?

1) $P>4$ या $P<13$
2) $24 \le P < 71$
3) $P>13; P<51$
4) $3<P<4$
5) $P=4,\ P=+3$

yoursmahboob

हल: $P(P-3) < 4(P-3); P(P-3) - 4(P-3) < 0$

$(P-3)(P-4) < 0$

इसका अर्थ यह है कि जब $(P-3) > 0$ हो तो $(P-4) < 0$ ——— (i)

या, जब $(P-3) < 0$ हो तो $(P-4) > 0$ ——————— (ii)

(i) से: $P > 3$ एवं $P < 4$

$\therefore 3 < P < 4$

(ii) से: $P < 3$ एवं $P > 4$ जो कि विकल्प में नहीं है। इसलिए (i) से हमारा उत्तर (4) है।

उदा. 8: निम्नलिखित में से n के किन मानों के लिए असमीकरण (inequality) $3n^2 - 18n + 24 > 0$ संतुष्ट होता है?

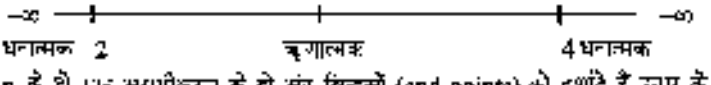
(1) $n < 2$ एवं $n > 4$ (2) $2 < n < 4$ (3) $n > 2$

(4) $n > 4$ (5) इनमें से कोई नहीं

हल: प्रदत्त असमीकरण का समीकरण $\Rightarrow 3n^2 - 18n + 24 = 0$

$\Rightarrow 3(n-2)(n-4) = 0$ $\therefore n = 2$ एवं 4

वास्तविक संख्या रेखा का चिह्न निर्धारण (sign scheme)



n के ये मान असमीकरण के दो अंत बिन्दुओं (end-points) को दर्शाते हैं ऊपर के अक्ष (axis) पर, हमारे पास तीन प्रसर (ranges) हैं जिसमें n का मान विचरण करता है।

(i) $n < 2$ (ii) $2 < n < 4$ (iii) $n > 4$

n का मान 2 से कम रखें। माना कि $n = 0$ है तो $3n^2 - 18n + 24$ $= 0 - 0 + 24 = 24 > 0$ जो असमीकरण को संतुष्ट करता है। इसलिए $n < 2$ मान्य मान है।

फिर, n का मान 2 एवं 4 के बीच रखें। माना कि $n = 3$ है तो $3n^2 - 18n + 24$ $= 27 - 54 + 24 = -3 < 0$ जो प्रदत्त असमीकरण को संतुष्ट नहीं करता है इसलिए $2 < n < 4$ मान्य मान नहीं है।

पुनः n का मान 4 से बड़ा रखें। माना कि $n = 5$ है तो $3n^2 - 18n + 24$ $= 75 - 90 + 24 = +9 > 0$ जो असमीकरण को संतुष्ट करता है। इसलिए $n > 4$ मान्य मान है अतः उत्तर (1) होगा।

नोट: 1. $(3n-6)(n-4) > 0$ असमीकरण है:

या, $3(n-2)(n-4) > 0$ सत्य होगा जब

$(n-2)$ एवं $(n-4)$ दोनों या तो धनात्मक होगा या ऋणात्मक।

जब दोनों धनात्मक है,

yoursmahboob

$n-2>0$ एवं $n-4>0$

या, $n>2$ एवं $n>4 \Rightarrow n>4$

जब दोनों ऋणात्मक हैं,

$(n-2)<0$ एवं $(n-4)<0$

$\Rightarrow n<2$ एवं $n<4 \Rightarrow n<2$

$\therefore$ अभीष्ट मान $n<2$ एवं $n>4$

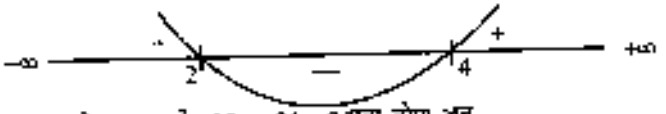
2. वेवी-कर्व विधि द्वारा हल करें।

विस्तार के लिए अगला वर्ग (section) वेवी कर्व विधि (Wavy-Curve Method) को देखें।

असमीकरण $\Rightarrow 3n^2-18n+24>0$

$\therefore$ समीकरण $\Rightarrow 3n^2-18n+24=0$

$3(n-2)(n-4)=0 \Rightarrow n=2$ एवं 4



$\therefore$ असमीकरण $3n^2-18n+24>0$ सत्य होगा जब,

$n<3$ एवं $n>4$

अतः सही उत्तर (1) है।

उदा. 9: x का निम्नलिखित में से कौन-सा मान असमीकरण $2x(x-2)<x+12$ को संतुष्ट करता है?

1) $-\frac{3}{2}<x<4$ 2) $-3<2x<4$ 3) $x>4, x<-\frac{3}{2}$

4) $x>4; x<\frac{3}{2}$ 5) इनमें से कोई नहीं

हल: 2; $2x(x-2)<x+12$

या, $2x^2-4x-x-12<0$

या, $2x^2-5x-12<0$

या, $2x^2-8x+3x-12<0$

या, $2x(x-4)+3(x-4)<0$

या, $(x-4)(2x+3)<0$

उपर्युक्त असमीकरण के लिए दो स्थितियाँ हैं।

स्थिति: I $x-4<0$ एवं $3x+3>0$

$\Rightarrow x<4$ एवं $x>-\frac{3}{2}$

yoursmahboob

या, $-\frac{3}{2} < x < 4$

स्थिति II. $x - 4 > 0$ एवं $2x + 3 < 0$

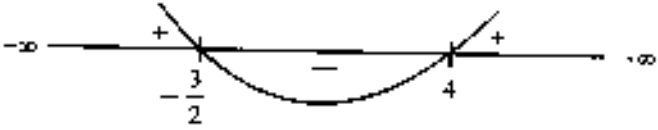
या, $x > 4$ एवं $x > -\frac{3}{2}$

यह संभव नहीं है। यद्यपि यह विकल्प (3) में दिया हुआ है परंतु असमीकरण $x > 0$ एवं $x < -\frac{3}{2}$ एक ही समय में संभव नहीं है। इसलिए, केवल स्थिति I से सही उत्तर (1) है।

वैकल्पिक विधि (ग्रेफी-कर्व विधि):

समीकरण $\Rightarrow 2x^2 - 5x - 12 = 0$

$\Rightarrow (x-4)(2x+3) = 0 \Rightarrow x = 4$ एवं $\frac{3}{2}$



$\therefore$ असमीकरण $2x(x-2) < x + 12$ के लिए

x का मान $= -\frac{3}{2} < x < 4$

$\therefore$ अभीष्ट उत्तर (1) होगा।

नोट: यदि आप द्विघात समीकरण के बारे में नहीं जानते हैं तो आप दिए गए प्रत्येक विकल्प से x का सटीक मान असमीकरण में रखकर उसकी सत्यता की जाँच कर सकते हैं। जो कोई भी असमीकरण को संतुष्ट करता है वही हमारा उत्तर होता है।

उदा. (10–14): प्रत्येक प्रश्न में एक या एक से अधिक समीकरण दिए गए हैं। इसके आधार पर तुम्हें p एवं q के बीच के संबंध को ज्ञात करना है।

उत्तर (1) होगा यदि $p = q$

उत्तर (2) होगा यदि $p > q$

उत्तर (3) होगा यदि $q > p$

उत्तर (4) होगा यदि $p \geq q$ एवं

उत्तर (5) होगा यदि $q > p$

10. I. $2p + \frac{5}{2} = p + 3$ II. $q - \frac{5}{2} = 1$

11. I. $\frac{p}{2} - \frac{p}{3} = 1$ II. $q^2 + 36 = 12q$

yoursmahboob

12. I. $\frac{p}{5}-\frac{2}{7}=0$ II. q^2-2q+1

13. I. $p^2+3=12$ II. $3q-5=1+q$

14. I. $7p^2-8p+1=0$ II. $\frac{5q}{2}-\frac{q}{4}=\frac{1}{8}$

हल:

10. 3: I. $\rightarrow 2p-p=3-\frac{5}{2}\Rightarrow p=\frac{1}{2}$;

II. $\rightarrow q=1+\frac{5}{2}=3.5$

$\therefore q>p$

11. 1; I. $\rightarrow \frac{p}{2}-\frac{p}{3}=1\rightarrow \frac{p}{6}=1$ $\therefore p=6$

II. $\rightarrow q^2-12q+36=0\Rightarrow (q-6)^2=0$

$\therefore q=6$

$\therefore p=q$

12. 2; I. $\rightarrow \frac{p}{5}=\frac{2}{7}\rightarrow p=\frac{10}{7}$

II. $\rightarrow q^2-2q+1=0\Rightarrow (q-1)^2=0$ $\therefore q=1$

$\therefore p>q$

13. 5; I. $\rightarrow p^2=9$ $\therefore p=\pm 3$

II. $\rightarrow 3q-q=1+5$ $\therefore q=3$ $\therefore q>p$

14. 2; I. $\rightarrow p=\frac{8\pm\sqrt{64-28}}{14}=\frac{8\pm 6}{14}=\frac{2}{14},\frac{14}{14}=\frac{1}{7},1$

II. $\rightarrow \frac{7q}{4}=\frac{1}{8}$ या $q=\frac{1}{14}$

$\therefore q<p$

उदा. (15–19): प्रत्येक प्रश्न में एक या एक से अधिक समीकरण दिया गया है इसके आधार पर आपको p एवं q के बीच के संबंध को ज्ञात करना है:

उत्तर (1) होगा यदि $p<q$

उत्तर (2) होगा यदि $p>q$

उत्तर (3) होगा यदि $q>p$

उत्तर (4) होगा यदि $p\geq q$ एवं

उत्तर (5) होगा यदि $q\geq p$

yourmahboob

15. (i) $\frac{5}{28}\times\frac{9}{8}p=\frac{15}{14}\times\frac{13}{16}q$

16. (i) $p-7=0$ (ii) $3q^2-10q+7=0$

17. (i) $4p^2=16$ (ii) $q^2-10q+25=0$

18. (i) $4p^2-5p+1=0$ (ii) $q^2-2q+1=0$

19. (i) $q^2-11q+30=0$ (ii) $2p^2-7p+6=0$

हल:

15. 2; (i) $\frac{5}{28}\times\frac{9}{8}p=\frac{15}{14}\times\frac{13}{16}q$ या, $\frac{p}{q}=\frac{15}{14}\times\frac{13}{16}\times\frac{8}{9}\times\frac{28}{5}=\frac{13}{3}$ .....(*)

$\Rightarrow p>q$ $\therefore$ उत्तर –(2)

नोट: (*) दिखाता है कि यदि $p=13$ हो तो $q=3$ होगा

16. 2; (i) $p-7=0$ (ii) $3q^2-10q+7=0$

(i) $\Rightarrow p=7$

(ii) $\Rightarrow 3q^2-9q-7q+7=0\Rightarrow 3q(q-1)-7(q-1)=0$

$\Rightarrow (3q-7)(q-1)=0\Rightarrow q=\frac{7}{3}$ या 1

$\therefore p>q$ $\therefore$ उत्तर –(2)

नोट: द्विघात समीकरण $ax^2+bx+c=0$ में

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$\therefore q=\frac{-(-10)\pm\sqrt{(-10)^2-4\times3\times7}}{2\times3}=\frac{10\pm4}{6}=1,\frac{7}{3}$$

17. 3; (i) $4p^2=16$ (ii) $q^2-10q+25=0$

(i) $\Rightarrow p=\pm2$ (ii) $\Rightarrow q=\frac{10\pm\sqrt{100-4\times1\times25}}{2}=5$

हम देखते हैं कि $q>p$

18. 5; (i) $4p^2-5p+1=0$ (ii) $q^2-2q+1=0$

(i) $\Rightarrow p=\frac{5\pm\sqrt{25-16}}{8}=\frac{5\pm3}{8}=\frac{1}{4},1$

yoursmahboob

(ii) $\Rightarrow q = \frac{2 \pm \sqrt{4-4}}{2} = 1$

हम देखते हैं कि $p < q$ या, $q > p$

19.3; (i) $q = \frac{11 \pm \sqrt{121-120}}{2} = \frac{11 \pm 1}{2} = 5, 6$

(ii) $p = \frac{7 + \sqrt{49-48}}{4} = \frac{7 \pm 1}{4} = \frac{6}{4}, 2$

हम देखते हैं कि $p < q$ या, $q > p$

उपर्युक्त प्रश्नों के संबंध में महत्वपूर्ण बिन्दुओं को याद रखें :

इस प्रकार के प्रश्नों में समीकरणों के तीन सम्मिश्रणों (combinations of equations) को पूछे जा सकते हैं :

(a) दोनों समीकरणें एकरेखीय (Linear equation) हों

(b) एक समीकरण एकरेखीय हो तथा दूसरा द्विघात

(c) दोनों समीकरणें द्विघात समीकरण हों

(a) *दोनों समीकरणें एकरेखीय हों* (Both are linear equations) : दो एकरेखीय समीकरणों को हल करने की विभिन्न विधियाँ हैं।

विधि I : "किसी भी दो समीकरणों में से q के संदर्भ में p का मान ज्ञात करें तथा इसे दूसरे समीकरण में रखकर q का मान प्राप्त करें"

उदा. 15 लें: (i) $\Rightarrow p = \frac{4-3q}{2} = -2 - \frac{3}{2}q$ ....(*)

इसे (ii) में रखें $\Rightarrow \frac{3}{4}\left(-2 - \frac{3}{2}q\right) - \frac{5}{2}q = 13$

$\Rightarrow -\frac{3}{2} - \frac{9}{8}q - \frac{5}{2}q = 13$

$\Rightarrow -\frac{29}{8}q = \frac{29}{2}$

$\therefore q = -4$

पुनः, हम (*) में $q = -4$ रखते हैं तथा $p = 4$ प्राप्त करते हैं।

अतः $p > q$

yoursmahboob

विधि II : "उनके गुणांकों को समीकृत (equating) करके दो चरों (variables) में से एक का विलोप (eliminate) करें"

उदा. 15 लें: (i) $2p + 3q - 4 = 0$

(ii) $\frac{3}{4}p - \frac{5}{2}q - 13 = 0$

$$(i) \times \frac{5}{2} + (ii) \times 3 \Rightarrow 5p + \frac{9}{4}p + 10 - 39 = 0$$

$$\rightarrow \frac{29p}{4} - 29 \Rightarrow p = 4$$

अब, (i) में $p = 4$ रखें तथा $q = -4$ प्राप्त करें

अतः $p > q$

दोनों ही विधियों से आप अच्छी तरह से परिचित हैं। दोनों में से जो भी आपको आसान लगता है उसका अनुसरण करें।

विधि III : ग्राफ विधि : हमारे लिए ग्राफ विधि की कोई उपयोगिता नहीं है.

विधि IV : माना कि दो समीकरणें निम्नलिखित हैं :

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0 \quad ...(i)$$

$$a_2x + b_2y + c_2 = 0 \quad ...(ii)$$

यदि आप $(i) \times b_2 - (ii) \times b_1$ करते हैं

तो, $$x = \frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

$$y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{b_1a_2 - b_2a_1} = \frac{a_2c_1 - a_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

नोट : हम देखते हैं कि x एवं y के हर (denominator) समान हैं। इसका तात्पर्य यह नहीं है कि $x = y$, क्योंकि यदि $b_1c_2 - b_2c_1 = a_2c_1 - a_1c_2$ सही नहीं होता है तो $a_1b_2 - a_2b_1$ शून्यक होता है।

(b) *एक समीकरण एकरेखीय है तथा दूसरा द्विघात :*

उदा. 16 लें : (i) $p - 7 = 0$

(ii) $3q^2 - 10q + 7 = 0$

yoursmaiboob

समीकरण (ii) से q के दो मान प्राप्त होते हैं। दिए गए विकल्पों के अनुसार, q के दोनों मान या तो p के मान से ज्यादा होना चाहिए या p के मान से कम। क्यों? क्योंकि यदि एक मान p से ज्यादा तथा दूसरा मान p से कम हो, तो दिया हुआ कोई भी विकल्प हमारा उत्तर नहीं हो सकता है।

अब, यदि q के दोनों मान p से ज्यादा हों तो q के दोनों मानों का योग 2p से ज्यादा होना चाहिए। तथा यदि q के दोनों मान p से कम हों तो q के दोनों मानों का योग 2p से कम होना चाहिए।

उपर्युक्त स्थिति में;

(i) $p = 7$

(ii) $\Rightarrow$ q के दोनों मूलों का योग $-\frac{-(-10)}{3} = \frac{10}{3}$

चूँकि $\frac{10}{3} < 2 \times 7 \rightarrow p > q$

नोट : जब (i) $p + q = 7$; तथा (ii) $q^2 - q - 6 = 0$

इस स्थिति में समीकरण (ii) को हल करें। q के प्रत्येक मान के लिए (i) से p के संगत मानों को ज्ञात करें।

यहाँ (ii) $\Rightarrow q = -2, 3$

(i) $\Rightarrow$ जब $q = -2, p = 9$ तथा जब $q = 3, p = 4 \Rightarrow p > q$

(c) दोनों द्विघात समीकरण हों :

उदा.–17, उदा.–18 एवं **उदा.–19** इस प्रकार के प्रश्नों के उदाहरण हैं। उनके हलों में आप देख सकते हैं कि हल करने की सबसे प्रचलित विधि को अपनाया गया है. द्विघात समीकरण को हल करने की दूसरी विधि है गुणनखंड विधि, जिसे आप अवश्य ही जानते होंगे।

महत्त्वपूर्ण निष्कर्ष :

इन स्थितियों में, जब p का एक मान q से कम है तथा p का दूसरा मान q से ज्यादा है तो हम उत्तर तक नहीं पहुँच सकते हैं। (इसका कारण वही है जिसकी परिभाषा (b) में की गई है।) अतः, p के दोनों मान q के दोनों मानों से या तो ज्यादा हैं या कम हैं। इसका तात्पर्य है कि यदि p_1, p_2, q_1 तथा q_2, p एवं q के मान हैं, तो

या तो $p_1 + p_2 < q_1 + q_2$ या $p_1 + p_2 > q_1 + q_2$.

उदा. 19 में : (i) $q^2 - 11q + 30 = 0$

(ii) $2p^2 - 7p + 6 = 0$

yoursmahboob

(i) $\Rightarrow$ मूलों का योग (अर्थात् $q_1 + q_2$) $= \frac{-(-11)}{1} = 11$

(ii) $\Rightarrow$ मूलों का योग (अर्थात् $p_1 + p_2$) $= \frac{-(-7)}{2} = \frac{7}{2}$

अतः हम इस निष्कर्ष पर पहुँचते हैं कि $q > p$

लेकिन क्या होगा जब p का एक मान q के एक मान के बराबर होता है।

उदाहरण के लिए,

I. $p^2 + p - 6 = 0$ II. $q^2 - 6q + 8 = 0$

I. $\Rightarrow$ मूलों का योग $= \frac{-1}{1} = -1$

II. $\Rightarrow$ मूलों का योग $= \frac{-(-6)}{1} = 6$

उपर्युक्त परिणाम से हम इस निष्कर्ष पर पहुँचते हैं कि $q > p$.

लेकिन हमारा उत्तर दोषरहित नहीं है क्योंकि दोनों समीकरणों के मूलों में से एक मूल उभय (common) है तथा हमारा उत्तर होगा $q > p$. अब, समस्या यह है कि बिना मूलों को ज्ञात किए समानता (equality) की स्थिति को सुनिश्चित कैसे कर सकते हैं?

[I. $\Rightarrow p = 2, -3$ तथा II $\Rightarrow q = 2, 4$]

अब निम्नलिखित संबंध पेज संख्या (191) पर दिए गए नोट (vii) को भी देखें)

यदि दो द्विघात समीकरणों $ax^2 + bx + c = 0$ एवं $a_1x^2 + b_1x + c_1 = 0$ के एक उभयनिष्ठ मूल (common root) हों, तो

$(bc_1 - b_1c)(ab_1 - a_1b) = (ac_1 - a_1c)^2$ तथा इसके विपरीत भी।

उपर्युक्त उदाहरण में,

$p^2 + p - 6 = 0$ एवं $q^2 - 6q + 8 = 0$

$\{1 \times 8 - (-6)(-6)\}\{1(-6) - (1)(1)\} = \{1 \times 8 - (1)(-6)\}^2$

$\Rightarrow (8 - 36)(-7) = (14)^2$

$\Rightarrow 196 = 196$, जिसका तात्पर्य है कि एक मूल उभयनिष्ठ है तथा इसलिए समानता (equality) सही है। अतः हमारा सही उत्तर है $q \geq p$.

समानता की जाँच की उपर्युक्त विधि से समय की बचत ज्यादा नहीं होती है। कभी-कभी मूलों को ज्ञात करना ज्यादा आसान होता है।

yoursmahboob

***समानता की जाँच की दूसरी विधि* (other method to check equality)**

माना कि उभयनिष्ठ मूल x है, तो

$$I \Rightarrow x^2 + x - 6 = 0$$

$$II \Rightarrow x^2 - 6x + 8 = 0$$

अब, I – II से,

$7x - 14 = 0 \Rightarrow x = 2$

$x = 2$, दोनों समीकरणों का एक उभयनिष्ठ मूल है।

$\Rightarrow$ यदि हम संबंधित समीकरणों में $p = 2$ या $q = 2$ रखते हैं, तो ये संतुष्ट (satisfied) हो जाते हैं।

$\Rightarrow$ यदि हम I – II की क्रिया करते हैं तथा p या q के मान जो कि दिए गए समीकरण को संतुष्ट करता है तो समानता अवश्य ही सही होता है।

***उदाहरण के लिए* :** I. $p^2 - p - 6 = 0$

II. $q^2 - 6q + 8 = 0$

या, $p^2 - 6p + 8 = 0$ (q को p में परिवर्तित करने पर)

तब, $I - II \Rightarrow -7p - 14 = 0 \Rightarrow p = 2$

हम I या II में $p = 2$ रखते हैं। समीकरण सही होते हैं जो सुनिश्चित करता है कि 2 दोनों समीकरणों के उभयनिष्ठ मूल (common root) है।

***दूसरा उदाहरण* :** I. $3p^2 - 7p + 2 = 0$

II. $15q^2 - 8q - 1 = 0$

समी. 1×5 में $p = q$ रखें

$$\begin{array}{r} 15q^2 - 35q + 10 = 0 \\ - \quad\quad + \\ \hline 27q - 9 = 0 \end{array} \Rightarrow q = \frac{1}{3}$$

अब, I एवं II में $\frac{1}{3}$ रखते हैं। चूँकि यह समीकरण को संतुष्ट करता है, समानता सही है।

नोट : अंतिम उत्तर के लिए,

I में मूलों का योग $= \frac{-(-7)}{3} = \frac{7}{3}$

yourismahboob

II में मुझे का योग $= \frac{-(-8)}{15} = \frac{8}{15}$

इसलिए, हमारा सही उत्तर है $p \geq q$.

अब, पूर्व परीक्षाओं में पूछे गए प्रश्न पत्र से कुछ और उदाहरणों को लेते हैं :

उदा. : (1) I. $4q^2 + 8q = 4q + 8$ II. $p^2 + 9p = 2p - 12$

(2) I. $2p^2 + 40 = 18p$ II. $q^2 = 13q - 42$

(3) I. $6q^2 + \frac{1}{2} = \frac{7}{2}q$ II. $12p^2 + 2 = 10p$

(4) I. $4p^2 - 5p + 1 = 0$ II. $q^2 - 2q + 1 = 0$

(5) I. $q^2 - 11q + 30 = 0$ II. $2p^2 - 7p + 6 = 0$

(6) I. $\frac{4p}{5} - \frac{8}{15} = 0$ II. $9q^2 = 12q - 4$

(7) I. $q^2 - 15q + 56 = 0$ II. $2p^2 - 10p + 12 = 0$

(8) I. $18p^2 + 3p = 3$ II. $14q^2 + 9q + 1 = 0$

(9) I. $p^2 - 12p + 36 = 0$ II. $q^2 + 48 = 14q$

(10) I. $2p^2 + 12p + 16 = 0$ II. $2q^2 + 14q + 24 = 0$

(11) I. $2p^2 + 48 = 20p$ II. $2q^2 + 18 = 12q$

(12) I. $q^2 + q = 2$ II. $p^2 + 7p + 10 = 0$

(13) I. $p^2 + 36 = 12p$ II. $4q^2 + 144 = 48q$

(14) I. $p^2 - 6p = 7$ II. $2q^2 + 13q + 15 = 0$

(15) I. $3p^2 - 7p + 2 = 0$ II. $2q^2 - 11q + 15 = 0$

(16) I. $10p^2 - 7p + 1 = 0$ II. $35q^2 - 12q + 1 = 0$

(17) I. $4p^2 = 25$ II. $2q^2 - 13q + 21 = 0$

yoursmahboob

(18) I. $3p^2 + 7p = 6$ II. $6(2q^2 + 1) = 17q$

(19) I. $p^2 = 4$ II. $q^2 + 4q = -4$

(20) I. $p^2 + p = 56$ II. $q^2 - 17q + 72 = 0$

(21) I. $3p^2 + 17p + 10 = 0$ II. $10q^2 + 9q + 2 = 0$

(22) I. $p^2 + 3p + 2 = 0$ II. $2q^2 = 5q$

(23) I. $2p^2 - 5p + 2 = 0$ II. $4q^2 = 1$

(24) I. $p^2 + 2p - 8 = 0$ II. $q^2 - 2 = 7$

(25) I. $2p^2 + 20p + 50 = 0$ II. $q^2 = 25$

हल : (आपको दिए गए हल में विस्तृत परिचर्चा को ध्यान पूर्वक पढ़ने की सलाह दी जाती है।)

(I) I $\Rightarrow 4q^2 + 4q - 8 = 0 \Rightarrow q^2 + q - 2 = 0;$

मूलों का योग $= \frac{-1}{1} = -1$

II $\Rightarrow p^2 - 7p + 12 = 0;$

मूलों का योग $= \frac{-(+7)}{1} = -7$

इसलिए हमारा पहला निष्कर्ष है $q > p$. अब समानता की जाँच करें।

$\{1 \times 12 - 7\}\{-2\}\} \{1 \times 7 + 1 \times 1\} = \{1 \times 12 + 1(-2)\}^2$

या, $\{26\}\{6\} = \{14\}^2$ जोकि सत्य नहीं है।

अतः, हमारा उत्तर $q > p$ है।

समानता की जाँच के लिए दूसरी विधि को देखें।

I $\Rightarrow q^2 + q - 2 = 0$

II $\Rightarrow q^2 + 7q + 12 = 0$ (II में $p = q$ रखें)

I-II करने पर : $-6q - 14 = 0$

$\Rightarrow q = \frac{-7}{3}$

yoursmabboob

इस मान को I या II में रखें। यदि इसे हम I में रखते हैं,

$$\left(\frac{-7}{3}\right)^2 - \frac{7}{3} - 2 = 0 \Rightarrow \frac{49}{9} - \frac{7}{3} - 2 = 0 \Rightarrow \frac{49 - 21 - 18}{9} = 0$$

$\Rightarrow \frac{10}{9} = 0$ जोकि सत्य नहीं है। इसलिए, हमारे पूर्वधारणा (assumption) $p = q$ गलत है।

नोट : यदि हम मूलों को गुणनखंड विधि (factorisation method) द्वारा ज्ञात करते हैं, तो इस तरह के प्रश्नों को आसानी से हल किया जा सकता है। उदाहरण के लिए,

$$I \Rightarrow q^2 + q - 2 = 0 \Rightarrow (q+2)(q-1) = 0 \Rightarrow q = -2, 1$$

$$II \Rightarrow p^2 + 7p + 12 = 0 \Rightarrow (p+3)(p+4) = 0 \Rightarrow p = -3, -4$$

अतः, सर्वप्रथम गुणनखंडों को ज्ञात करने की कोशिश करें। यदि गुणनखंड करना कठिन प्रतित होता है, तो केवल तब ही दूसरी विधि की मदद लेते हैं। उपर्युक्त विधि द्रुत विधि (short cut) की तरह हो सकती है :

चरण I : q^2 के गुणांक (coefficient) को नर (constant) से गुणा करें। यहाँ, I में q^2 का गुणांक + 1 है तथा नर - 2 है।
अतः, गुणनफल है $(+1)(-2) = -2$. अब हम गुणांक को दो भागों में इस तरह से विभक्त करते हैं कि इसका गुणनफल (- 2) हो।
इस स्थिति में + 1 – + 2, - 1 दो भाग हैं।

चरण II: अब दोनों भागों को q^2 के गुणांक से भाग दें, अर्थात् (+1). अतः दोनों भाग (+2) एवं (-1) हैं।

चरण III : अब चिह्नों को बदल देते हैं, अर्थात् (+ 2) हो जाता है (- 2) तथा (- 1) हो जाता है (+ 1). ये समीकरण के दो मूल या मूल हैं। उपर्युक्त विधि को चित्र के सहारे निम्नलिखित रूप में प्रस्तुत कर सकते हैं :

$$q^2 + q - 2 = 0$$

चरण 1:	+2	-1
	↓	↓
चरण 2:	$\frac{+2}{1}$	$\frac{-1}{1}$
चरण 3:	-2	+1

yoursmahboob

निम्नलिखित हल को भी देखें :

II. $p^2 + 7p + 12 = 0$

च 1: +3 +4

च 2: $\frac{+3}{1}$ $\frac{+4}{1}$

च 3: -3 -4

(2) I $\Rightarrow 2p^2 + 40 = 18p \Rightarrow p^2 - 9p + 20 = 0$

II $\rightarrow q^2 = 13q - 42 \Rightarrow q^2 - 13q + 42 = 0$

उपर्युक्त तीन विधियों में से किससे आसानी से उत्तर प्राप्त किया जा सकता है? निश्चित रूप से गुणनखंड विधि द्वारा। यदि हम गुणनखंड निकालते हैं :

(I) $\Rightarrow (p-4)(p-5) = 0 \rightarrow p = 4, 5$

(II) $\Rightarrow (q-7)(q-6) = 0 \Rightarrow q = 6, 7$

अतः, उत्तर है $q > p$.

अब हम चित्र प्रस्तुतीकरण विधि द्वारा हल देखेंगे :

(I) $p^2 - 9p + 20 = 0$

च 1: −4 5

च 2: $\frac{-4}{1}$ $\frac{-5}{1}$

च 3: +4 +5

(II) $q^2 - 13q + 42 = 0$

च 1: −7 −6

च 2: $\frac{-7}{1}$ $\frac{-6}{1}$

च 3: +7 +6

yoursmahboob

दूसरी विधि देखें (पूर्वधारणा की विधि) (Method of assumption).

I => मूलों का योग – $\frac{-(-9)}{1} = 9$

II => मूलों का योग – $\frac{-(-13)}{1} = 13$

अतः $q > p$, लेकिन समस्या की जाँच किए बिना हम उत्तर को सुनिश्चित नहीं कर सकते हैं।

अतः, माना कि $p = q$, तो

$$p^2 - 9p + 20 = 0$$
$$p^2 - 13p + 42 = 0$$
$$4p = 22 \qquad \therefore p = \frac{11}{2}$$

(I) में $p = \frac{11}{2}$ रखें। चूँकि (I), $\left(\frac{11}{2}\right)^2 - 9\left(\frac{11}{2}\right) + 20 \neq 0$, इसलिए हमारा पूर्वधारणा $p = q$ गलत है।

इसलिए अंतिम उत्तर हमेशा $q > p$ ही रहेगा।

(3) I => $6q^2 + \frac{1}{2} = \frac{7}{2}q \Rightarrow 12q^2 - 7q + 1 = 0$

II => $12p^2 + 2 = 10p \Rightarrow 6p^2 - 5p - 1 = 0$

गुणनखंड विधि द्वारा (By factorisation method) :

I => $(3q - 1)(4q - 1) = 0 \Rightarrow q = \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$

II => $(3p - 1)(2p - 1) = 0 \Rightarrow p = \frac{1}{3}, \frac{1}{2}$

इसलिए, उत्तर है $p \geq q$

अब चित्र प्रस्तुतीकरण द्वारा हल देखेंगे :

(I) $6q^2 - \frac{7}{2}q + \frac{1}{2} = 0$

yoursmahboob

$\Rightarrow \quad 12q^2 - 7q + 1 = 0$

चा1: $-3 \qquad -4$

चा2: $\frac{-3}{12} \qquad \frac{-4}{12}$

चा3: $+\frac{1}{4} \qquad -\frac{1}{3}$

(II) $\quad 6p^2 - 5p + 1 = 0$

चा1: $-3 \qquad -2$

चा2: $\frac{-3}{6} \qquad \frac{-2}{6}$

चा3: $-\frac{1}{2} \qquad -\frac{1}{3}$

पूर्वधारणा विधि द्वारा (By method of assumption) :

(I) $\Rightarrow$ मूलों का योग $= -\frac{-(-7)}{12} = \frac{7}{12}$

(II) $\Rightarrow$ मूलों का योग $= -\frac{(-5)}{6} = \frac{5}{6}$

इसलिए, $p > q$. परन्तु समानता की जाँच के लिए, $p = q$ माना, तो

$12q^2 - 7q + 1 = 0$

$6q^2 - 5q + 1 = 0$

अब, (I) - 2 × (II) से,

$3q - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad q = \frac{1}{3}$

(I) में $q = \frac{1}{3}$ रखने पर, हमें $12\left(\frac{1}{9}\right) - \frac{7}{3} + 1 = 0$ प्राप्त होता है

Yoursmahboob

जो सत्य है। अतः हमारा अंतिम उत्तर $p \geq q$ है।

(4) I. $4p^2 - 5p + 1 = 0$

II. $q^2 - 2q + 1 = 0$

गुणनखंड विधि द्वारा (By factorisation method) :

I. $(4p - 1)(p - 1) = 0 \Rightarrow p = \frac{1}{4}, 1$

II. $(q - 1)(q - 1) = 0 \Rightarrow q = 1$

अतः उत्तर है $q \geq p$.

चित्र प्रस्तुतीकरण द्वारा (By picturised presentation) :

(I) $4p^2 - 5p + 1 = 0$

च 1: -4 -1

च 2: $\frac{-4}{4}$ $\frac{-1}{4}$

च 3: $+1$ $+\frac{1}{4}$

(I) $q^2 - 2q + 1 = 0$

च 1: -1 -1

च 2: $\frac{-1}{1}$ $\frac{-1}{1}$

च 3: -1 -1

पूर्वकल्पना द्वारा (By Assumption) :

(I) $\Rightarrow$ मूलों का योग $= \frac{5}{4}$ (II) $\Rightarrow$ मूलों का योग $= 2$

इसलिए $q > p$. अब, माना $p = q$, तो

$$\begin{aligned} \text{I} &\Rightarrow 4p^2 - 5p + 1 = 0 \\ 4 \times \text{II} &\Rightarrow 4p^2 - 8p + 4 = 0 \\ \hline & \quad 3p - 3 = 0 \qquad \therefore p = 1 \end{aligned}$$

(I) में $p = 1$ रखने पर $4 - 5 + 1 = 0$ जो सत्य है। अतः हमारा अंतिम उत्तर है $q \geq p$.

गुणनखंड विधि द्वारा (By factorisation method) :

(I) $\Rightarrow (q - 6)(q - 5) = 0 \Rightarrow q = 5, 6$

(II) $\Rightarrow (2p - 3)(p - 2) = 0 \Rightarrow p = \frac{3}{2}, 2$

अतः उत्तर $q > p$.

yoursmanboob

नोट : इस प्रश्न को चित्र-प्रस्तुतिकरण (picturised presentation) द्वारा हल करने की कोशिश करें। इससे समय के साथ-साथ लिखने के लिए जगह की भी बचत होगी। तीन अलग-अलग पंक्तियों में चरण 1, चरण 2, चरण 3 नहीं लिखें। समय एवं जगह की बचत के लिए यथोचित रूप को एक ही पंक्ति में परिवर्तित करें।

मूलों का योग से यह स्पष्ट है कि

$\frac{-(-11)}{1} > \frac{-(-7)}{2}$; अतः $q > p$.

लेकिन $p = q$ भी मान लेते हैं। अब,

$$2p^2 - 7p + 6 = 0$$

$$-\quad 2p^2 - 22p + 60 = 0$$

$$15p - 54 = 0 \quad \therefore p = \frac{54}{15} = \frac{18}{5}$$

(I) में इसे रखने पर, हमें प्राप्त होता है, $\left(\frac{18}{5}\right)^2 - 11\left(\frac{18}{5}\right) + 30 = 0$

या, $324 - 990 + 750 \neq 0$

अतः हमारा पूर्वधारणा (assumption) $p = q$ गलत है। अतः अंतिम उत्तर है $q > p$.

(6) I. $\frac{4p}{5} - \frac{8}{15} = 0 \Rightarrow 12p - 8 \Rightarrow p = \frac{2}{3}$

II. $9q^2 - 12q + 4 = 0 \Rightarrow (3q-2)^2 = 0 \Rightarrow q = \frac{2}{3}$

अतः, $p = q$

(7) I $\Rightarrow q^2 - 15q + 56 = 0$ II $\Rightarrow p^2 - 5p + 6 = 0$

गुणनखंड द्वारा :

(I) $\Rightarrow (q-7)(q-8) = 0 \Rightarrow q = 7, 8$

(II) $\Rightarrow (p-3)(p-2) = 0 \Rightarrow p = 2, 3$

अतः, उत्तर है $q > p$.

नोट : इन दो समीकरणों को एक-पंक्ति चरण में हल करने का प्रयास करें

(8) (I) $\Rightarrow 6p^2 + p - 1 = 0$ (II) $\Rightarrow 14q^2 + 9q + 1 = 0$,

गुणनखंड द्वारा :

(I) $\Rightarrow (3p-1)(2p+1) = 0 \Rightarrow p = \frac{1}{3}, -\frac{1}{2}$

yoursmahboob

(II) $\Rightarrow (7q+1)(2q+1)=0 \Rightarrow q=\frac{-1}{7}, -\frac{1}{2}$

अतः, उत्तर $p \geq q$

नोट : (I) $6p^2+p-1=0$ (II) $14q^2+9q+1=0$

च 1: +3 -2 **च 1:** +7 +2

च 2: $\frac{+3}{6}$ $\frac{-2}{6}$ **च 2:** $+\frac{7}{14}$ $-\frac{2}{14}$

च 3: $-\frac{1}{2}$ $+\frac{1}{3}$ **च 3:** $-\frac{1}{2}$ $-\frac{1}{7}$

पूर्वधारणा द्वारा (By assumption) :

चूँकि $\frac{-1}{6} > \frac{-9}{14}$, $p > q$.

अब, $p = q$ माना। तो

$$\begin{array}{rl} 6p^2+p-1=0 & \times 7 \\ 14p^2+9p+1=0 & \times 3 \\ \hline -20p-10=0 & \end{array} \Rightarrow p=-\frac{1}{2}$$

इसे I में रखते हैं, तो $6\left(-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}-1=0$

या, $\frac{3}{2}-\frac{1}{2}-1=0$ जो सत्य है। अतः हमारा अंतिम उत्तर $p \geq q$ है।

(9) गुणनखंड विधि (By factorisation method) :

(I) $p^2-12p+36=0 \Rightarrow (p-6)^2=0 \Rightarrow p=6$

(II) $q^2-14q+48=0 \Rightarrow (q-6)(q-8)=0 \Rightarrow q=6, 8$

अतः हमारा उत्तर $q \geq p$ है।

पूर्वधारणा द्वारा (By assumption) :

(I) मूलों के योग $= \frac{-(-12)}{1} = 12$ (ध्यान दें, p के मान हैं जो प्रत्येक 6 के बराबर है।)

yoursmahboob

(II) मूलों के योग → $\frac{-(-14)}{1} = 14$

हल प्रकार $q > p$. अब $p = q$ माना, तो

(I) - (II) से, $2p - 12 = 0$ या $p = 6$. अब हम इसे (I) में रखते हैं,

$36 - 12 \times 6 + 36 = 0$, जो सत्य है। अतः अंतिम उत्तर $q \geq p$ है।

(10) (I) → $p^2 + 6p + 8 = 0$

(II) ⇒ $q^2 + 7q + 12 = 0$

गुणनखंड विधि द्वारा (By Factorisation) :

(I) ⇒ $(p-4)(p+2) = 0 \Rightarrow p = -2, -4$

(II) ⇒ $(q+4)(q+3) = 0 \Rightarrow q = -3, -4$

इस प्रकार के प्रश्न में हम किसी प्रकार का निष्कर्ष नहीं निकाल सकते हैं। यदि हम कहते हैं $p \geq q$, तो -4 को -3 से ज्यादा होना चाहिए, जो सत्य नहीं है। अतः हम इस प्रश्न का उत्तर नहीं दे सकते हैं। ध्यान दें कि यह प्रश्न बैंक की परीक्षा में पूछा गया है। आपको इस तरह के प्रश्नों को छोड़ देने की सलाह दी जाती है।

(11) **गुणनखंड विधि द्वारा :**

(I) ⇒ $p^2 - 10p + 24 = 0 \Rightarrow (p-6)(p-4) = 0 \Rightarrow p = 4, 6$

(II) ⇒ $q^2 - 6q + 9 = 0 \Rightarrow (q-3)(q-3) = 0 \Rightarrow q = 3$

अतः हमारा उत्तर $p > q$ है।

पूर्वधारणा विधि (By assumption) :

मूलों के योग की तुलना करें। चूँकि $10 > 6$, $p > q$

अब $p = q$ माना तथा (I) - (II) से, $-4p + 15 = 0 \Rightarrow p = \frac{15}{4}$

इसे (I) में रखते हैं, तो $\left(\frac{15}{4}\right)^2 - 10\left(\frac{15}{4}\right) + 24 = 225 - 600 + 384 \neq 0$.

अतः हमारा अंतिम उत्तर $p > q$ ही रहता है।

(12) **गुणनखंड द्वारा (By factorisation) :**

(I) ⇒ $q^2 + q - 2 = 0 \Rightarrow (q+2)(q-1) = 0 \Rightarrow q = 1, -2$

(II) ⇒ $p^2 + 7p + 10 = 0 \Rightarrow (p+5)(p+2) = 0 \Rightarrow p = -2, -5$

इसलिए, उत्तर है $q > p$

yoursmanboob

पूर्वधारणा द्वारा (By assumption): चूँकि $-1 > -7, q > p$

अब, $p = q$ रखते हैं तथा (I) - (II) से, $-6p - 12 = 0 \therefore p = -2$.

चूँकि यह समीकरण (I) को संतुष्ट करता है, हमारा पूर्वधारणा $(p = q)$ सत्य है। अतः अंतिम उत्तर $q \geq p$ है।

(13) (I) $\Rightarrow p^2 \quad 12p + 36 = 0$ (II) $\Rightarrow q^2 - 12q + 36 = 0$

चूँकि दोनों एक ही समीकरण है, $p = q$

(14) गुणनखंड द्वारा (By factorisation) :

(I) $\Rightarrow (p - 7)(p - 1) = 0 \Rightarrow p = 7, -1$

(II) $\Rightarrow (2q + 3)(q + 5) = 0 \Rightarrow q = -\frac{3}{2}, \quad 5.$

अतः $p > q$

पूर्वधारणा द्वारा : हम मूलों के योग की तुलना करते हैं

$$6 > \frac{-13}{2} \Rightarrow p > q.$$

अब, $p = q$ लेना। तो $II - 2 \times I \Rightarrow$ ...

$$2p^2 + 13p + 15 = 0$$
$$2p^2 - 12p - 14 = 0$$
$$25p = -29. \quad \therefore p = -\frac{29}{25}$$

यह $\frac{-29}{25}$ से कोई भी समीकरण संतुष्ट नहीं होता है।

अतः हमारा पूर्वधारणा $(p = q)$ गलत है।

नोट : अब इसके आगे गुणनखंड द्वारा हल को चित्र प्रस्तुतीकरण के रूप में किया जाएगा। पूर्वधारणा के द्वारा हल नहीं दिया जाएगा। आपको मालूम ही होगी है कि निम्नलिखित प्रश्नों को उस विधि द्वारा भी हल करें।

(15) (I) $3p^2 - 7p + 2 = 0$ (II) $2q^2 - 11q + 15 = 0$

चरण 1:	-6	-1	**चरण 1:**	-6	-5
चरण 2:	$\frac{-6}{3}$	$\frac{-1}{3}$	**चरण 2:**	$\frac{6}{2}$	$\frac{-5}{2}$
चरण 3:	-2	$+\frac{1}{3}$	**चरण 3:**	+3	$-\frac{5}{2}$

अतः $q > p$.

yoursmahboob

(16) (I) $10p^2 - 7p + 1 = 0$

चरण 1:	-5	-2
चरण 2:	$\frac{-5}{10}$	$\frac{-2}{10}$
चरण 3:	$-\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{5}$

अतः $p \geq q$.

(II) $35q^2 - 12q + 1 = 0$

चरण 1:	-7	-5
चरण 2:	$\frac{-7}{35}$	$\frac{-5}{35}$
चरण 3:	$+\frac{1}{5}$	$+\frac{1}{7}$

(17) (I) $4p^2 = 25 \Rightarrow p = \pm\sqrt{\frac{25}{4}} = \pm\frac{5}{2}$

(II) $2q^2 - 13q + 21 = 0$

चरण 1:	-7	-6
चरण 2:	$\frac{-7}{2}$	$\frac{-6}{2}$
चरण 3:	$-\frac{7}{2}$	-3

अतः $q \geq p$.

(18) (I) $3p^2 + 7p - 6 = 0$

चरण 1:	+9	-2
चरण 2:	$\frac{+9}{3}$	$\frac{-2}{3}$
चरण 3:	-3	$+\frac{2}{3}$

अतः $q \geq p$.

(II) $12q^2 - 17q + 6 = 0$

चरण 1:	-9	-8
चरण 2:	$\frac{-9}{12}$	$\frac{-8}{12}$
चरण 3:	$+\frac{3}{4}$	$+\frac{2}{3}$

(19) (I) $p^2 = 4 \Rightarrow p = +2, -2$

(II) $q^2 + 4q + 4 = 0$

चरण 1:	+2	+2
चरण 2:	$+\frac{2}{1}$	$+\frac{2}{1}$
चरण 3:	-2	-2

अतः $p \geq q$.

yoursmahboob

(20) (I) $p^2 + p - 56 = 0$ (II) $q^2 - 17q + 72 = 0$

	(I)		(II)	
चरण 1:	+8	[illegible]	-8	-9
चरण 2:	$\frac{+8}{1}$	$\frac{-7}{1}$	$\frac{-8}{1}$	$\frac{-9}{1}$
चरण 3:	-8	+7	-8	-9

अतः, $q > p$.

(21) (I) $3p^2 + 17p + 10 = 0$ (II) $10q^2 + 9q + 2 = 0$

	(I)		(II)	
चरण 1:	+15	+2	+5	+4
चरण 2:	$\frac{+15}{3}$	$\frac{+2}{3}$	$\frac{+5}{10}$	$\frac{+4}{10}$
चरण 3:	-5	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{5}$

अतः, $q > p$.

(22) (I) $p^2 + 3p + 2 = 0$

चरण 1:	+2 +1
चरण 2:	$\frac{+2}{1}$ $\frac{+1}{1}$
चरण 3:	-2 -1

(II) $2q^2 - 5q = 0$

$\Rightarrow q(2q - 5) = 0 \Rightarrow q = 0, \frac{5}{2}$

अतः, $q > p$.

yoursmahboob

(23) (I) $2p^2 + 5p + 2 = 0$

चरण 1: $+4$ $+1$

चरण 2: $\frac{+4}{2}$ $+\frac{1}{2}$

चरण 3 -2 $-\frac{1}{2}$

(II) $4q^2 = 1 \Rightarrow q^2 = \frac{1}{4}$ $\therefore q = +\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$

अतः, $q > p$

(24) (I) $p^2 + 2p - 8 = 0$

चरण 1: $+4$ -2

चरण 2: $\frac{+4}{1}$ $\frac{-2}{1}$

चरण 3: $+4$ $+2$

(II) $q^2 = 9$ $\therefore q = +3, -3$

यद्यपि यह प्रश्न BSRB Mumbai परीक्षा में पूछा गया है, लेकिन कोई निष्कर्ष नहीं निकाला जा सकता है। आपको इस प्रकार के प्रश्नों को छोड़ देने की सलाह दी जाती है।

(25) (I) $p^2 + 10p + 25 = 0$

चरण 1: $+5$ $+5$

चरण 2: $\frac{+5}{1}$ $\frac{+5}{1}$

चरण 3: -5 -5

(II) $q^2 = 25 \Rightarrow q = +5, -5$ अतः, $q \geq p$.

असमीकरण पर आधारित प्रश्न (Question Based on Inequality)

असमीकरण (inequality) को समझने के लिए सर्वप्रथम equality को समझना आवश्यक है। हम जानते हैं कि $3 \times 2 = 6$। दूसरे शब्दों में, 3 एवं 2 का गुणनफल संख्या '6' के बराबर है। चूंकि बराबर हैं इसलिए ये equality हैं। उसी तरह, $3 \times 3 \neq 6$। यहाँ 3 एवं 3 का गुणनफल संख्या 6 के बराबर नहीं है। चूंकि ये बराबर नहीं हैं इसलिए यह असमीकरण (inequality) है। अब, जब एक बार यह निश्चित हो जाता है कि एक चीज दूसरी चीज के बराबर नहीं है तो ऐसी

yousmahboob

स्थिति में केवल दो ही संभावनाएँ हो सकती हैं। या तो एक चीज, दूसरी चीज से बड़ी होगी (greater than) या छोटी (less than) होगी।

गणित की भाषा में हम 'से बड़ा' (greater than) के लिए '>' एवं 'से छोटा' (less than) के लिए '<' चिह्नों का प्रयोग करते हैं. इसलिए $3\times 2 > 5$ एवं $3\times 1 < 6$।

'से बड़ा या बराबर' (greater than or equal to) एवं 'से छोटा या बराबर' (less than or equal to) के चिह्न:

मान लिया कि हमारे पास दो संख्याएँ x एवं y हैं तथा हमें उनके बारे में इतना ही पता है कि "y, x से छोटा नहीं है"। इस स्थिति में x या तो y से बड़ा है या बराबर है। इसे संकेत द्वारा 'से बड़ा या बराबर' को '≥' से एवं 'से छोटा या बराबर' को '≤' दर्शाते हैं।

इसलिए, $x \geq y$ का तात्पर्य है: x, y से बड़ा या बराबर है।

$a \leq b$ का तात्पर्य है: a, b से छोटा या बराबर है।

नोट: 1 यदि $a > b$ हो तो

(i) $a+c > b+c$ (ii) $a-c > b-c$

(iii) $ac > bc$ (c धनात्मक है) (iv) $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$ (c धनात्मक है)

2. किसी असमीकरण में यदि पद को एक तरफ से दूसरी तरफ ले जाया जाता है तो असमीकरण का चिह्न अपरिवर्तित रहता है परंतु पद का चिह्न धन से ऋण एवं गुणा से भाग हो जाता है। इसका विलोम भी सत्य है।

उदाहरण के लिए,

यदि $a-c > b$, तो $a > c+b$

यदि $a+b > c$, तो $a > b\times c$

3. यदि किसी असमीकरण के सभी पदों के चिह्नों को बदल (विपरीत कर) दिया जाए तो असमीकरण का चिह्न भी बदल (विपरीत) जाता है।

उदाहरण के लिए,

यदि $a > b$, तो $-a < -b$

4. यदि $a > b$, तो $a^n > b^n$ एवं $\frac{1}{a^n} < \frac{1}{b^n}$

बीजगणितीय असमीकरण को हल करने के लिए वेवी-कर्व विधि (Wavy-Curve Method):

मान कि $f(x) = (x+2)(2x-5)^2(x-6)^3$ एक फलन (function) है:

x के मानों का समुच्चय ज्ञात करना जिसके लिए

i) $f(x) > 0$

ii) $f(x) < 0$

yoursmahboob

iii) $f(x) \geq 0$

iv) $f(x) \leq 0$

इस तरह के प्रश्नों को हल करने की प्रक्रिया:

पहला चरण: प्रदत्त बिजगणितीय फलन के सभी गुणनखंडों को निकालें तथा प्रत्येक गुणनखंड के x के गुणांक को धनात्मक बनाएँ।

दूसरा चरण: प्रदत्त फलन के मूलों को निकालें।

तीसरा चरण: मूलों को आरोही (ascending) क्रम में सजाएँ।

चौथा चरण: प्राप्त मानों को वास्तविक संख्या रेखा (Real Number Line) पर रखें।

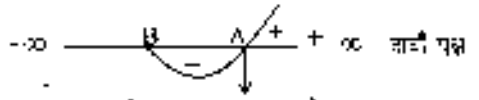
पाँचवाँ चरण: ध्यान दें कि प्रथम चरण में प्राप्त गुणनखंडों का घात सम है या विषम

छठा चरण: रेखा चित्र खींचे जैसा कि नीचे दिया गया है।

रेखा चित्र खींचने के लिए सबसे बड़े मूल से प्रारंभ करें। सबसे बड़ा मूल वास्तविक संख्या रेखा के सबसे दाईं ओर स्थित होता है। इसलिए संख्या रेखा के दाहिनी ओर के ऊपरी भाग से रेखा खींचना आरंभ करें (जैसा कि चित्र में दिया गया है।) एवं सबसे बड़े मूल पर आकर रुकें। यहाँ पर उस गुणनखंड, जिससे सबसे बड़ा मूल प्राप्त हुआ है, का घात सम है या विषम का पता करें यदि घात विषम होता है तो संख्या रेखा को पार करते हुए दूसरे मूल तक आएँ (सबसे बड़ा मूल के बाद वाला मूल) अन्यथा, संख्या रेखा को पार नहीं करें एवं संख्या रेखा के ऊपर और रहते हुए दूसरे मूल तक पहुँचें।

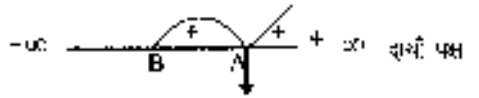
निम्नलिखित चित्रों के सहारे हम इसे आसानी से समझ सकते हैं।

पहली स्थिति: सबसे बड़ा मूल को समाविष्ट करने वाले गुणनखंड का घात यदि विषम हो



हम बिंदु A पर संख्या रेखा को पार करते हुए, दूसरे मूल B तक पहुँचते हैं।

दूसरी स्थिति: सबसे बड़ा मूल को समाविष्ट करने वाले गुणनखंड का घात यदि सम हो।



यहाँ बिंदु A पर हम संख्या रेखा को पार नहीं करते हैं परन्तु रेखा के उसी ओर रहते हुए दूसरे मूल B पर आते हैं।

अब बिन्दु B पर, पुनः मूल B को समाविष्ट करने वाले गुणनखंड के घात सम हैं या विषम का पता करें तथा उपर्युक्त वर्णित प्रक्रिया का अनुसरण करें।

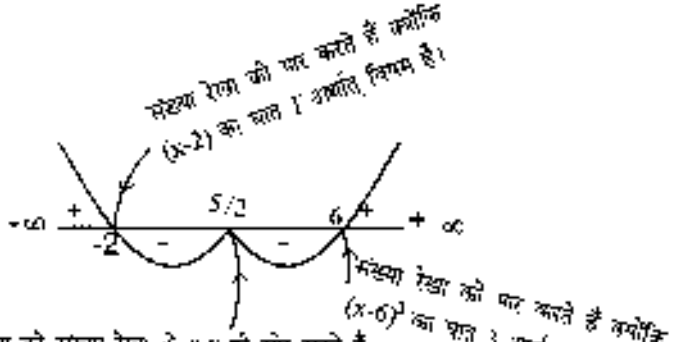
yousahboob

परिपाटी (convention): हम संख्या रेखा के ऊपरी भाग के धनात्मक एवं निचले भाग को ऋणात्मक मानते हैं। (ऊपर के चित्रों को देखें) यहाँ पर ऋणात्मक (−ve) एवं धनात्मक (+ve) चिह्न फलन $f(x)$ का चिह्न है।

अब हम ऊपर दिए गए उदाहरण को इस विधि द्वारा हल करते हैं।

$f(x)$ के मूल $-2, \frac{5}{2}, 6$

मूलों को वास्तविक संख्या रेखा पर रखते हुए रेखा चित्र खींचते हैं।



रेखा को संख्या रेखा के एक ही ओर रखते हैं क्योंकि $(2x-5)^2$ का घात 2 अर्थात् सम है।

i) $f(x) > 0$, जब $x \in (-\infty, -2) \cup (6, -\infty)$

दूसरी तरह,

$f(x) > 0$, जब $\{-\infty < x < -2\} \cup \{6 < x < -\infty\}$

ii) $f(x) < 0$, जब $\{2 < x < \frac{5}{2}\} \cup \{\frac{5}{2} < x < 6\}$

iii) $f(x) \geq 0$, जब $\{-\infty < x \leq -2\} \cup \{6 < x < +\infty\}$

iv) $f(x) \leq 0$, जब $\{-2 \leq x \leq \frac{5}{2}\} \cup \{\frac{5}{2} < x < 6\}$

साधित प्रश्न

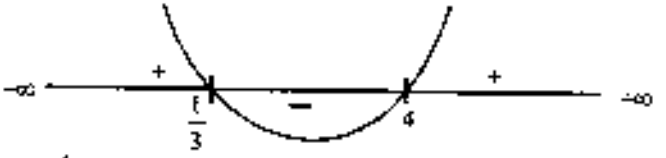
उदा. 1: $(3x-1)(x-2) \leq 0$ के हल करें।

हल: **Wavy-Curve Method:**

समीकरण $(3x-1)(x-2) = 0$ के मूल $-\frac{1}{3}$ एवं 2

अब इन मूलों को वास्तविक संख्या रेखा पर रखकर निम्नलिखित कर्व (Curve) खींचे.

yoursmahboob



2 एवं $\frac{1}{3}$ पर संख्या रेखा को पार करते हैं क्योंकि $(3x-1)$ एवं $(x-2)$ का घात 1 अर्थात् विषम है। हम लोगों को असमीकरण $(3x-1)(x-2)\le 0$ के हलों के समुच्चय को निकालना है ऊपर के चित्र से बड़ी आसानी से अभीष्ट हलों के समुच्चय को ज्ञात किया जा सकता है।

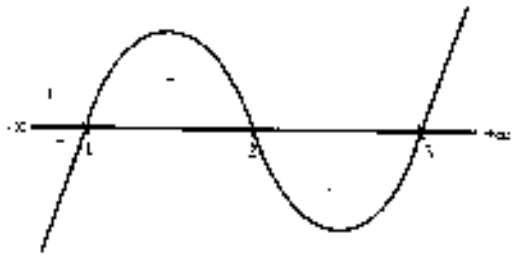
$$\text{अभीष्ट समुच्चय} = \left\{\frac{1}{3}\le x\le 2\right\}$$

उदा. 2: $x^3-6x^2+11x-6<0$ को हल करें।

हल: $x=1$ का मान रखने पर, $x^3-6x^2+11x-6=0$ प्राप्त होता है। इसलिए $(x-1)$ दिए हुए समीकरण का एक गुणनखंड है।

$$x^3-6x^2+11x-6=(x-1)(x^2-5x+6)=(x-1)(x-2)(x-3)$$

अब हमें $(x-1)(x-2)(x-3)<0$ को हल करना है।



हलों का अभीष्ट समुच्चय $=\{x<1\}\cup\{2<x<3\}$

किसी द्विघात व्यंजक $ax^2+bx+c(=y$ मान) के महत्तम एवं न्यूनतम मानों की शर्तें:

y के न्यूनतम मान के लिए शर्त है कि $a>0$ (यदि $a<0$ हो तो y का कोई न्यूनतम मान नहीं होगा)

y का न्यूनतम मान $=\frac{-D}{4a}$ यह तभी संभव है जब $x=-\frac{b}{2a}$ हो।

y के महत्तम मान के लिए शर्त है $a<0$ (यदि $a>0$ हो तो y का कोई भी महत्तम मान नहीं होगा)

y का महत्तम मान $=\frac{-D}{4a}$ यह तभी संभव है जब $x=-\frac{b}{2a}$

yoursmartboob

उदा. 1: यदि x वास्तविक हो तो $-2x^2+x+3$ का महत्तम मान ज्ञात करें तथा साथ ही x के उस मान को भी बताएँ जिसके लिए प्रदत्त व्यंजक का मान महत्तम है।

हल: साथ का समीकरण $-2x^2+x+3=0$ है।

$D=(1)^2-4\times(-2)\times3=1+24=25$

प्रदत्त व्यंजक का अभीष्ट महत्तम मान $=\frac{-D}{4a}$

$=\frac{-25}{4\times(-2)}=\frac{25}{8}=3.125$ एवं

x का मान $=-\frac{b}{2a}=-\frac{1}{2\times(-2)}=\frac{1}{4}=0.25$

व्याख्या: $-2x^2+x+3=y$ .....(i)

या, $-2x^2+x+(3-y)=0$

$D=(1)^2-4\times(-2)\times(3-y)$

$=1+8(3-y)=1-24-8y=25-8y$

दिया हुआ है कि x वास्तविक है, इसलिए $D\geq0$ या, $25-8y>0$ या, $25>8y$

$\therefore y\leq\frac{25}{8}$ i.e. y का महत्तम मान $\frac{25}{8}$ है

(i) में $y=\frac{25}{8}$ रखने पर, $-2x^2+x+3=\frac{25}{8}$ प्राप्त होता है।

या, $-16x^2+8x+24=25$

या, $16x^2-8x+1=0$

या, $(4x-1)^2=0$, $4x-1=0$

$\therefore x=\frac{1}{4}=0.25$

उदा. 2: यदि x वास्तविक हो तो $2x^2-5x-3$ का न्यूनतम मान ज्ञात करें तथा साथ ही x के उस मान को भी बताएँ जिसके लिए प्रदत्त व्यंजक का मान न्यूनतम है।

हल: समीकरण $\Rightarrow 2x^2-5x-3=0$

$D=(-5)^2-4\times2\times(-3)=25+24=49$

$\therefore$ प्रदत्त व्यंजक का अभीष्ट न्यूनतम मान $=-\frac{D}{4a}=-\frac{49}{4\times2}=-\frac{49}{8}=-6.125$ एवं

x का अभीष्ट मान $=-\frac{b}{2a}=-\left(\frac{5}{2\times2}\right)=\frac{5}{4}=1.25$

yoursmahboob

व्याख्या: $2x^2 - 5x - 3 = y$ .....(i)

या, $2x^2 - 5x - (y+3) = 0$

$D = (-5)^2 - 4 \times 2 \times \{-(y+3)\} = 25 + 8(y+3) = 49 + 8y$

दिया हुआ है कि x वास्तविक है।

$\therefore D \geq 0$ या, $49 + 8y \geq 0$ या, $49 \geq (-8)y$ या, $y \leq \frac{49}{(-8)} = -6.125$

अर्थात् y का न्यूनतम मान −6.125 है एवं (i) में $y \leq \frac{49}{(-8)}$ रखने पर,

$2x^2 - 5x - 3 = \frac{49}{(-8)}$ प्राप्त होता है।

या, $16x^2 - 40x - 24 + 49 = 0$

या, $16x^2 - 40x + 25 = 0$

या, $(4x-5)^2 = 0$

या, $4x - 5 = 0$ $\therefore x = \frac{5}{4} = 1.25$

उदा. 3: 450 रु. में कुछ टेनिस बॉल खरीदे गए। यदि प्रत्येक बॉल 15 रु. सस्ता होता तो उतनी ही राशि में 5 बॉल और खरीदे जा सकते थे तो खरीदे गए बॉल की संख्या ज्ञात करें।

हल: मान लिया कि कुल x बॉल खरीदे गए। दोनों ही परिस्थितियों में मूल्यों की तुलना करने पर, हमें निम्नलिखित समीकरण प्राप्त होता है।

$\frac{450}{x} = \frac{450}{x+5} + 15$ .....(*)

या, $\frac{30}{x} = \frac{30}{x+5} + 1$

या, $\frac{30}{x} = \frac{30+x+5}{x+5}$

या, $30(x+5) = x(35+x)$

या, $30x + 150 = 35x + x^2$

या, $x^2 + 5x - 150 = 0$

या, $x^2 + 15x - 10x - 150 = 0$

या, $x(x+15) - 10(x-15) = 0$

या, $(x-10)(x+15) = 0$

yoursmahboob

$\therefore x = 10, -15$

ऋणात्मक मान को नजरअंदाज कर देते हैं।

$\therefore$ बॉल की संख्या = 10

नोट: (1) समीकरण (*) में एक बॉल का क्रय मूल्य $= \frac{450}{x}$. जब हम उतनी ही राशि में 5 बॉल और खरीद सकते हैं तो प्रत्येक बॉल का क्रय मूल्य $= \frac{450}{x+5}$

प्रश्नानुसार, दूसरी स्थिति में एक बॉल का क्रय मूल्य 15 रुपया सस्ता है।

इसलिए, $= \frac{450}{x} = \frac{450}{x+5} + 15$

द्रुत विधि (Quicker Method): समीकरण (*) हमारा हल का पहला चरण है। इस चरण से ही हम देखते हैं कि हमलोग द्विघात समीकरण के जाल में फंसने जा रहे हैं। स्वभावतः द्विघात समीकरण को हल करने में ज्यादा समय लगता है। इसलिए हमारी सलाह यह है कि इस चरण में अपनी गणना को रोक दें एवं प्रदत्त विकल्पों को देखें।

विकल्प (1): $x = 15$ रखें। यह हमारा उत्तर नहीं हो सकता है क्योंकि दायीं पक्ष में हमें $\frac{450}{15+5}$ प्राप्त होता है जो एक पूर्ण संख्या नहीं है।

विकल्प (2): $x = 20$ रखें। यह भी सही उत्तर नहीं देता है।

विकल्प (3): $x = 10$ रखें। यह समीकरण को संतुष्ट करता है एवं अर्थपूर्ण मान देता है। इसलिए, हमारा उत्तर (3) है।

उदा. 4: एक व्यापारी यह जानता है कि वस्तु की कीमत में 5 रु. प्रति पैकेट की वृद्धि होगी। वह उस वस्तु के कुछ पैकेट 4500 रु. में खरीद लिए। यदि वह पैकेट को नयी कीमत पर खरीदा होता तो उसे 10 पैकेट कम मिलता। उसके द्वारा खरीदे गए पैकेट की संख्या ज्ञात करें।

हल: माना कि उसने x पैकेट खरीदा;

तो एक पैकेट की कीमत $= \frac{4500}{x}$ रु.

जब वह 10 पैकेट कम खरीदता है तो एक पैकेट की कीमत $= \frac{4500}{x-10}$

अब, प्रश्नानुसार,

$$\frac{4500}{x} + 5 = \frac{4500}{x-10} \quad \text{.....(*)}$$

ऊपर का समीकरण एक द्विघात समीकरण है इसलिए हमें गणना यहाँ पर रोक देनी चाहिए;

yourshahboob

(समय बचाने के लिए)। x एवं x - 10 का मान ऐसा होना चाहिए जो 4500 को पूरी तरह विभाजित कर दे इसलिए हमारा सही उत्तर 100 होना चाहिए।

नोट: परीक्षा हॉल में (*) हमारा पहला एवं अंतिम चरण होना चाहिए।

रेखीय समीकरण (Linear Equation)

बराबर के चिह्न से पृथक् किया हुआ कोई भी कथन जिसमें एक अज्ञात चर राशि मौजूद हो, रैखीय समीकरण कहलाता है। ऐसे समीकरणों का ग्राफ एक सरल रेखा होता है। एवं हमके abscissae (x) या ordinate (y) प्रदत्त समीकरण को संतुष्ट करते हैं।

मूल या हल: चर का कोई भी मान जो प्रदत्त समीकरण को संतुष्ट कर दे, समीकरण का हल कहलाता है

हल किए गए उदाहरण: रवि के पिताजी की उम्र रवि की चार गुनी है। 4 वर्ष पूर्व उनके पिताजी की उम्र उसकी छः गुनी थी उनकी वर्तमान आयु क्या है?

हल: i) मान लिया कि रवि की वर्तमान आयु x वर्ष है और उसके पिताजी की वर्तमान आयु y वर्ष है। रवि के पिताजी की उम्र उसके उम्र की चार गुनी है। इस कथन से एक समीकरण प्राप्त हुआ,

$4x = y$

अब इसको मानक रूप $ax + by + c = 0$ में परिवर्तित करें

$4x - y + 0 = 0$

ii) 4 वर्ष पूर्व उनकी (रवि एवं उसके पिता की) आयु क्रमशः $x - 4$ एवं $y - 4$ रही होगी प्रश्नानुसार, 4 वर्ष पूर्व पिताजी की आयु रवि के आयु की छः गुनी थी.

$\therefore\ 6(x-4) = y-4$

$ax + by + c = 0$ के मानक रूप में लिखने पर,

$6x - y - 20 = 0$

iii) इस प्रकार हमें दो समीकरण प्राप्त होते हैं:

1) $4x - y + 0 = 0$

2) $6x - y - 20 = 0$

iv) उपयुक्त हल के लिए जाँच करें:

$$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2} \quad \text{i.e. } \frac{4}{6} \neq \frac{-1}{-1}$$

इसलिए यहाँ प्रदत्त समीकरण को संतुष्ट करने के लिए एक व्यवस्थित युग्म (ordered pair) विद्यमान है।

v) विलोपन (elimination) विधि से x के मान के लिए सरल करने के लिए समीकरण (1) में से (2) को घटाने पर

$-2x + 20 = 0$ [प्रतिस्थापन से]

$\Rightarrow x = 10$

समीकरण (1) में $x = 10$ रखने पर

yoursmahboob

$4x - y + 0 = 0$

$\Rightarrow 40 - y = 0$

$\therefore y = 40$

इस प्रकार रवि की उम्र = 10 वर्ष

रवि के पितामही की उम्र = 40 वर्ष

विविध उदाहरण

उदा. 1: यदि $x + \frac{1}{x} = 2$ तो $x^2 + \frac{1}{x^2} = ?$

हल: $x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2.x\left(\frac{1}{x}\right) = 4 - 2 = 2$

उदा. 2: यदि $x + \frac{1}{x} = 3$ तो $x^8 + \frac{1}{x^8} = ?$

हल: $x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2.x.\frac{1}{x} = 9 - 2 = 7$

$x^4 + \frac{1}{x^4} = \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 - 2.x^2.\frac{1}{x^2} = 49 - 2 = 47$

$x^8 + \frac{1}{x^8} = \left(x^4 + \frac{1}{x^4}\right)^2 - 2.x^4.\frac{1}{x^4} = (47)^2 - 2 = 2207$

उदा. 3: यदि $x + y = 3$ एवं $xy = 2$ तो $x^3 - y^3 = ?$

हल: $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + y^2 + xy)$

अब $x - y = \sqrt{(x-y)^2 - 4xy} = \sqrt{9 - 8} = 1$

$x^2 + y^2 + xy = (x - y)^2 - xy = 9 - 2 = 7$

$\therefore x^3 - y^3 = 1 \times 7 = 7$

उदा. 4: यदि $x - \frac{1}{x} = \sqrt{21}$ तो $\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) = ?$

हल: $x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2.x.\frac{1}{x} = 21 + 2 = 23$

yoursmahboob

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+4.x.\frac{1}{x}=21+4=25$$

$$\therefore\ x+\frac{1}{x}=\sqrt{25}=5$$

$$\therefore\ \left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)=5\times 23=115$$

उदा. 5: $\dfrac{27^{3n+1}.81^{-n}}{9^{n+5}.3^{3n-7}}$

हल: $27=3^3 \Rightarrow 27^{3n+1}=3^{3(3n+1)}=3^{9n+3}$

$81=3^4 \Rightarrow (81)^{-n}=3^{-4n}$

$9=3^2 \Rightarrow 9^{n+5}=3^{2(n+5)}=3^{2n+10}$

$\therefore$ प्रदत्त व्यंजक: $\dfrac{3^{9n+3}.3^{-4n}}{3^{2n+10}.3^{3n-7}}$

$=3^{(9n-3-4n)-[(2n+10)+(3n-7)]}=3^0=1$

उदा. 6: यदि $x=12, y=4$ हो $(x+y)^{x/y}$ का मान ज्ञात करें।

हल: $(x+y)^{x/y}=(16)^3=4096$

उदा. 7: यदि $a+b+c=0$ तो $a^3+b^3+c^3=?$

हल: $a^3+b^3+c^3=(a+b+c)^3-3(b+c)(c+a)(a+b)$

$=0-3(b+c)(c+a)(a+b)$

$=-3(-a)(-b)(-c)$

$\Rightarrow a^3+b^3+c^3=3abc$ (याद रखें)

उदा. 8: यदि $x=\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}, y=\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$ हो $x^2+y^2=?$

हल: $x^2+y^2=\left(\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}\right)^2$

अब, $\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}=\dfrac{(\sqrt{3}-1)^2}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}=\dfrac{4-2\sqrt{3}}{3-1}=2-\sqrt{3}$

yoursmahboob

इसी तरह, $\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}=\frac{(\sqrt{3}+1)^2}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}=2+\sqrt{3}$

$\therefore\ x^2+y^2=(2-\sqrt{3})^2+(2+\sqrt{3})^2=2\left[(2)^2+(\sqrt{3})^2\right]=14$

$\left[\because (a-b)^2+(a+b)^2=2(a^2+b^2)\right]$

उदा. 9: यदि y, x के अनुरूप अपना मान बदलता है, और $x=2$ के लिए $y=7$ हो, तो $x=5$ के लिए y का मान क्या होगा?

हल: यदि y, x का कलन हो तो

$\frac{y}{x}$ = अचर

$\therefore\ \frac{7}{2}=\frac{y}{5}\Rightarrow y=\frac{35}{2}$

उदा. 10: यदि $(x+2)$, $x^3+6x^2+11x+6k$ को पूर्णतया विभाजित कर दे, तो k का मान बताएँ

हल: चूँकि $(x+2)$ प्रदत्त व्यंजक को पूर्णतया विभाजित करता है, इसलिए व्यंजक में $x=-2$ रखने पर व्यंजक का मान शून्य हो जाना चाहिए। अर्थात् $f(-2)=0$

$\Rightarrow (-2)^3+6\times(-2)^2+11\times(-2)-6k=0$

$\Rightarrow -8+24-22-6k=0$

$\Rightarrow 6k=6\ \therefore\ k=1$

उदा. 11: $\frac{x}{y}$ में कितना जोड़ा जाए कि वह $\frac{y}{x}$ में बदल जाए?

हल: अभीष्ट व्यंजक $=\frac{y}{x}-\frac{x}{y}=\frac{y^2-x^2}{xy}$

उदा. 12: $(x^2+4x+4)(x^2+6x+9)$ का वर्गमूल निकालें।

हल: $(x^2+4x+4)(x^2+6x+9)$

$=(x+2)^2(x+3)^2$

$\therefore$ वर्गमूल $=(x+2)(x+3)$

उदा. 13: यदि $3^{x-y}=27$ एवं $3^{x+y}=243$ तो $x=?$

हल: $3^3=27=3^{x-y}$

$\Rightarrow x-y=3$ ...(1)

yoursmahboob

$3^5 = 243 = 3^{x+y}$

$\Rightarrow x + y = 5$ ....(2)

(1) एवं (2) को जोड़ने पर

$(x+y) + (x - y) = 5 + 3$

$\Rightarrow 2x = 8 \Rightarrow x = 4$

उदा. 14: यदि $x = 9$, $y = \sqrt{17}$ तो $\left(x^2 - y^2\right)^{-1/3} = ?$

हल: $\left(x^2 - y^2\right)^{-1/3} = (81 - 17)^{-1/3} = \frac{1}{\sqrt[3]{81-17}} = \frac{1}{\sqrt[3]{64}} = \frac{1}{4}$

उदा. 15: निम्नलिखित का मान प्राप्त करें:

$$\left[x^{b+c}\right]^{b-c}\left[x^{c+a}\right]^{c-a}\left[x^{a+b}\right]^{a-b}$$

हल: प्रदत्त व्यंजक:

$x^{(b+c)(b-c)} x^{(c+a)(c-a)} x^{(a+b)(a-b)}$

$= x^{(b^2 - c^2)} x^{(c^2 - a^2)} x^{(a^2 - b^2)}$

$= x^{b^2 - c^2 + c^2 - a^2 + a^2 - b^2} = x^0 = 1$

उदा. 16: समीकरण $2kx^2 + 5kx + 2 = 0$ के मूल (roots) बराबर होंगे यदि $k = ...$ हो।

हल: $ax^2 + bx + c = 0$ के मूल समान होते हैं यदि $b^2 - 4ac = 0$

$\therefore$ प्रदत्त समीकरण के मूल बराबर होंगे यदि

$5k^2 - 4 \times (2k) \times 2 = 0$

$\Rightarrow 25k^2 - 16k = 0$

$\Rightarrow k(25k - 16) = 0$

अर्थात् $k = 0$ या $k = \frac{16}{25}$

उदा. 17: $ax^2 + bx + c = 0$ के एक मूल का मान दूसरे मूल के मान का दुगुना होने के लिए क्या शर्तें हैं?

हल: मान लिया कि एक मूल $= \alpha$

तो दूसरा मूल $= 2\alpha$

$\because$ मूलों का जोड़ $= -\frac{b}{a}$ एवं गुणनफल $= \frac{c}{a}$

$\Rightarrow \alpha + 2\alpha = \frac{-b}{a} \Rightarrow 3\alpha = \frac{-b}{a}$

yoursmahboob

एवं $\alpha \times (2\alpha) = 2\alpha^2 = \frac{c}{a}$

$$\alpha + \left(-\frac{b}{3a}\right) \Rightarrow \alpha^2 = \frac{b^2}{9a^2} \Rightarrow 2\alpha^2 = \frac{2b^2}{9a^2} = \frac{c}{a}$$

∴ अभीष्ट शर्त:

$$\frac{2b^2}{9a^2} = \frac{c}{a} \Rightarrow 2b^2 = 9ac$$

उदा. 18: यदि समीकरण $\frac{1}{x+a} + \frac{1}{x+b} = \frac{1}{c}$ के मूलों का योगफल शून्य हो तो उसका गुणनफल निकालें।

हल: समीकरण के दोनों पक्षों में $c(x+a)(x+b)$ से गुणा करने पर

$$c(x+b) + c(x+a) = (x+a)(x+b)$$

व्यवस्थित करने पर,

$$x^2 + x(a+b-2c) + ab - bc - ca = 0$$

∵ मूलों का जोड़ $= -(a+b-2c) = 0$

$$\Rightarrow a+b = 2c$$

मूलों का गुणनफल $= ab - bc - ca$

$$= ab - c(b+a)$$

$$= ab - \left(\frac{a+b}{2}\right)(a+b)$$

$$= -\frac{1}{2}\left(a^2 + b^2\right) \text{ (सरल करने पर)}$$

उदा. 19: समीकरण $\sqrt{3y+1} = \sqrt{y-1}$ का मूल ज्ञात करें।

हल: $\sqrt{3y+1} = \sqrt{y-1}$

वर्ग करने पर, $3y + 1 = y - 1$

$$\Rightarrow 2y = -2 \Rightarrow y = -1$$

लेकिन $y = -1$ का मतलब है कि

$\sqrt{y-1} = \sqrt{-2}$, जो कि परिभाषित नहीं है। इसलिए प्रदत्त समीकरण का कोई मूल नहीं है।

yoursmahboob

उदा. 20: यदि α एवं β समीकरण $x^2 - 3ax + c = 0$ के मूल हों तथा $\alpha^2 + \beta^2 = 5$ हो तो a का मान ज्ञात करें।

हल: चूँकि α एवं β प्रदत्त समीकरण को सन्तुष्ट करते हैं,

$\therefore \quad \alpha^2 + 3a\alpha + c = 0$

$\beta^2 + 3a\beta - c = 0$

जोड़ने पर,

$(\alpha^2 + \beta^2) + 3a(\alpha + \beta) + 2c = 0$

$\Rightarrow \alpha + \beta$ = मूलों का योग $= -\left(\frac{3a}{1}\right) = -3a$

$\therefore \quad 5 + 3a(-3a) + 2c = 0$

$\Rightarrow 9a^2 = 5 + 2c \Rightarrow a = \frac{\sqrt{5+2c}}{9}$

उदा. 21: यदि α एवं β समीकरण $x^2 + 3ax + 2a^2 = 0$ के मूल हों तथा $\alpha^2 + \beta^2 = 5$ तो a का मान ज्ञात करें।

हल: उदा. 20 में हमने पाया कि

$9a^2 = 5 - 2c$

$c = 2a^2$ रखने पर,

$9a^2 = 5 + 4a^2 \Rightarrow 5a^2 = 5 \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a = \pm 1$

उदा. 22: किसी आयत का क्षेत्रफल $\sqrt{\frac{35}{11}}$ सेंटी मीटर त्रिज्या वाले वृत्त के क्षेत्रफल के बराबर है। यदि आयत की लंबाई उसकी चौड़ाई से 3 से.मी. अधिक हो तो आयत की लंबाई एवं चौड़ाई ज्ञात करें।

हल: वृत्त का क्षेत्रफल $= \frac{22}{7} \times \sqrt{\frac{35}{11}} \times \sqrt{\frac{35}{11}}$

$= \frac{22}{7} \times \frac{35}{11} = 10$ वर्ग इकाई

मान लिया कि आयत की चौड़ाई = x

प्रश्नानुसार लंबाई = x + 3

आयत का क्षेत्रफल = वृत्त का क्षेत्रफल

$\Rightarrow x(x+3) = 10$

$\Rightarrow x^2 + 3x - 10 = 0$

yoursmahboob

$$\therefore \quad x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \times 1 \times (-10)}}{2}$$

$$= \frac{3 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{3 \pm 7}{2} = -5, 2$$

पर चौड़ाई ऋणात्मक नहीं हो सकता।

$\therefore$ $x = -5$ को नजरअंदाज कर दें।

$\therefore$ $x = 2$ ही स्वीकार्य है।

$\therefore$ चौड़ाई $= 2$ से.मी.

लंबाई $= 5$ से.मी.

उदा. 23: दोनों सिरों पर खुले हुए किसी पाइप का पृष्ठ क्षेत्रफल 628 वर्ग मीटर के बराबर है। इसकी लंबाई एवं त्रिज्या के बीच का अंतर 15 मीटर है। यदि पाइप का एक सिरा बंद कर दिया जाए तो इसमें कितना पानी आ सकेगा? $(\pi = 3.14)$

हल: मान लिया कि त्रिज्या $= x$

$\therefore$ लंबाई $= x + 15$

पृष्ठ क्षेत्रफल $= 2\pi rh = 628$

$\Rightarrow 6.28x(x + 15) = 628$

$\Rightarrow x(x + 15) = 100$

$\Rightarrow x^2 + 15x = 100$

$\Rightarrow x^2 + 15x - 100 = 0$

सूत्र के सहारे उपर्युक्त द्विघात समीकरण को सरल करने पर:

$$x = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$\therefore$ $x = 5, -20$

पर त्रिज्या ऋणात्मक नहीं हो सकती।

$\therefore$ $x = 5$ ही स्वीकार्य है।

पाइप का आयतन $= \pi r^2 h$

$= 3.14 \times 5^2 \times (5 + 15)$

$= 3.14 \times 25 \times 20 = 1570$ घन मीटर

उदा. 24: प्रमाणित करें कि

$$(a + b - 2c)^3 + (b + c - 2a)^3 + (c + a - 2b)^3$$
$$= 3(a + b - 2c)(b + c - 2a)(c + a - 2b)$$

yoursmahboob

हल: मान लिया कि:

$x = a + b - 2c$

$y = b + c - 2a$

$z = c + a - 2b$

$\therefore\ x + y + z = 0$

इस प्रकार, $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$ [उदा. 7 से]

$$\therefore\ (a+b-2c)^3 + (b+c-2a)^3 + (c+a-2b)^3 = 3(a+b-2c)(b+c-2a)(c+a-2b)$$

उदा. 25: यदि $x + y + z = 16$ एवं $xy + yz + zx = 78$ हो तो $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ का मान निकालें।

हल: $x + y + z = 16$

या, $(x + y + z)^2 = 256$

या, $x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) = 256$

या, $x^2 + y^2 + z^2 + 2 \times 78 = 256$

या, $x^2 + y^2 + z^2 = 100$

इस प्रकार, $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)\{x^2 + y^2 + z^2 - (xy + yz + zx)\}$

$= 16\{100 - 78\} = 352$

उदा. 26: यदि $a = x - y$, $b = x - y$, $c = 2x - 1$ हो तो $a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac - 2bc = ?$

हल: $a^2 + b^2 + c^2 - 2ab + 2ac - 2bc$

$= a^2 + (-b)^2 + c^2 + 2(a)(-b) + 2ac + 2(-b)c$

$= \{a + (-b) + c\}^2 = (a - b + c)^2$

$= (x + y - x + y + 2x - 1)^2 = (2x - 2y - 1)^2$

उदा. 27: $(a^4 + b^4)(a^2 + b^2)(a + b)(a - b)$ का गुणनफल निकालें।

हल: प्रदत्त व्यंजक $= (a^4 + b^4)(a^2 + b^2)(a^2 - b^2)$

$= (a^4 + b^4)(a^4 - b^4) = a^8 - b^8$

उदा. 28: यदि $\left(x - \frac{1}{x}\right) = a$ हो तो $x^3 + \frac{1}{x^3}$ का मान निकालें।

yoursmahboob

हल: $x-\frac{1}{x}=a$ या $\left(x-\frac{1}{x}\right)^3=a^3$

चूँकि, $(a-b)^3=a^3-b^3-3ab(a-b)$, इसलिए

$$\left(x-\frac{1}{x}\right)^3=x^3-\left(\frac{1}{x}\right)^3-3\times\frac{1}{x}\left(x-\frac{1}{x}\right)=a^3$$

या, $x^3-\frac{1}{x^3}-3a=a^3$

$\therefore\ x^3-\frac{1}{x^3}=a^3+3a$

उदा. 29: $\frac{3^{n+4}-6\times3^{n+1}}{3^{n+2}}$ का मान ज्ञात करें।

हल: $$\frac{3^{n+4}-6\times3^{n+1}}{3^{n+2}}=\frac{3^{n+4}-2\times3\times3^{n+1}}{3^{n+2}}$$

$$=\frac{3^{n+4}-2\times3^{n+2}}{3^{n+2}}=\frac{3^{n+2}(3^2-2)}{3^{n+2}}$$

$$=3^2-2=7$$

उदा. 30: यदि $x=2^{1/3}-2^{-1/3}$ तो $2x^3+6x$ का मान ज्ञात करें।

हल: मान लिया कि $2^{1/3}=a$ तब $2^{-1/3}=\frac{1}{2^{1/3}}=\frac{1}{a}$

अब प्रश्नानुसार, $x=a-\frac{1}{a}$

$$\therefore\ 2x^3+6x=2\left\{\left(a-\frac{1}{a}\right)^3+3\left(a-\frac{1}{a}\right)\right\}$$

$$=2\left\{a^3-\frac{1}{a^3}-3\times a\times\frac{1}{a}\times\left(a-\frac{1}{a}\right)+3\left(a-\frac{1}{a}\right)\right\}$$

$$=2\left\{a^3-\frac{1}{a^3}\right\}-2\left\{2-\frac{1}{2}\right\}=2\left(\frac{3}{2}\right)=3$$

yoursmahboob

उदा. 31: $\frac{(a-b)^2}{(b-c)(c-a)}+\frac{(b-c)^2}{(a-b)(c-a)}+\frac{(a-c)^2}{(a-b)(b-c)}$ का मान ज्ञात करें।

हल: प्रदत्त व्यंजक $=\frac{(a-b)^3+(b-c)^3+(a-c)^3}{(a-b)(b-c)(c-a)}$

$$=\frac{3(a-b)(b-c)(c-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)}=3$$

नोट: चूँकि $a-b+b-c+c-a=0$

$\because$ सुविदित conditional identity के अनुसार, जब

$x+y+z=0$ तो $x^3+y^3+z^3=3xyz$

$\therefore (a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3=3(a-b)(b-c)(c-a)$

उदा. 32: यदि $a+b+c=0$ हो तो $\frac{1}{b^2+c^2-a^2}+\frac{1}{c^2+a^2-b^2}+\frac{1}{a^2+b^2-c^2}=?$

हल: $a+b+c=0$

या, $a+b=-c$

या, $(a+b)^2=(-c)^2$

या, $a^2+2ab+b^2=c^2$

या, $a^2+b^2-c^2=-2ab$

इसी तरह, $a^2+c^2-b^2=-2ac$

एवं $b^2+c^2-a^2=-2bc$

$\therefore$ प्रदत्त समीकरण $=\frac{1}{-2bc}+\frac{1}{-2ac}+\frac{1}{-2ab}$

$$=\frac{a+b+c}{2abc}=0 \quad \because a+b+c=0$$

उदा. 33: यदि $x+y+z=0$ हो तो $\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{xyz}$ का मान बताएँ।

हल: $x+y+z=0$

$x+y=-z; y+z=-x; z+x=-y$

$\therefore$ प्रदत्त व्यंजक $=\frac{(-z)(-x)(-y)}{xyz}=-1$

yoursmahboob

उदा. 34: यदि $a+b+c=0$ हो तो $\dfrac{a^4+b^4+c^4}{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}$ का मान बताएँ।

हल: $\because a+b+c=0$

या, $(a+b+c)^2=0$

या, $a^2+b^2+c^2=-2(ab+bc+ca)$

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर,

$$(a^2+b^2+c^2)^2=4(ab+bc+ca)^2$$

या, $a^4+b^4+c^4+2a^2b^2+2b^2c^2+2a^2c^2$

$$=4\{a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2+2abc(a+b+c)\}$$

या, $a^4+b^4+c^4=2(a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2)$

$$\therefore \frac{a^4+b^4+c^4}{a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2}=2$$

उदा. 35: यदि $x+y=2z$ हो तो $\dfrac{x}{x-z}+\dfrac{z}{y-z}=?$

हल: $\because x+y=2z$

या, $x-z=z-y$

$$\therefore \text{प्रदत्त व्यंजक}=\frac{x}{z-y}-\frac{z}{z-y}=\frac{x-z}{z-y}=\frac{z-y}{z-y}=1$$

उदा. 36: यदि $x+\dfrac{1}{y}=1$ एवं $y+\dfrac{1}{z}=1$ हो तो $z+\dfrac{1}{x}$ का मान निकालें:

हल: $x+\dfrac{1}{y}=1$

$$\Rightarrow x=1-\frac{1}{y}=\frac{y-1}{y}$$

$$\therefore \frac{1}{x}=\frac{y}{y-1} \quad \ldots(1)$$

फिर, चूँकि $y+\dfrac{1}{z}=1;\ \dfrac{1}{z}=1-y$

yoursmahboob

$\therefore \quad x = \frac{1}{1-y}$ ....(2)

(1) एवं (2) से, प्रदत्त व्यंजक

$x + \frac{1}{x} = \frac{1}{1-y} + \frac{y}{y-1} = \frac{1-y}{1-y} = 1$

उदा. 37: यदि $a = b = c$ हो तो $\frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2} = ?$

हल: प्रदत्त व्यंजक $= \frac{(3a)^2}{3a^2} = \frac{9a^2}{3a^2} = 3$

प्रमेय: प्रदत्त व्यंजक $\sqrt{x-\sqrt{x+\sqrt{x+....\infty}}}$ का मान n होगा जहाँ $x = n(n+1)$ है इसे उदाहरण के सहारे आसानी से समझा जा सकता है।

उदा. 38: $\sqrt{20-\sqrt{20-\sqrt{20+....\infty}}}$ का मान ज्ञात करें।

हल: ***विस्तार विधि* (Detail Method):**

प्रदत्त व्यंजक $= x$ (माना)

अर्थात् $\sqrt{20-\sqrt{20+\sqrt{20-....\infty}}} = x$

या, $x^2 = 20-\sqrt{20+\sqrt{20-\sqrt{20+....\infty}}} = 20 - x$

या, $x^2 + x - 20 = 0$

या, $x^2 + 5x - 4x - 20 = 0$

या, $x(x+5) - 4(x+5) = 0$

या, $(x-4)(x+5) = 0$

$\therefore x = 4$ एवं -5 [ऋणात्मक मान को नजरअंदाज कर देते हैं]

$\therefore$ अभीष्ट उत्तर $= 4$

***द्रुत विधि* (Quicker Method):**

प्रमेय से,

$x = 20 = 4 \times 5$

$n = 4$ एवं $(n+1) = 5$

$\therefore$ अभीष्ट उत्तर $= 4$

yourshahboob

नोट: $x = n(n+1)$ प्राप्त करने के लिए, x का गुणनखंड निकालते हैं। उपर्युक्त उदाहरण में,

$$\begin{array}{l|l} 2 & 20 \\ \hline 2 & 10 \\ \hline & 5 \end{array} \quad = 4 \times 5$$

प्रमेय: प्रदत्त व्यंजक $\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\ldots\infty}}}$ का मान $(n+1)$ होगा। जहाँ, $x = n(n+1)$ है।

उदा. 39: $\sqrt{20+\sqrt{20+\sqrt{20+\ldots\infty}}}$ का मान ज्ञात करें।

हल: **विस्तार विधि (Detail Method):**

$$\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\ldots\infty}}} = x \quad \text{(माना)}$$

$$\therefore x^2 = 20 + \sqrt{20+\sqrt{20+\sqrt{20}+\ldots\infty}} = 20 + x$$

या, $x^2 - 20 + x = 0$

या, $x^2 - 5x + 4x - 20 = 0$

या, $x(x-5) + 4(x-5) = 0$

या, $x = 5$ एवं -4 [ऋणात्मक मान को नजरअंदाज करते हैं]

$\therefore$ अभीष्ट उत्तर $= 5$

द्रुत विधि (Quicker Method):

प्रमेय से,

$x = 20$ एवं $n = 4$ तथा $n+1 = 5$

$\therefore$ अभीष्ट उत्तर $= 5$

अभ्यास प्रश्न

1. यदि $3x^3 - ax^2 - 74x - b$, $(x^2 + 2x - 24)$ का अपवर्त्य है तो a एवं b का मान है
   1) $a = 5, b = 24$ 2) $a = 5, b = 24$ 3) $a = 13, b = 16$
   4) $a = -13, b = 16$ 5) इनमें से कोई नहीं
2. जब $4x^6 - 5x^3 - 3$ को $x^3 - 2$ से विभाजित किया जाता है तब शेष बचता है
   1) 0 2) 1 3) 2 4) 3 5) इनमें से कोई नहीं
3. $8x^3 - 12x^2 + 4x - 5$ में कितना जोड़ा जाए कि वह $2x + 1$ से पूरी तरह विभाजित हो जाए?
   1) 11 2) 5 3) 6 4) 11 5) इनमें से कोई नहीं
4. a एवं b का मान निकालें, जब
   $f(x) = 2x^3 - ax^2 - 11x + b$, $(x-2)(x+3)$ से पूर्णतया विभाज्य है।
   1) $a = 3, b = 6$ 2) $a = 3, b = -6$ 3) $a = -3, b = 6$
   4) $a = -3, b = -6$ 5) इनमें से कोई नहीं

yoursmahboob

5. यदि $f(x) = 4x^3 - 2x^2 - 5x - 8$ में $(x-2)$ से भाग दिया जाए तो शेष क्या बचेगा?

1) 25 2) 42 3) 16 4) 26 5) इनमें से कोई नहीं

6. $x^n - y^n$ निम्नलिखित में किससे पूर्णतया विभाज्य है?

1) $x - y$ 2) $x + y$ 3) $(x-y)$ एवं $(x+y)$ दोनों से

4) न $(x-y)$ से न ही $(x+y)$ से 5) इनमें से किसी से नहीं

7. $\frac{1}{2}(a+b-c)\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\} = ?$

1) $a^3+b^3+c^3+3abc$ 2) $a^3+b^2+c^2-3abc$

3) $a^3+b^3+c^3+3abc(a+b+c)$ 4) $3abc$ 5) 3

8. यदि $a+b+c=9$ एवं $a^2+b^2+c^2=29$ तो $a^3+b^3+c^3-3abc=?$

1) 9 2) 3 3) 27 4) 81 5) इनमें से कोई नहीं

9. यदि $x=89, y=87$ एवं $z=84$ हो तो $x^3+y^3+z^3-3xyz$ का मान ज्ञात करें।

1) 260 2) 19 3) 4940 4) 4490 5) इनमें से कोई नहीं

10. यदि $x=a(b-c), y=b(c-a)$ एवं $z=c(a-b)$ हो तो $\left(\frac{x}{a}\right)^3+\left(\frac{y}{b}\right)^3+\left(\frac{z}{c}\right)^3=?$

1) $\frac{3xyz}{abc}$ 2) $\frac{xyz}{abc}$ 3) $3xyzabc$

4) 3 5) इनमें से कोई नहीं

11. यदि $x+\frac{1}{x}=3$ हो तो $x^2+\frac{1}{x^2}=?$

1) 3 2) 6 3) 9 4) 27 5) इनमें से कोई नहीं

12. यदि $x-\frac{1}{x}=5$ हो तो $x^2+\frac{1}{x^2}=?$

1) 9 2) 27 3) 81 4) 7 5) 15

13. यदि $a=17, b=15$ एवं $c=11$ हो तो $a^2+b^2+c^2-2ab-2ac-2bc$ का मान क्या होगा?

1) 111 2) 121 3) 225 4) 361 5) इनमें से कोई नहीं

14. जब $x+\frac{1}{x}=3$ हो तो $x^3+\frac{1}{x^3}=?$

1) 9 2) 27 3) 18 4) 21 5) इनमें से कोई नहीं

yoursmanboob

15. जब $a=-5, b=-6$ एवं $c=10$ हो तो $\left(\frac{a^3+b^3+c^3-3abc}{ab+bc+ca \quad a^2-b^2-c^2}\right)$ का मान क्या होगा?

1) -1 2) 1 3) 2 4) -2 5) 3

16. यदि $a=1$ हो तो $15a^3-(3a^2 \quad 1)-(4a^4+a^3 \cdot 3)+(a^3-1)=?$

1) 11 2) 1 3) 10 4) 17 5) इनमें से कोई नहीं

17. यदि $a+b+c=10$ एवं $ab+bc+ca=31$ हो तो $a^2+b^2+c^2=?$

1) 69 2) 162 3) 131 4) 38 5) इनमें से कोई नहीं

18. $(a+1)(1-a)(1-a+a^2)(1+a^6)$ का मान है

1) $1-a^{12}$ 2) $1+a^{12}$ 3) $1+a^{36}$ 4) $1-a^{36}$ 5) इनमें से कोई नहीं

19. यदि $x+y=1$ हो तो x^3+y^3+3xy का मान निकालें।

1) 1 2) 0 3) 2 4) 6 5) इनमें से कोई नहीं

20. $\frac{2^n \times 6^{m+1} \times 10^{m+n} \times 15^{m+n-2}}{4^m \times 3^{2m+n} \times 25^{m-1}}$ का मान निकालें।

1) 2 2) $\frac{2}{3}$ 3) $\frac{1}{3}$ 4) 3 5) इनमें से कोई नहीं

21. व्यंजक $\frac{(a-b)^3+(b-c)^3-(c-a)^3}{(a-b)(b-c)(c-a)}$ का मान क्या है?

1) 1 2) 0 3) 2 4) 3 5) इनमें से कोई नहीं

22. यदि $a+b+c=0$ हो तो $\frac{a^2+b^2+c^2}{a^2-bc}$ का मान निकालें:

1) 0 2) 1 3) 2 4) 3 5) इनमें से कोई नहीं

23. यदि $a+b+c=0$ हो तो $\frac{a^2+b^2+c^2}{c^2 \quad ab}=?$

1) 0 2) 1 3) 2 4) 3 5) इनमें से कोई नहीं

24. यदि $a+b+c=0$ हो तो $\frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}=?$

1) 1 2) 2 3) 3 4) 4 5) इनमें से कोई नहीं

25. यदि $x^2=y+2$, $y^2=z+x$ एवं $z^2=x+y$ हो तो $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}+\frac{1}{z+1}=?$

1) 1 2) -1 3) 2 4) 4 5) इनमें से कोई नहीं

yoursmahboob

उत्तर

1. 1; $x^2+2x-24=(x+6)(x-4)$

चूँकि $(x+6)(x-4)$ प्रदत्त व्यंजक का एक अपवर्त्य है, इसलिए $(x+6)$ एवं $(x-4)$ प्रदत्त व्यंजक को पूर्णतया विभाजित करेंगे अर्थात् यदि हम प्रदत्त व्यंजक को $(x-6)$ एवं $(x-4)$ से विभाजित करें तो कुछ भी शेष नहीं बचेगा। इस प्रकार शेषफल प्रमेय के अनुसार,

$f(-6)=3(-6)^3-a(-6)^2-74(-6)+b=0$

और $f(4)=3(4)^3-a(4)^2-74(4)+b=0$

इन दोनों समीकरणों को सरल करने पर हमें a एवं b का मान प्राप्त होता है

2. 4; $x^3=y$ रखने पर भाजक $-y-2$ एवं प्रदत्त व्यंजक $-4y^2-5y-3$

शेषफल प्रमेय के अनुसार, शेष $-f(2)-4(2)^2-5(2)-3-3$

3. 1; शेषफल प्रमेय के अनुसार, शेष $=f\left(-\frac{1}{2}\right)=8\left(-\frac{1}{2}\right)^3-12\left(-\frac{1}{2}\right)^2+4\left(-\frac{1}{2}\right)-5$

$=-1-3-2-5=-11$

व्यंजक के पूर्णतया विभाज्य होने के लिए शेष शून्य होना चाहिए। इसलिए व्यंजक में 11 जोड़ दिया जाता है।

4. 2: $f(2)=2(2)^4+a(2)^2-11\times2+b=0$

या, $16+4a-22+b=0$

या, $4a+b=6$ ....(1)

$f(-3)=2(-3)^4+a(-3)^2-11(-3)+b=0$

या, $-54+9a+33+b=0$

या, $9a-b=21$ ....(2)

(1) एवं (2) को सरल करने पर हमें a एवं b का मान प्राप्त होता है

5. 4; $f(2)=4(2)^3-2(2)^2+5(2)-8=32-8+10-8=26$

6. 1; x^n-y^n, $(x-y)$ से पूर्णतया विभाज्य है, n के किसी भी धन पूर्णांक के लिए (सिद्ध कर विपन)

7. 2; $\frac{1}{2}(a+b+c)\{2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ac\}$

$=(a+b+c)\{a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac\}$

$=a^3+b^3+c^3-3abc$

yoursmahboob

8.3; $a+b+c=9$

या, $(a+b+c)^2=81$

या, $a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ac)=81$

या, $29+2(ab+bc+ac)=81$

या, $(ab+bc+ac)=\frac{81-29}{2}=26$

फिर, $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)\{a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac\}$

$=9(29-26)=27$

9.3; निम्नलिखित सूत्र का इस्तेमाल करें:

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=\frac{1}{2}(x+y+z)\{(x-y)^2+(y-z)^2+(x-z)^2\}$$

10.1; $\frac{x}{a}=b-c,\ \frac{y}{b}=c-a,\ \frac{z}{c}=a-b$

$\therefore\ \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=0$

अब सुविदित Conditional Identity का इस्तेमाल करें।

यदि $l+m+n=0$ हो तो, $l^3+m^3+n^3=3lmn$

11.5; $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=3^2=9$

या, $x^2+\frac{1}{x^2}+2x\frac{1}{x}=9$

$\therefore\ x^2+\frac{1}{x^2}=9-2=7$

12.2; $\left(x-\frac{1}{x}\right)^2=25$

$\therefore\ x^2+\frac{1}{x^2}=25+2=27$

13.2; उपरत व्यंजक $=(a-b-c)^2=(17-15-13)^2=(-11)^2=121$

14.3; $\left(x+\frac{1}{x}\right)^3=27$

yoursmahboob

या, $x^3+\frac{1}{x^3}+3\times x\times\frac{1}{x}\left(x+\frac{1}{x}\right)=27$

या, $x^3+\frac{1}{x^3}+3\times 3=27$

$\therefore\ x^3+\frac{1}{x^3}=18$

15. 2; प्रदत्त व्यंजक $=(a-b+c)$ (इसे प्राप्त करें)

$=(5-6-10)=(-1)=-1$

16. 1; $15a^3-3a^3-a^3+a^3-4a^4+1+3-1$

$=12a^3-4a^4+3=12-4+3=11$

17. 4; $a+b+c=10$

या, $(a+b+c)^2=100$

या, $a^2-b^2-c^2+2(ab+bc-ac)=100$

$\therefore\ a^2+b^2+c^2=100-2(31)=38$

18. 1; प्रदत्त व्यंजक $=\{(a-1)(1-a+a^2)\}\{(1-a)(1+a+a^2)\}\{1+a^6\}$

$=(1+a^3)(1-a^3)(1-a^6)$

$=(1-a^6)(1+a^6)=1-a^{12}$

नोट: यहाँ $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$ सूत्र का इस्तेमाल किया गया है.

19. 1; $x+y=1$

या, $(x+y)^3=1$

या, $x^3+y^3+3xy(x+y)=1$

या, $x^3+y^3+3xy=1$

20. 2; प्रदत्त व्यंजक $=\frac{2^n\times 2^{m+1}\times 3^{m+1}\times 2^{m-1}\times 5^{m-n}\times 3^{m-n-2}\times 5^{m+n-2}}{2^{2m}\times 5^{2m-n}\times 5^{2m-2}}$

$=\frac{2^{2m+1}\times 3^{2m+n-1}\times 5^{2m-2}}{2^{2m}\times 3^{2m-n}\times 5^{2m-2}}=\frac{2}{3}$

21. 4; जब $x+y+z=0$ हो तो $x^3+y^3+z^3=3xyz$

yoursmahboob

या, $\dfrac{x^3+y^3+z^3}{xyz}=3$

उस स्थिति में $(a-b)+(b-c)+(c-a)=0$

22. 3; $a+b-c=0$

या, $(a+b+c)^2=0$

या, $a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ac)=0$

या, $a^2+b^2+c^2=-\{bc+a(b+c)\}$

$=-\{-2(bc-a(-a))\}$

$=-2(bc-a^2)=2(a^2-bc)$

$\therefore \dfrac{a^2+b^2-c^2}{a^2-bc}=2$

23. 3; प्रश्न सं. 22 के अनुरूप हल करें.

24. 4; $(a+b+c)^2=0$

या, $a^2+b^2+c^2=-2(ab+bc+ca)$

या, $(a^2+b^2+c^2)^2=4(ab+bc+ac)^2$

$=4\{a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2+2abc(a+b+c)\}$

$=4\{a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2\}$ $(\because a+b+c=0)$

$\therefore \dfrac{(a^2+b^2+c^2)^2}{a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2}=4$

25. 1; $x^2=y+z, y^2=z+x$ एवं $z^2=x+y$

या, $x+x^2=x+y+z, y+y^2=x+y+z$, और $z+z^2=x+y+z$

या, $x+x^2=y+y^2=z+z^2=x+y+z=k$ (मान लें)

या, $x(1+x)=y(1+y)=z(1+z)=k$

$\therefore \dfrac{1}{1+x}=\dfrac{x}{k}, \dfrac{1}{1+y}=\dfrac{y}{k}$ एवं $\dfrac{1}{1+z}=\dfrac{z}{k}$

$\therefore$ प्रदत्त व्यंजक $=\dfrac{x}{k}+\dfrac{y}{k}+\dfrac{z}{k}=\dfrac{x+y+z}{k}=\dfrac{k}{k}=1$

yoursmahboob

अनुपात एवं समानुपात
(Ratio and Proportion)

जब कभी यह कहा जाता है कि रेखा AB की लंबाई 5 सेंटी मीटर है, तो इसका तात्पर्य है कि लंबाई का मात्रक सेंटी मीटर, AB रेखा में 5 बार सम्मिलित है. यदि दो रेखाएँ AB एवं CD की लंबाई क्रमशः 2 एवं 3 सेंटी मीटर हो तो कहा जाता है कि AB की लंबाई CD की लंबाई का $\frac{2}{3}$ है।

अनुपात (Ratio): यदि दो राशियाँ एक ही किस्म की हों तो एक राशि में दूसरी राशि जितनी बार समाहित होती है, उसे उन दो राशियों का अनुपात कहते हैं।

स्पष्टतः दो राशियों का अनुपात वह भिन्न है, जिसके द्वारा एक राशि के पदों में दूसरी राशि को अभिव्यक्त किया जा सकता है।

इस बात का ध्यान रखें कि दोनों राशियाँ एक ही किस्म की हों 20 कि. ग्रा. एवं 30 कि. ग्रा. का अनुपात निकाला जा सकता है पर 20 कि. ग्रा. एवं 30 आम का अनुपात नहीं निकाला जा सकता।

2 और 3 के अनुपात को 2 : 3 या $\frac{2}{3}$ लिखा जाता है तथा (:) के चिह्न को इस तू (is to) पढ़ा जाता है। 2 एवं 3 अनुपात के पद (terms of the ratio) कहे जाते हैं। 2 पहला पद है एवं 3 दूसरा पद।

अनुपात का पहला पद, पूर्व पद (antecedent) कहलाता है तथा दूसरे पद को अंतिम पद (consequent) कहते हैं।

अनुपात 2:3 में 2 पूर्व पद (antecedent) एवं 3 अंतिम पद (consequent) है।

'antecedent' का शाब्दिक अर्थ है 'पूर्ववर्ती' तथा consequent का शाब्दिक अर्थ है 'अनुवर्ती'। चूँकि किसी निश्चित राशि को उसी किस्म की दूसरी राशि से विभाजित करने पर जो परिफल प्राप्त होता है, उसमें किसी मात्रक का अभाव होता है, इसलिए दो निश्चित राशियों के बीच का अनुपात एक निरपेक्ष संख्या (abstract number) है। उदाहरण के लिए 5 कि. ग्रा. एवं 7 कि. ग्रा. के बीच का अनुपात 5 : 7 है।

यदि किसी भिन्न के अंश एवं हर दोनों में समान संख्या से गुणा किया जाए या विभाजित किया जाए तो उसका मान अपरिवर्तित रहता है। इसी तरह किसी अनुपात (जो कि एक भिन्न ही है) के दोनों पदों में समान संख्या से गुणा करने या भाग देने पर वह अनुपात अपरिवर्तित रहता है।

उदाहरण के लिए,

3 : 5 = 6 : 10 एवं 15 : 20 = 3 : 4

मिश्रित अनुपात (Compound Ratio)

परिभाषा: दो या दो से अधिक अनुपात के पूर्व पदों के गुणनफल तथा अंतिम पदों के गुणनफल से बने नए अनुपात को मिश्रित अनुपात कहते हैं।

yoursmahboob

उदा. निम्नलिखित चार अनुपातों का एक मिश्रित अनुपात प्राप्त करें:
4 : 3, 9 : 13, 26 : 5, 2 : 15

हल: अभीष्ट अनुपात – $\frac{4\times9\times26\times2}{3\times13\times5\times15}=\frac{16}{25}$

परिभाषा: जब अनुपात 4 : 3 को स्वयं उसी के साथ मिश्रित किया जाता है तो परिणामी अनुपात के रूप में $4^2:3^2$ प्राप्त होता है। इसे वर्गानुपात (duplicate ratio) कहते हैं

इसी तरह $4^3:3^3$ को 4 : 3 का तिहरा अनुपात (triplicate ratio) कहा जाता है।

$\sqrt{4}:\sqrt{3}$ को 4 : 3 का आधा अनुपात (subduplicate ratio) कहा जाता है।

$\sqrt[3]{4}:\sqrt[3]{3}$ को 4 : 3 का तिहाई अनुपात (subtriplicate ratio) कहते हैं।

***विलोम अनुपात* (Inverse Ratio):** यदि एक अनुपात 2 : 3 हो तो उसका विलोम अनुपात है $\frac{1}{2}:\frac{1}{3}=3:2$ अर्थात् किसी अनुपात के पदों को पलट देने पर जो नया अनुपात प्राप्त होता है उसे विलोमानुपात या व्युत्क्रम अनुपात (inverse ratio या reciprocal ratio) कहते हैं।

यदि पूर्व पद = अंतिम पद तो अनुपात को समान अनुपात (ratio of equality) कहते हैं जैसे, 3 : 3।

यदि पूर्व पद > अंतिम पद तो अनुपात को महत्तर असमानता का अनुपात (ratio of greater inequality) कहते हैं, जैसे 4 : 3।

यदि पूर्व पद < अंतिम पद तो अनुपात को लघुतर असमानता का अनुपात (ratio of less inequality) कहते हैं, जैसे 3 : 4।

उदा. 1: 1458 को दो ऐसे हिस्सों में विभाजित करें, ताकि एक हिस्सा दूसरे का 2:7 हो।

हल: पहला हिस्सा $=2\times\frac{1458}{2+7}=2\times\frac{1458}{9}=324$; दूसरा हिस्सा – $7\times\frac{1458}{9}=1134$

उदा. 2: तीन ऐसी संख्याएँ प्राप्त कीजिए जो आपस में 1:2:3 के अनुपात में हो तथा उनके वर्ग का योग 504 के बराबर हो।

हल: मान लिया कि संख्याएँ x, 2x एवं 3x हैं।

प्रश्नानुसार, $x^2+(2x)^2+(3x)^2=504$ या, $14x^2=504$ ∴ $x=6$

अभीष्ट संख्याएँ = 6, 12 एवं 18

उदा. 3: A, B, C, D एक ही किस्म की चार राशियाँ हैं और A : B = 3 : 4, B : C = 8 : 9, C : D = 15 : 16

तो i) A : D = ? ii) A : B : C : D = ?

हल: i) $\frac{A}{B}=\frac{3}{4},\frac{B}{C}=\frac{8}{9},\frac{C}{D}=\frac{15}{16}$

yoursmahboob

$$\therefore \frac{A}{D} = \frac{A}{B} \times \frac{B}{C} \times \frac{C}{D} = \frac{3}{4} \times \frac{8}{9} \times \frac{15}{16} = \frac{5}{8}$$

$\therefore$ A : D = 5 : 8

ii) पहले अनुपात को यथास्थिति बनाए रखें तथा दूसरे अन्य अनुपातों के पदों में इस प्रकार का परिवर्तन लाएँ कि एक का अंतिम पद अपने बाद वाले अनुपात के पूर्व पद के बराबर हो जाए।

A : B = 3 : 4 .....(1)

B : C = 8 : 9 .....(2)

$= 1 : \frac{9}{8}$ (8 से भाग देने पर)

$= 4 : \frac{9}{8} \times 4$ (4 से गुणा करने पर)

$= 4 : \frac{9}{2}$ .....2(i)

C : D = 15 : 16 .....(3)

$= 1 : \frac{16}{15}$ (15 से भाग देने पर)

$= \frac{9}{2} : \frac{16}{15} \times \frac{9}{2}$ ($\frac{9}{2}$ से गुणा करने पर)

$= \frac{9}{2} : \frac{24}{5}$ .....3(i)

$\therefore$ A : B : C : D = $3 : 4 : \frac{9}{2} : \frac{24}{5}$ = 30 : 40 : 45 : 48

नोट: 1. समीकरण (2) में B = 8 है अनुपात के समतुल्य बनाने के लिए (2) के 8 को घटाकर 4 करना होगा क्योंकि (1) में B = 4 है।

2. समीकरण (3) में C = 15 है अनुपातों को समतुल्य बनाने के लिए (3) के 15 को घटाकर $\frac{9}{2}$ करना होगा क्योंकि 2(i) में C = $\frac{9}{2}$ है।

उदा. 4: यदि A : B = 1 : 2, B : C = 3 : 4, C : D = 6 : 9 एवं D : E = 12 : 16 हो तो A : B : C : D : E का मान निकालें।

हल: A : B = 1 : 2 = 3 : 6

B : C = 3 : 4 = 6 : 8

C : D = 6 : 9 = 8 : 12

D : E = 12 : 16

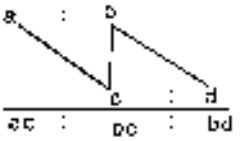
$\therefore$ A : B : C : D : E = 3 : 6 : 8 : 12 : 16

yourmahboob

नोट: उपर्युक्त उदाहरण में हमने नीचे से गणना शुरू की है क्योंकि इससे सवाल को हल करना हो जाता है।

प्रमेय : यदि पहली एवं दूसरी राशियों के बीच का अनुपात $a : b$ हो तथा दूसरी एवं तीसरी राशियों के बीच का अनुपात $c : d$ है, तो पहली, दूसरी एवं तीसरी राशियों के बीच का अनुपात $ac : bc : bd$ होगा।

उपर्युक्त अनुपात को निम्नलिखित तरीके से दर्शाया जा सकता है



प्रमाण: पहला : दूसरा $= a : b$ एवं

दूसरा : तीसरा $= c : d$

दोनों अनुपातों को समतुल्य करने के लिए, हमें पहला अनुपात का अंतिम पद (b) एवं दूसरा अनुपात का पहला पद (c) के समतुल्य करना होगा। इसलिए हम पहला अनुपात को c से तथा तीसरा अनुपात को b से गुणा करते हैं

इस प्रकार

पहला : दूसरा $= ac : bc$

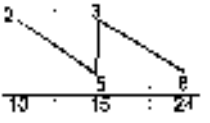
दूसरा : तीसरा $= bc : bd$

$\therefore$ पहला : दूसरा : तीसरा $= ac : bc : bd$

उदा. 5: तीन संख्याओं का योग 98 है। यदि पहली एवं दूसरी संख्या का अनुपात 2:3 है तथा दूसरी एवं तीसरी संख्या का अनुपात 5:8 है तो दूसरी संख्या ज्ञात करें

हल: उपर्युक्त प्रमेय से सीधा दूसरी संख्या ज्ञात नहीं की जा सकती है परंतु हम तीनों संख्याओं के अनुपात को ज्ञात कर सकते हैं।

तीनों संख्याओं के अनुपात

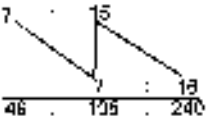


$$\therefore \text{ दूसरी संख्या } = \frac{98}{10+15+24} \times 15 = 30$$

उदा. 6: रीता एवं सीता के धनों का अनुपात 7 : 15 है एवं सीता एवं कविता के धनों का अनुपात 7:16 है। यदि रीता के पास 490 रु. हो तो कविता के पास कितना धन है?

हल: रीता : सीता : कविता

yoursmahboob

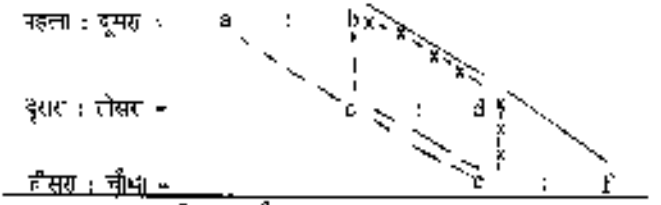


रीता, सीता एवं कविता के धनों का अनुपात = 49 : 105 : 240

प्रश्नानुसार, हम देखते हैं कि,

$49 \equiv 490$ रु. $\therefore$ 240 रु. = 2400

प्रमेय: यदि पहली एवं दूसरी राशि के बीच का अनुपात $a:b$ हो, दूसरी एवं तीसरी राशि के बीच का अनुपात $c:d$ हो तथा तीसरी एवं चौथी राशि के बीच का अनुपात $e:f$ हो तो पहली, दूसरी, तीसरी एवं चौथी राशियों का अनुपात निम्नलिखित होगा।



प्रमाण: इसका प्रमाण पिछले प्रमेय के जैसा ही आसानी से किया जा सकता है।

उदा. 7: यदि $A:B = 3:4$, $B:C = 8:10$ एवं $C:D = 15:17$ हो तो $A:B:C:D$ ज्ञात करें।

हल: $A:B = 3:4$

$B:C = 9:10$

$C:D = 15:17$

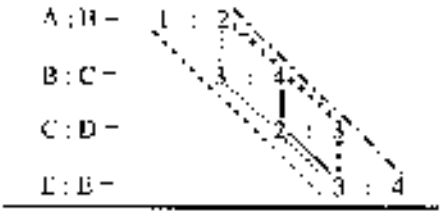
$A:B:C:D = 3\times8\times15 : 4\times8\times15 : 4\times10\times15 : 4\times10\times17$

$= 9:12:15:17$

नोट: 1. उदा. 3 को उपर्युक्त प्रमेय के सहारे हल किया जा सकता है।

2. यदि $A:B = 1:2$, $B:C = 3:4$, $C:D = 2:3$ एवं $D:E = 3:4$ हो तो $A:B:C:D:E$ ज्ञात करें

हल:



$A:B:C:D:E = 1\times3\times2\times3 : 2\times3\times2\times3 : 2\times4\times2\times3 : 2\times4\times3\times3 : 2\times4\times3\times4$

$= 3:6:8:12:16$

yoursnaibood

उदा. 8: एक शिकारी कुत्ता खरगोश का पीछा करता है और जितनी देर में खरगोश 6 छलाँग लगाता है उतनी ही देर में कुत्ता 5 छलाँगें लगा पाता है लेकिन कुत्ते की चार छलाँगें खरगोश की 5 छलाँगों के बराबर है कुत्ते एवं खरगोश के छलाँग लगाने की दर की तुलना कीजिए।

हल: कुत्ते की 4 छलाँगें = खरगोश की 5 छलाँगें

$\therefore$ कुत्ते की 5 छलाँगें = खरगोश की $\frac{25}{4}$ छलाँगें

$\therefore$ कुत्ते की दर : खरगोश की दर $= \frac{25}{4} : 6 = 25 : 24$

या,

अनुपात	कुत्ता	खरगोश
छलाँग की आवृत्ति का	5	6
छलाँग की लंबाई का	4	5

तब गति का आपेक्षिक अनुपात चार गुणनों के अनुपात के बराबर है।

अर्थात् कुत्ते की चाल : खरगोश की चाल $= 5 \times 5 : 6 \times 4 = 25 : 24$

उदा. 9: A किसी काम का एक हिस्सा 12 दिनों में संपन्न करता है। B की कार्यक्षमता A की अपेक्षा 60% प्रतिशत अधिक है तो उतने ही काम को B कितने दिनों में संपन्न करेगा?

हल:

	A	:	B
कार्यक्षमता	100	:	160
दिन	160	:	100
या,	8	:	5

$\therefore$ B द्वारा लिया गया समय $= \frac{12}{8} \times 5 = \frac{15}{2} = 7\frac{1}{2}$ दिन

अथवा,

B चूँकि अधिक कार्यक्षम (efficient) है। इसलिए वह अपेक्षाकृत कम समय में काम पूरा कर लेगा इसलिए दिनों की संख्या (12) में एक ऐसे भिन्न से गुणा करना होगा, जिसका मान 1 से कम हो, और वह भिन्न है।

$\frac{100}{100+60}$ अर्थात् $\frac{100}{160}$

$\therefore$ अपेक्षित दिनों की संख्या $= 12 \times \frac{100}{160} = \frac{12 \times 5}{8} = \frac{15}{2} = 7\frac{1}{2}$ दिन

उदा. 10: एक व्यक्ति 12 लिटर दूध में 3 लिटर पानी मिलाता है और दूसरा 10 लिटर दूध में 2 लिटर पानी मिलाता है। दोनों प्रकार के मिश्रणों में दूध की सांद्रता (strength) का क्या अनुपात है?

yoursmahboob

हल: पहले मिश्रण में दूध की सांद्रता (strength) $= \frac{12}{12+3} = \frac{12}{15}$

दूसरे मिश्रण में दूध की सांद्रता (strength) $= \frac{10}{10+4} = \frac{10}{14}$

$\therefore$ उनकी सांद्रता (strength) का अनुपात $= \frac{12}{15} : \frac{10}{14} = 12 \times 14 : 15 \times 10 = 28 : 25$

उदा. 11: 425 रु. को 4 पुरुषों, 5 महिलाओं एवं 6 बच्चों के बीच इस प्रकार बाँटा जाता है कि एक पुरुष, एक महिला एवं एक बच्चा का हिस्सा 9 : 8 : 4 के अनुपात में है। महिलाओं का हिस्सा बताएँ।

हल: पुरुषों, महिलाओं एवं बच्चों के हिस्से का अनुपात $= 9 \times 4 : 8 \times 5 : 4 \times 6$
$= 36 : 40 : 24$

$\therefore$ 5 महिलाओं का हिस्सा (share) $= \frac{425}{36+40+24} \times 40 = 170$ रु.

$\therefore$ एक महिला का हिस्सा $= \frac{170}{5} = 34$ रु.

उदा. 12: यदि एक दर्पण दपण से भग्न एक बक्से गिर दिया जाए तो निम्नलिखित में से कौन सा टूटे (broken mirror) एवं सलामत बचे दर्पण (unbroken mirror) के अनुपात को निर्दिष्ट नहीं करता है?

1) 2 : 1 2) 3 : 1 3) 3 : 2 4) 1 : 1 5) 7 : 5

हल: बक्से में 12 दर्पण हैं। इसलिए अनुपात के पदों का योग 12 को पूर्णतया विभाजित करना चाहिए। यहाँ 2 + 1 = 3, 12 को पूरी तरह विभाजित करता है। इसी तरह 3 + 1 = 4 भी 12 को पूर्णतया विभाजित करता है, पर 3 + 2 = 5, 12 को पूर्णतया विभाजित नहीं करता।
$\therefore$ हमारा सही उत्तर = (3) है।

समानुपात (Proportion)

निम्नलिखित दो अनुपातों पर विचार कीजिए:

पहला अनुपात	दूसरा अनुपात
6 : 18	8 : 24

चूँकि 6, 18 का एक-तिहाई है और 8, 24 का एक तिहाई है, इसलिए दोनों अनुपात आपस में बराबर हैं। अनुपातों की इस समानता को **समानुपात** कहा जाता है।

संख्याएँ 6, 18, 8, 24 समानुपाती हैं, ऐसा कहने का विधान है। समानुपात को निम्न प्रकार से लिखा जाता है।

6 : 18 :: 8 : 24 (लिक्स 'हज टू' एटीन 'ऐज' एट इज टू ट्वेंटी फोर)

या, 6 : 18 = 8 : 24

या, $\frac{6}{18} = \frac{8}{24}$

yourmahboob

6, 18, 8 एवं 24 को पद कहा जाता है। 6 पहला पद है, 18 दूसरा, 8 तीसरा एवं 24 चौथा पद है।

पहला एवं चौथा पद, (यहाँ 6 एवं 24) को अंत्य या बाह्य पद (extreme) कहा जाता है तथा दूसरे एवं तीसरे पद को मध्य पद (means या middle terms) कहा जाता है। 24 को चौथा समानुपाती (fourth proportional) कहते हैं।

1. यदि चार राशियाँ समानुपाती हों तो अंत्य या बाह्य पदों का गुणनफल मध्य पदों के गुणनफल के बराबर होता है।

मान लिया कि 3, 4, 9 एवं 12 समानुपाती हैं तो $\frac{3}{4} = \frac{9}{12}$

दोनों अनुपातों में 4×12 से गुणा करने पर, $\frac{3}{4} \times 4 \times 12 = \frac{9}{12} \times 4 \times 12$

$\therefore\ 3 \times 12 = 4 \times 9$

2. एक ही प्रकार की तीन राशियाँ उस समय वितत समानुपात (continued proportion) कही जाती हैं जब पहले एवं दूसरे पद का अनुपात दूसरे एवं तीसरे पद के अनुपात के बराबर हो।

दूसरी राशि को पहले एवं तीसरे का मध्य समानुपाती कहा जाता है एवं तीसरी राशि को पहले एवं दूसरे का तीसरा समानुपाती कहा जाता है।

इस प्रकार 9, 6 एवं 4 वितत समानुपाती हैं क्योंकि $9 : 6 :: 6 : 4$

इसलिए 9 एवं 4 का मध्य समानुपाती 6 है तथा 9 एवं 6 का तीसरा समानुपाती 4 है।

उदा. 1: 6, 8 एवं 15 का चौथा समानुपाती निकालें।

हल: यदि x चौथा समानुपाती हो तो

$6 : 8 = 15 : x$

$\therefore\ x = \frac{8 \times 15}{6} = 20$

उदा. 2: 15 एवं 20 का तीसरा समानुपाती बताएँ।

हल: यहाँ हमलोगों को 15, 20 एवं 20 का चौथा समानुपाती प्राप्त करना है। मान लिया की चौथा समानुपाती x है, तब,

$15 : 20 = 20 : x$

$\therefore\ x = \frac{20 \times 20}{15} = \frac{80}{3} = 26\frac{2}{3}$

उदा. 3: 3 एवं 75 का मध्य समानुपाती क्या है?

हल: यदि अभीष्ट मध्य समानुपाती x हो तो

$3 : x :: x : 75$

$\therefore\ x = \sqrt{3 \times 75} = 15$

नोट: उपर्युक्त उदाहरण से यह स्पष्ट है कि दो संख्याओं का मध्य समानुपाती उनके गुणनफल के वर्गमूल के बराबर होता है। **[स्मरणीय]**

yourmahboob

समानुपात 3 : 21 :: 5 : 35 पर विचार करें। यहाँ चौथा पद तीसरे पद से बड़ा है एवं दूसरा पद दूसरे पद से बड़ा है।

अब समानुपात 21 : 9 :: 35 : 5 को लीजिए। यहाँ चौथा पद तीसरे पद से छोटा है और दूसरा पद पहले पद से छोटा है।

आप कोई भी समानुपात ले लें। आप पाएँगे कि

a) यदि चौथा पद तीसरे पद से बड़ा है तो दूसरा पद भी पहले पद से बड़ा होगा।

b) यदि चौथा पद तीसरे पद से छोटा है तो दूसरा पद भी पहले पद से छोटा होगा।

समानुपात 5 : 15 :: 8 : x पर विचार कीजिए। यहाँ पहला, दूसरा एवं तीसरा पद दिया हुआ है और हमें चौथे पद का पता लगाना है। अज्ञात पद को x से सूचित करते हैं। हमें x का पता लगाना है।

चूँकि अंत्य पदों का गुणनफल मध्यपदों के गुणनफल के बराबर होता है, इसलिए,

$$5 \times x = 15 \times 8 \quad \therefore x = \frac{15 \times 8}{5} = 24$$

इस प्रकार चौथा पद निम्नलिखित नियम के सहारे प्राप्त किया जा सकता है

नियम: दूसरे एवं तीसरे पद को आपस में गुणा कीजिए एवं पहले पद से भाग दीजिए

अब हम निश्चित राशियों से युक्त कुछ उदाहरण लेंगे।

अनुलोम अनुपात* (Direct Proportion): *निम्नलिखित उदाहरण पर विचार कीजिए।

उदा.: यदि 5 बॉल की कीमत 8 रु. है तो 15 बॉल की कीमत क्या होगी?

हल: स्पष्ट है कि यदि बॉल की संख्या 2, 3, 4 ... गुनी बढ़ा दी जाए तो कीमत भी 2, 3, 4 ... गुनी बढ़ जाती है। इस प्रकार 5 बॉल व 15 बॉल का वही रिश्ता है जो कि 5 बॉल की कीमत व 15 बॉल के कीमत की।

$\therefore$ 5 बॉल : 15 बॉल :: 8 रु. : अभीष्ट कीमत

$$\therefore \text{ अभीष्ट कीमत} = \frac{15 \times 8}{5} = 24 \text{ रु.}$$

उपर्युक्त उत्तर को हम तीर के संकेत द्वारा भी प्रदर्शित कर सकते हैं एवं प्रश्न को निम्न विधि से हल कर सकते हैं।

इस विधि में राशियों को एक पंक्ति में लिखते हैं तथा जिस राशि का मान निकालना होता है उसे नीचे में रखते हैं। जैसे यहाँ पर पहले बॉल लिखेंगे फिर कीमत। तत्पश्चात् अज्ञात राशि को x मान लेते हैं और अंतिम पंक्ति (column) में तीर का चिह्न ऊपर से नीचे की ओर लगाते हैं, जैसे यहाँ पर 15 बॉल की कीमत को x रु. मानकर अंतिम पंक्ति में लिखकर वहाँ पर तीर का चिह्न लगाते हैं। उपर्युक्त क्रिया निम्नलिखित रूप में प्रदर्शित होगी।

बॉल (संख्या)	कीमत (रुपए)
5	8 ↓
15	x ↓

अब दो हुई राशियों का संबंध ज्ञात करते हैं। जैसे यहाँ पर बॉल एवं कीमत में संबंध।

yourshanbooo

हम देख चुके हैं कि यह संबंध सीधा है। अतः पहली पंक्ति में उसी दिशा में तीर का चिह्न बनाते हैं जिस दिशा में अंतिम पंक्ति में था अर्थात् ऊपर से नीचे की ओर। इसके बाद दोनों प्रकार की राशियों के बीच समानुपात का चिह्न (::) लगा देते हैं, अब स्थिति निम्न प्रकार की होगी।

बोरे (संख्या)		कीमत (रुपए)
5 ↓	::	8 ↓
15		x

अब तीर के चिह्न को अनुपात में बदल देते हैं। इस क्रिया के लिए पहले तीर के पूँछ की तरफ वाली संख्या लिखते हैं, फिर (:) चिह्न लगाकर तीर के नोक की तरफ वाली संख्या लिखते हैं। अर्थात् उपर्युक्त को हम इस प्रकार लिखेंगे।

$$5 : 15 :: 8 : x$$

अब बाह्य पदों का गुणनफल तथा मध्य पदों का गुणनफल लेकर उनके बीच बराबर का चिह्न (=) लगाकर प्रश्न हल कर लेते हैं। अर्थात्

$$5 \times x = 15 \times 8 \quad \therefore x = \frac{15 \times 8}{5} = 24 \text{ रु}$$

यहाँ ध्यान रहे कि तीर का चिह्न केवल राशियों के संबंध को प्रकट करने के लिए है। अतः तीर का चिह्न लगाते समय, राशियों के नीचे लिखी संख्याओं पर ध्यान नहीं देना चाहिए, बल्कि इन संख्याओं को नजरअंदाज करते हुए केवल ज्ञात करना चाहिए कि एक राशि को बढ़ाने पर दूसरी राशि बढ़ेगी या घटेगी। यदि बढ़ेगी तो सीधा संबंध है, नहीं तो उल्टा।

उपर्युक्त उदाहरण अनुलोम समानुपात का उदाहरण है। यहाँ दो प्रदत्त राशियाँ एक-दूसरे से इस तरह संबद्ध हैं कि यदि इनमें से एक में किसी संख्या से गुणा किया जाता है या भाग दिया जाता है तो दूसरी में भी उसी संख्या से गुणा किया जाता है या भाग दिया जाता है।

प्रतिलोम समानुपात* (Inverse Proportion): *निम्नलिखित उदाहरण देखिए

उदा. यदि 15 व्यक्ति किसी खेत को 28 दिनों में काट सकते हैं तो 10 व्यक्ति उसी खेत को कितने दिनों में काटेंगे?

हल: स्पष्ट है कि यहाँ यदि व्यक्तियों की संख्या 2, 3, 4 गुनी बढ़ा दी जाए तो दिनों की संख्या 2, 3, 4 ... गुनी कम हो जाएगी। इसलिए मनुष्य की संख्या का प्रतिलोम अनुपात संगत दिनों के अनुपात के बराबर होता है।

$$\therefore \frac{1}{15} : \frac{1}{10} :: 28 : \text{अभीष्ट दिनों की संख्या}$$

या, 10 : 15 :: 28 : अभीष्ट दिनों की संख्या

$$\therefore \text{अभीष्ट दिनों की संख्या} = \frac{15 \times 28}{10} = 42$$

उपर्युक्त सम्बन्ध तथा क्रिया को तीर के संकेत द्वारा भी निम्न प्रकार से प्रदर्शित कर सकते हैं। जैसा कि पहले बताया जा चुका है राशियाँ (यहाँ व्यक्ति एवं दिन) को एक पंक्ति

yousmanbooks

में लिखते हैं तथा जिस राशि का मान ज्ञात करना होता है उसे अंत में लिखते हैं (यहाँ पर समय)। फिर अज्ञात राशि (यहाँ पर 10 व्यक्तियों के द्वारा खेत काटने का समय) को x मान लेते हैं। तथा अंतिम पंक्ति में ऊपर से नीचे की ओर तीर का चिह्न बना लेते हैं। अब राशियों (व्यक्ति एवं समय) का सम्बन्ध ज्ञात करते हैं जो कि उलटा है। अतः पहली पंक्ति में, अन्तिम पंक्ति के तीर की उल्टी दिशा में (नीचे से ऊपर की ओर) तीर का चिह्न बनाते हैं। अतः उपर्युक्त समस्या में निम्नलिखित स्थिति बनेगी।

व्यक्ति (संख्या)	समय (दिन)
15 ↑	28 ↓
10	x

अब जैसा कि पहले बताया जा चुका है तीर की दिशा में चलकर तीर को अनुपात में परिवर्तित कर लेते हैं। इस प्रकार, उपर्युक्त को निम्न प्रकार से लिखा जा सकता है।

$10 : 15 :: 28 : x$

या $10 \times x = 15 \times 28$

$$\therefore x = \frac{15 \times 28}{10} = 42$$

उपर्युक्त उदाहरण प्रतिलोम समानुपात (Inverse Proportion) की व्याख्या है। ऐसे समानुपात में दो राशियाँ इस प्रकार जुड़ी होती हैं कि यदि एक में किसी संख्या से गुणा किया जाए तो दूसरा उसी संख्या से विभाजित हो जाता है। इसका विलोम भी सत्य है

मिश्र समानुपात (Compound Proportion)

जब तीन या तीन से अधिक राशियाँ इस प्रकार की हों कि किसी एक राशि का मान, शेष राशियों के मान पर आश्रित हो तो वे राशियाँ एक मिश्र समानुपात में होंगी।

स्पष्ट है कि मिश्र समानुपात में दो से अधिक राशियाँ होती हैं। मिश्रित समानुपात को दो दो राशियों के समानुपात में विभक्त किया जा सकता है।

उदाहरणार्थ, यदि 6 मनुष्य 9 घंटा प्रतिदिन काम करके एक काम को 30 दिन में करते हैं तो 4 घंटे प्रतिदिन काम करके 27 दिन में उसी काम को कितने मनुष्य करेंगे?

यहाँ पर तीन राशियाँ हैं: मनुष्य, घंटे तथा दिन। किसी एक राशि का मान शेष दो राशियों के मान पर निर्भर करता है। अतः प्रश्न मिश्र समानुपात का है।

इस प्रश्न को तीर के संकेत द्वारा हल करने के लिए निम्नलिखित क्रिया करते हैं।

पहला चरण: सबसे पहले राशियाँ (दिन, घंटे तथा मनुष्य) को एक पंक्ति में लिखते हैं तथा जिस राशि का मान ज्ञात करना होता है उसे अन्तिम पंक्ति में (यहाँ पर, मनुष्य)

दूसरा चरण: फिर अज्ञात राशि (मनुष्यों की संख्या) को x मान लेते हैं और अन्तिम पंक्ति में ऊपर से नीचे की ओर तीर का चिह्न बना लेते हैं।

तीसरा चरण: अब एक-एक राशि लेकर उसका अन्तिम राशि से सम्बन्ध ज्ञात करते हैं कि यह सम्बन्ध सीधा है या उल्टा। जब एक राशि का सम्बन्ध अन्तिम राशि के साथ निकाल रहे होते हैं तब अन्य राशियों को अचर (Constant) मान लेते हैं। यहाँ पर यदि दिन का मनुष्य

yourmahboob

से सम्बन्ध निकालना चाहें तो घंटों को अचर मान लेंगे अर्थात् घंटों की संख्या नहीं बदलेंगे। अब हम देखते हैं कि यदि दिनों की संख्या बढ़ा दी जाए तो, उतने ही काम को करने में घंटे प्रतिदिन काम करने पर, कम मनुष्यों की आवश्यकता होगी अर्थात् दिन एवं मनुष्य में विलोमानुपात है। अतः दिन वाली पंक्ति में उल्टा तीर (नीचे से ऊपर की ओर) बना लेंगे।

चौथा चरण: अब दिन को अचर मानकर, घंटे एवं मनुष्य में सम्बन्ध ज्ञात करेंगे। हम पाते हैं कि यदि प्रतिदिन काम करने के घंटे बढ़ा दिए जाएँ तो उतने ही काम उतने ही दिन में समाप्त करने के लिए, कम मनुष्यों की आवश्यकता होगी अर्थात् घंटे एवं मनुष्य में विलोमानुपात है। अतः घंटे वाली पंक्ति में उल्टा तीर (नीचे से ऊपर की ओर) बना लेंगे। यहाँ यह बात स्पष्ट है कि उपर्युक्त सम्बन्ध ज्ञात करने के लिए तारीखों के नीचे लिखी संख्याओं का प्रयोग नहीं किया गया है।

अब उपर्युक्त सम्बन्ध निम्नलिखित रूप में प्रदर्शित किए जा सकते हैं:

दिन	घंटे	मनुष्य
30 ↑	9 ↑	6 ↓
27 |	4 |	x ↓

अब तीर की दिशा में चलकर, तीरों को अनुप्रस्थ में बदल देते हैं तथा अन्तिम पंक्ति के पहले समानुपात :: का चिह्न बना लेते हैं। इस प्रकार हम पाते हैं कि

$$\left.\begin{matrix} 27:30 \\ 4:\ 9 \end{matrix}\right] :: 6 : x$$

या $27 \times 4 : 30 \times 9 :: 6 : x$

या $27 \times 4 \times x = 30 \times 9 \times 6$

$$\therefore\ x = \frac{30 \times 9 \times 6}{27 \times 4} = 15 \text{ मनुष्य}$$

उदा. 1: 200 मनुष्यों की एक टुकड़ी के लिए 24 सप्ताह के लिए भोजन पर्याप्त है, पहले सप्ताह के अन्त में 80 मनुष्य सहायता के लिए और आ गए और इसलिए प्रति मनुष्य के प्रतिदिन का राशन 900 ग्राम से घटाकर 750 ग्राम कर दिया गया। बताइए कितने अधिक दिन तक वे रह सकते हैं?

हल: यहाँ पर तीन राशियाँ हैं: मनुष्य, राशन एवं समय। चूँकि समय निकालना है इसलिए इसको पंक्ति के अन्त में रखेंगे। अभीष्ट दिनों की संख्या x मानकर इस पंक्ति में तीर का चिह्न ऊपर से नीचे की ओर बना लेंगे। अब मनुष्यों की संख्या एवं समय में विलोमानुपात है, क्योंकि मनुष्यों की संख्या बढ़ाने पर, भोजन कम समय में समाप्त हो जायेगा। इसी प्रकार राशन की मात्रा तथा समय में भी विलोमानुपात है, क्योंकि राशन कम कर देने से भोजन अधिक समय तक चलेगा। अतः पहली दोनों पंक्तियों में तीर का चिह्न विपरीत दिशा में (नीचे से ऊपर की ओर) लगायेंगे।

यदि 80 मनुष्य और न आते तथा राशन की मात्रा न बदलती तो शेष भोजन 200 मनुष्यों के लिए, 900 ग्राम राशन पर (24 − 1 =) 23 सप्ताह के लिए पर्याप्त होता। अब मनुष्यों की संख्या (200 + 80 =) 280 हो जाने से तथा राशन 750 ग्राम कर देने से, माना कि शेष

yoursmahboob

भोजन x सप्ताह तक चलेगा। अतः

मनुष्य	राशन (ग्राम)	समय (सप्ताह)
200 ↑	900 ↑	23 ↓
280	750	x

$\therefore \left.\begin{matrix} 280 : 200 \\ 750 : 900 \end{matrix}\right\} :: 23 : x$

या $280 \times 750 : 200 \times 900 :: 23 : x$

या $280 \times 750 \times x = 200 \times 900 \times 23$

$\therefore x = \frac{200 \times 900 \times 23}{280 \times 750} = \frac{138}{7}$ सप्ताह = 138 दिन

उदा. 2: एक ठेकेदार ने एक काम को 8 घंटे प्रतिदिन काम करके 19 दिनों में समाप्त करने के लिए 42 व्यक्ति काम पर लगाया। 10 दिन बाद हड़ताल हो जाने के कारण काम दो दिन के लिए बन्द रहा। बताइए कितने और व्यक्ति काम पर लगाए जाएँ जो सब मिलकर 9 घंटे प्रतिदिन काम करके काम को समय से समाप्त कर दें?

हल: ∵ 19 दिन में होता है 1 काम

∴ 1 दिन में होता है $\frac{1}{19}$ काम

∴ 10 दिन में होता है $\frac{10}{19}$ काम

∴ 10 दिन बाद शेष काम $= 1 - \frac{10}{19} = \frac{9}{19}$

तथा 2 दिन की हड़ताल होने के कारण नियत समय में कुल शेष समय $= 19 - (10 + 2) = 7$ दिन

अब प्रश्न इस प्रकार बनाया जा सकता है: यदि 10 दिन में 8 घंटे प्रतिदिन काम करके 10/19 काम 42 व्यक्ति करते हैं तो 7 दिन में 9 घंटे प्रतिदिन काम करके 9/19 काम कितने व्यक्ति करेंगे?

राशियाँ चार हैं: दिन, घंटे, काम तथा व्यक्ति।

चूँकि व्यक्तियों की संख्या ज्ञात करनी है अतः इसे अन्तिम पंक्ति में रखा है। फिर शेष तीनों राशियों का सम्बन्ध व्यक्ति के साथ निम्न प्रकार का है जिसे तीर के चिह्नों द्वारा प्रकट किया गया है।

(i) दिन एवं व्यक्ति-यदि काम दिन में काम होना है तो अधिक आदमी लगाने होंगे। इसलिए उल्टा अनुपात (चिह्न विपरीत दिशा में)।

(ii) घंटे एवं व्यक्ति-यदि काम प्रतिदिन अधिक घंटे होगा तो कम व्यक्तियों की आवश्यकता होगी अतः उल्टा अनुपात (चिह्न विपरीत दिशा में)।

(iii) काम एवं व्यक्ति यदि काम कम करवाना है तो कम व्यक्तियों की आवश्यकता होगी।

yoursmahboob

अतः सीधा अनुपात (चिह्न उसी दिशा में)

दिन	घंटे	काम	व्यक्ति
10 ↑	8 ↑	$\frac{10}{19}$ ↓	42 ↓
7	9	$\frac{9}{19}$	x

$$\therefore \left.\begin{array}{l} 7:10 \\ 9:8 \\ \frac{10}{19}:\frac{9}{19} \end{array}\right\} :: 42:x$$

या $7\times9\times\frac{10}{19}:10\times8\times\frac{9}{19}::42:x$

या $7\times9\times\frac{10}{19}\times x=10\times8\times\frac{9}{19}\times42$

$\therefore x=\frac{10\times8\times9\times42\times19}{7\times9\times10\times19}=48$ व्यक्ति

$\therefore$ बढ़े हुए व्यक्तियों की संख्या = 48 − 42 = 6 व्यक्ति

उदा. 3: यदि 44 लड़के किसी काम को 10 घंटे प्रतिदिन काम करते हुए 15 दिनों में पूरा करते हैं तो उतने 3/4 अधिक काम को 11 घंटे प्रतिदिन काम करते हुए कितने आदमी 7 दिनों में पूरा करेंगे, जबकि 3 आदमी 4 लड़कों के बराबर काम करते हैं।

हल: यहाँ चार राशियाँ हैं: घंटा, दिन, काम तथा लड़के। इनमें निम्न प्रकार के सम्बन्ध हैं

(i) घंटा एवं लड़के–अधिक घंटे, कम लड़के (उल्टा)

(ii) दिन एवं लड़के कम दिन, अधिक लड़के (उल्टा)

(iii) काम एवं लड़के अधिक काम, अधिक लड़के (सीधा)

घंटा	दिन	काम	लड़के
10 ↑	15 ↑	1 ↓	44 ↓
11	7	$1\frac{3}{4}$	x

$$\therefore \left.\begin{array}{l} 11:10 \\ 7:15 \\ 1:\frac{7}{4} \end{array}\right\} :: 44:x$$

yoursmahboob

या $11 \times 7 \times 1 : 10 \times 15 \times \frac{7}{4} :: 44 : x$

या $11 \times 7 \times 1 \times x = 10 \times 15 \times \frac{7}{4} \times 44$

$\therefore x = \frac{10 \times 15 \times 7 \times 44}{11 \times 7 \times 1 \times 4} = 150$ लड़के

अब 5 लड़के = 3 आदमी

$\therefore$ 1 लड़का $= \frac{3}{5}$ आदमी

$\therefore$ 150 लड़के $= \frac{3 \times 150}{5} = 90$ आदमी

उदा. 4: 50 मीटर लम्बी, 2 मीटर चौड़ी, और 2 मीटर गहरी खाई को 64 मनुष्य प्रतिदिन 12 घंटे काम करके 5 दिनों में खोदते हैं। 75 मीटर लम्बी, 4 मीटर चौड़ी और 3 मीटर गहरी खाई को 80 मनुष्य 8 घंटे प्रतिदिन कार्य करके कितने दिनों में खोदेंगे?

हल: यहाँ छः राशियाँ हैं। लम्बाई, चौड़ाई, गहराई, मनुष्य, घंटे तथा दिन। अधिक लम्बाई, अधिक दिनों (सीधा); अधिक चौड़ाई, अधिक दिन (सीधा), अधिक गहराई, अधिक दिन (सीधा); अधिक मनुष्य, कम दिन (उल्टा); तथा कम घंटे, अधिक दिन (उल्टा)। अतः

लम्बाई	चौड़ाई	गहराई	मनुष्य	घंटे	दिन
50 ↓	2 ↓	2 ↓	64 ↑	12 ↑	5 ↓
75	4	3	80	8	x

$\therefore$ 50 : 75
2 : 4
2 : 3
80 : 64
8 : 12 $:: 5 : x$

या $50 \times 2 \times 2 \times 80 \times 8 : 75 \times 4 \times 3 \times 64 \times 12 :: 5 : x$

या $50 \times 2 \times 2 \times 80 \times 8 \times x = 75 \times 4 \times 3 \times 64 \times 12 \times 5$

$\therefore x = \frac{75 \times 4 \times 3 \times 64 \times 12 \times 5}{50 \times 2 \times 2 \times 80 \times 8} = 27$ दिन

उदा. 5: 2 आदमी तथा 7 लड़के मिलकर किसी काम को 14 दिनों में करते हैं जबकि 3 आदमी तथा 8 लड़के मिलकर उस काम को 11 दिनों में करते हैं। ज्ञात कीजिए कि 8 आदमी तथा 6 लड़के मिलकर उस काम से तिगुने काम को कितने दिनों में पूरा कर लेंगे?

हल: ऐसे प्रश्न में पहले आदमियों तथा लड़कों की कार्यक्षमता ज्ञात करेंगे। इसके लिए ज्ञान एवं समय निर्धारित कर लेंगे (1 काम, 1 दिन)। फिर, क्योंकि अन्य राशियाँ वही रहेंगी, काम

yoursmahboob

निकालने के लिए इनकी तुलना कर सकते हैं

∵ 14 दिन में एक काम करते हैं 2 आदमी + 7 लड़के

∴ 1 दिन में वही काम करते हैं 28 आदमी + 98 लड़के

फिर ∵ 11 दिन में उसी काम को करते हैं 3 आदमी + 8 लड़के

∴ 1 दिन में उसी काम को करते हैं, 33 आदमी + 88 लड़के

∴ एक ही दिन में एक ही काम को 28 आदमी एवं 98 लड़के से करवा सकते हैं या 33 आदमी एवं 88 लड़के से करवा सकते हैं, अर्थात् काम की क्षमता के अनुसार

33 आ. + 88 ल = 28 आ. + 98 ल.

या (33–28) आ. = (98-88) ल.

या 5 आ. = 10 ल.

∴ 1 आ. = 2 ल.

अब, आदमियों की संख्या को लड़कों की संख्या में परिवर्तित कर सकते हैं।

∵ 2 आ. + 7 ल. = 2×2+7 = 11 ल.

तथा 8 आ. + 6 ल. = 8×2+6 = 22 ल.

∴ प्रश्न इस प्रकार का बनेगा : 11 लड़के 1 काम को 14 दिनों में करते हैं तो 22 ल. 3 काम को कितने दिनों में करेंगे? अतः

लड़के	काम	दिन
11 ↑	1 ↓	14 ↓
22	3	x

$$\therefore \begin{bmatrix} 22 : 11 \\ 1 : 3 \end{bmatrix} :: 14 : x$$

या $22 \times 1 : 11 \times 3 :: 14 : x$

या $22 \times 1 \times x = 11 \times 3 \times 14$

$$\therefore x = \frac{11 \times 3 \times 14}{22} = 21 \text{ दिन}$$

उदा. 6: यदि 3 आदमी और 4 लड़के मिलकर 8 दिनों में 264 रु. कमाते हैं तथा 2 आदमी और 3 लड़के मिलकर उतने ही समय में 184 रु. कमाते हैं, तो बताइए कितने समय में 6 आदमी और 7 लड़के मिलकर 315 रु. कमायेंगे?

हल: चूँकि समय बराबर है, अतः 3 आ. एवं 4 ल. तथा 2 आ. एवं 3 ल. की कमाई का अनुपात 264 : 184 होगा। अर्थात् कमाई के अनुसार

$$\frac{3 \text{ आ.} + 4 \text{ ल.}}{2 \text{ आ.} + 3 \text{ ल.}} = \frac{264}{184} = \frac{33}{23}$$

या, 69 आ. + 92 ल. = 66 आ. + 99 ल.

या, 69 आ. – 66 आ. = 99 ल. – 92 ल.

yoursmahboob

या, 3 आ. = 7 ल.

अब, 3 आ. + 4 ल. = (7 + 4) ल. = 11 ल.

तथा, 6 आ. + 7 ल. = (14 + 7) ल. = 21 ल.

लड़के	कमाई	दिन
11 ↑	264 ↓	8 ↓
21	315	x

$\therefore \left.\begin{matrix} 21 : 11 \\ 264 : 315 \end{matrix}\right] :: 8 : x$

या $21 \times 264 : 11 \times 315 :: 8 : x$

या $21 \times 264 \times x = 11 \times 315 \times 8$

$\therefore x = \frac{11 \times 315 \times 8}{21 \times 264} = 5$ दिन

उदा. 7: एक आदमी 9 घंटे प्रतिदिन विश्राम करके एक स्थान पर पैदल 50 दिनों में पहुँच सकता है। यदि वह अपनी चाल को दुना कर दे और दुगुना विश्राम भी कर ले तो वह उतनी दूरी कितने दिनों में पहुँचेगा?

हल: पहली स्थिति में, प्रतिदिन चलने का समय = 24 − 9 = 15 घंटे

दूसरी स्थिति में, प्रतिदिन चलने का समय = 24 − 18 = 6 घंटे

पहली एवं दूसरी दूरी का अनुपात = 1 : 2

पहली एवं दूसरी चाल का अनुपात = 1 : 2

चाल	दूरी	घन्टे	दिन
1 ↑	1 ↓	15 ↑	50 ↓
2	2	6	x

$\therefore \left.\begin{matrix} 2 : 1 \\ 1 : 2 \\ 6 : 15 \end{matrix}\right] :: 50 : x$

या $2 \times 1 \times 6 : 1 \times 2 \times 15 :: 50 : x$

या $2 \times 1 \times 6 \times x = 1 \times 2 \times 15 \times 50$

$\therefore x = \frac{1 \times 2 \times 15 \times 50}{2 \times 1 \times 6} = 125$ दिन

उदा. 8: यदि 20 पुरुष या 30 स्त्रियाँ या 60 लड़के एक काम को 10 घंटे प्रतिदिन काम करके 15 दिन में समाप्त करते हैं तो 10 स्त्रियों और 7 बालकों के साथ कितने पुरुष लगाए जाएँ कि पहले से 8/5 गुना काम 8 घंटे प्रतिदिन काम करके 12 दिन में समाप्त हो जाए?

हल:

घंटे	दिन	काम	पुरुष
10 ↑	15 ↑	1 ↓	20 ↓
8	12	8/5	x

yoursmahboob

$\therefore \left.\begin{matrix} 8:10 \\ 12:15 \\ 1:8/5 \end{matrix}\right| :: 20 : x$

या, $8 \times 12 \times 1 : 10 \times 15 \times \frac{8}{5} :: 20 : x$

या, $8 \times 12 \times 1 \times x = 10 \times 15 \times \frac{8}{5} \times 20$

$\therefore x = \frac{10 \times 15 \times 8 \times 20}{5 \times 8 \times 12} = 50$ पुरुष

अब, 30 स्त्रियाँ = 20 पुरुष

$\therefore$ 10 स्त्रियाँ = $\frac{20}{30} \times 10 = \frac{20}{3}$ पुरुष

तथा 60 लड़के = 20 पुरुष

$\therefore$ 7 लड़के = $\frac{20}{60} \times 7 = \frac{7}{3}$ पुरुष

$\therefore$ 10 स्त्रियाँ + 7 लड़के = $\left(\frac{20}{3} + \frac{7}{3}\right)$ पुरुष = 9 पुरुष

अर्थात् इनके साथ (50 − 9) = 41 पुरुष और लगाए जाएँ।

उदा. 9: दो दंतेदार पहिये जिनमें से एक के 24 दाँत हैं और दूसरे के 36 दाँत हैं, आपस में फँसकर चलते हैं। यदि दूसरा पहिया 1 मिनट में 100 चक्कर लगाए तो पहला पहिया 10 सेकेंड में कितने चक्कर लगायेगा?

हल:

दाँत	समय(सेकेंड)	चक्कर
36 ↑	60 ↓	100 ↓
24	10	x

$\therefore \left.\begin{matrix} 24:36 \\ 60:10 \end{matrix}\right] :: 100 : x$

या $24 \times 60 : 36 \times 10 :: 100 : x$

या $24 \times 60 \times x = 36 \times 10 \times 100$

$\therefore x = \frac{36 \times 10 \times 100}{24 \times 60} = 25$ चक्कर

नोट: संख्याओं को व्यवस्थित करने से मुसीबत खड़ी हो सकती है। इससे निजात पाने के लिए आप एक सूत्र याद रखें। इस सूत्र को 'Rule of Three' कहते हैं।

Rule of Three: यदि किसी समानुपात के तीन पद दिए हुए हों और चौथा पद निकालना

yoursmartboob

हो तो चौथे पद को निकालने की विधि सरल समानुपात या Rule of Three कहा जाता है।

सरल समानुपात (Simple Proportion) के प्रत्येक सवाल में प्रदत्त पदों में से दो एक ही किस्म के होते हैं और तीसरा पद उसी तरह का होता है, जैसा कि अभीष्ट चौथा पद।

अब, उस नियम पर विचार करें जिसके सहारे सरल समानुपात से संबद्ध प्रश्नों में पदों को व्यवस्थित करते हैं:

नियम **I.** जिस राशि को प्राप्त करना हो उसे x से सूचित कीजिए और उसे चौथे पद के रूप में अवस्थित कीजिए.

II. तीन प्रदत्त पदों में से उस पद को तीसरा पद निर्धारित कीजिए जो अभीष्ट चौथे पद के अनुरूप हो

III. अब इस बात पर सावधानी पूर्वक विचार कीजिए कि अभीष्ट राशि तीसरे पद से बड़ा होगा या छोटा। यदि यह बड़ा होगा तो बने हुए दोनों पदों में से बड़े को दूसरा पद बनाइए एवं छोटे को पहला पद। पर यदि अभीष्ट चौथे पद के तीसरे पद से छोटा होने की उम्मीद हो तो शेष दोनों पदों में से छोटे को दूसरा पद बनाइए एवं बड़े को पहला पद।

IV. अब निम्नलिखित सूत्र का इस्तेमाल कीजिए:

$$\text{अभीष्ट चतुर्थ पद का मान} = \frac{\text{मध्य पदों का गुणनफल}}{\text{पहला पद}}$$

समानुपात एवं Rule of Three के बारे में विस्तृत जानकारी प्राप्त करने के उपरान्त अब हमलोग कुछ ऐसे उदाहरणों को सरल करेंगे, जिन्हें व्यावहारिक रोजमर्रा के जीवन में हल किया जाता है।

उदा. 1: यदि 15 पुस्तकों की कीमत 35 रु. हो तो 21 पुस्तकों की कीमत क्या होगी?

हल: यह सवाल अनुलोम समानुपात (Direct Proportion) का उदाहरण है क्योंकि जैसे-जैसे पुस्तकों की संख्या बढ़ती है, उनकी कीमत भी बढ़ती जाती है

Rule of Three के अनुसार,

पहला चरण: ..... : ..... : ..... : अभीष्ट लागत

दूसरा चरण: ..... : .....– 35 रु. : अभीष्ट लागत

तीसरा चरण: अभीष्ट लागत प्रदत्त मूल्य से अधिक होगा। इसलिए बड़ी मात्रा को दूसरा पद बनाना होगा

15 पुस्तक : 21 पुस्तक – 35 रु. : अभीष्ट लागत

चौथा चरण: अभीष्ट लागत $= \frac{21 \times 35}{15} = 49$ रु.

उदा. 2: एक निश्चित समयावधि में 12 व्यक्ति 111 खिलौने बनाते हैं। उतने ही समय में 12x खिलौने बनाने हैं। इसके लिए कितने व्यक्तियों की जरूरत पड़ेगी?

हल: ***पहला चरण:*** ..... : .....– ..... : अभीष्ट व्यक्तियों की संख्या (x)

दूसरा चरण: ..... : .....– 12 : x

तीसरा चरण: अभीष्ट व्यक्तियों की संख्या संभावित रूप से ज्यादा होगी।

yoursmahboob

$\therefore$ 111 : 148 = 12 : x

चौथा चरण: $x = \frac{148 \times 12}{111} = 16$

उदा. 3: यदि 15 रु. में 152 आम मिलते हैं तो 5 रु. में कितने आम खरीदे जा सकते हैं?

हल: **पहला चरण:** ..... : ..... = ... : आमों की अभीष्ट संख्या

दूसरा चरण: ..... : ..... = 152 : x

तीसरा चरण: चूँकि अभीष्ट राशि 152 की अपेक्षा कम होगी, इसलिए 15 : 5 = 152 : x

चौथा चरण: $x = \frac{5 \times 152}{15} = 64$

उदा. 4: यदि 15 व्यक्ति किसी फसल को 28 दिनों में काट सकते हैं, तो 5 व्यक्ति इसे कितने दिनों में काटेंगे?

हल: **पहला चरण:** ..... : ..... = ... : दिनों की संख्या

दूसरा चरण: ..... : ..... = 28 : x

तीसरा चरण: चूँकि अभीष्ट दिनों की संख्या अधिक होगी क्योंकि 5 व्यक्ति 15 व्यक्तियों की अपेक्षा कम अधिक दिनों में काटेंगे। इसलिए 5 : 15 = 28 : x

चौथा चरण: $x = \frac{15 \times 28}{5} = 84$ दिन

उदा. 5: किसी किले में 150 व्यक्तियों के लिए 45 दिनों की खाद्य सामग्री मौजूद है। 10 दिनों बाद 25 व्यक्ति किला छोड़कर चले जाते हैं, तो शेष खाद्य-सामग्री कितने दिनों तक चलेगी?

हल: शेष खाद्य सामग्री 150 व्यक्तियों के लिए (45 − 10) = 35 दिनों तक चलेगी। पर चूँकि 25 व्यक्ति किला छोड़कर जा चुके हैं, इसलिए शेष खाद्य सामग्री अपेक्षाकृत अधिक दिनों तक चलेगी।

$\therefore$ **Rule of three** के अनुसार,

125 व्यक्ति : 150 व्यक्ति = 35 दिन : अभीष्ट दिनों की संख्या

$\therefore$ अभीष्ट दिनों की संख्या = $\frac{150 \times 35}{125} = 42$ दिन

मिश्र समानुपात (Compound Proportion) या Double Rule of Three

उदा. 6: यदि 8 व्यक्ति 24 दिनों में 80 हेक्टेयर काट सकते हैं तो 36 व्यक्ति 30 दिनों में कितना हेक्टेयर काटेंगे?

हल: इस प्रश्न को दो हिस्सों में बाँटा जा सकता है:

पहला हिस्सा: यदि 8 व्यक्ति 80 हेक्टेयर काट सकते हैं तो 36 व्यक्ति कितने हेक्टेयर काटेंगे?

8 मनुष्य : 36 मनुष्य = 80 हेक्टेयर : अभीष्ट हेक्टेयर

$\therefore$ अभीष्ट हेक्टेयर = $\frac{36 \times 80}{8} = 360$ हेक्टेयर

yourmahboob

दूसरा हिस्सा: यदि 360 हेक्टेयर फसल 24 दिनों में काटा जा सकता है तो 30 दिनों में कितना हेक्टेयर फसल काटा जा सकेगा?

Rule of Three के अनुसार,

24 दिन : 30 दिन = 360 हेक्टेयर : अभीष्ट हेक्टेयर

$\therefore$ अभीष्ट हेक्टेयर $= \dfrac{30 \times 360}{24} = 450$

आपने ध्यान दिया होगा कि सवाल के दूसरे हिस्से में हेक्टेयर की संख्या 80 से बदलकर 360 कर दिया गया है और यह हुआ है अनुपात $\dfrac{36}{8}$ एवं $\dfrac{30}{24}$ को मिश्रित करने से इस प्रश्न को एकमात्र चरण में भी संपन्न किया जा सकता है। हमलोग प्रस्तुत आँकड़े को निम्नलिखित रूप में सजाते हैं:

8 व्यक्ति : 36 व्यक्ति
24 दिन : 30 दिन
:: 80 हेक्टेयर : अभीष्ट हेक्टेयर

$\therefore$ अभीष्ट हेक्टेयर $= \dfrac{\text{मध्य पदों का गुणनफल}}{\text{प्रथम पदों का गुणनफल}}$

$= \dfrac{80 \times 36 \times 30}{8 \times 24} = 450$

उदा. 7: यदि 30 व्यक्ति प्रतिदिन 7 घंटे काम करते हैं तो काम का एक हिस्सा 18 दिनों में संपन्न करते हैं। यदि 21 व्यक्ति 8 घंटे प्रतिदिन कार्य करें तो उतने ही कार्य को कितने दिनों में संपन्न करेंगे?

हल: 21 व्यक्ति : 30 व्यक्ति
8 घंटा : 7 घंटा
:: 18 दिन : अभीष्ट दिन

$\therefore$ अभीष्ट दिन $= \dfrac{18 \times 30 \times 7}{21 \times 8} = 22\dfrac{1}{2}$ दिन

नोट: उपर्युक्त स्थिति में निम्नलिखित तार्किक निष्कर्षों का उपयोग किया गया है:

i) कम व्यक्ति : अधिक दिन

ii) अधिक घंटे : कम दिन

उदा. 8: यदि 15 पुरुष या 24 महिलाएँ या 36 बच्चे किसी कार्य को 12 दिनों में संपन्न करते हैं, जबकि कार्य प्रतिदिन 8 घंटे किया जाता है, तो 12 महिलाओं एवं 6 बच्चों के साथ कितने पुरुष मिलकर काम करें ताकि $2\dfrac{1}{4}$ गुना कार्य प्रतिदिन 6 घंटे करके 30 दिनों में निष्पादित हो सके?

yoursmahboob

हल: महत्वपूर्ण तार्किक निष्कर्ष:

i) अधिक दिन : कम व्यक्ति

ii) कम घंटे : अधिक व्यक्ति

iii) अधिक कार्य : अधिक व्यक्ति

∴ Rule of Three के अनुसार:

30 दिन : 12 दिन
6 घंटे : 8 घंटे
1 काम : $2\frac{1}{4}$ काम
:: 15 व्यक्ति : अभीष्ट व्यक्ति

∴ अभीष्ट व्यक्तियों की संख्या $= \frac{15\times12\times8\times2.25}{30\times6\times1} = 18$

अब चूँकि 24 महिलाएँ – 15 पुरुष

∴ 12 महिलाएँ – 7.5 पुरुष

तथा 26 बच्चे – 15 पुरुष

∴ 5 बच्चे $= \frac{15}{6} = \frac{5}{2} = 2.5$ पुरुष

∴ 12 महिलाएँ + 6 बच्चे – 7.5 + 2.5 = 10 पुरुष

∴ 18 – 10 = 8 पुरुषों को काम में लगाना चाहिए।

उदा. 9: 2200 सैनिकों की एक टुकड़ी के पास 16 सप्ताह को खाद्य सामग्री है यदि प्रत्येक एक सैनिक प्रतिदिन 45 ग्रेड ग्राम (Dag) भोजन करे। यदि प्रतिदिन प्रति सैनिक 33 ग्रेड ग्राम भोजन करे तो उसी सामग्री को 24 दिनों तक चलाने के लिए कितने सैनिकों को टुकड़ी छोड़ देनी होगी?

हल: यहाँ निम्नलिखित तार्किक निष्कर्षों का इस्तेमाल किया जाता है:

i) अधिक सप्ताह : कम सैनिक

ii) कम ग्रेड ग्राम : अधिक सैनिक

∴ Rule of Three के अनुसार,

24 सप्ताह : 16 सप्ताह
33 ग्रेड ग्राम : 45 ग्रेड ग्राम
:: 2200 व्यक्ति : अभीष्ट व्यक्ति

∴ $x = \frac{2200\times16\times45}{24\times33} = 2000$

∴ 2200 – 2000 = 200 सैनिकों को टुकड़ी छोड़ देनी चाहिए।

उदा. 10: दो दौतेदार पहिए एक दूसरे के अंदर फिट हैं। इनमें से एक में 16 दाँते हैं और दूसरे में 27 दाँते हैं। यदि कम वाला $\frac{3}{4}$ मिनट में 80 बार घूमता है तो ज्यादा वाला 8 सेकेंड में कितनी बार घूमेगा?

yoursmahboob

हल: यहाँ निम्नलिखित तार्किक निष्कर्षों का इस्तेमाल हो सकता है:

i) कम दाँतें, अधिक चक्कर

ii) कम समय, कम चक्कर

16 दाँते : 27 दाँते
45 सेकेंड : 8 सेकेंड
:: 80 चक्कर : x चक्कर

∴ Rule of Three के अनुसार, $x = \frac{80 \times 27 \times 8}{16 \times 45} = 24$ चक्कर

उदा. 11: यदि 30 व्यक्ति किसी कार्य को 27 दिनों में पूरा करते हैं तो 18 व्यक्ति उसका तीन गुना कार्य कितने दिनों में संपन्न करेंगे?

हल:

व्यक्ति 18:30
कार्य 1:3
:: 27 : अपेक्षित दिनों की संख्या
[कम व्यक्ति, अधिक दिन
अधिक कार्य, अधिक दिन]

∴ अपेक्षित दिनों की संख्या $= \frac{27 \times 30 \times 3}{18 \times 1} = 135$ दिन

उदा. 12: यदि 7 व्यक्तियों का एक परिवार 840 रु. में 36 दिनों तक जी सकता है तो 9 व्यक्तियों का परिवार 810 रु. में कितने दिनों तक जी सकता है?

हल:

व्यक्ति 9:7
रु. 840:810
:: 36 : अपेक्षित दिनों की संख्या
[अधिक व्यक्ति, कम दिन
कम रुपए, कम दिन]

∴ अपेक्षित दिनों की संख्या $= \frac{36 \times 7 \times 810}{9 \times 840} = 27$ दिन

उदा. 13: यदि 13 पृष्ठों वाली किसी पुस्तक की 1000 प्रतियों के लिए 26 रीम कागज की जरूरत पड़ती है तो 17 पृष्ठों वाली पुस्तक की 5000 प्रतियों के लिए कितने रीम कागज चाहिए होंगे?

हल:

पुस्तकें 1000:5000
पृष्ठ 13:17
:: 26:x
[अधिक पुस्तकें, ज्यादा कागज
अधिक पृष्ठ, ज्यादा कागज]

∴ कागज की अपेक्षित मात्रा $= \frac{26 \times 5000 \times 17}{1000 \times 13} = 170$ रीम

उदा. 14: यदि 5 व्यक्ति प्रतिदिन 4 घंटे काम करें तो किसी काम को 30 दिनों में संपन्न करते हैं तो उसके 10 गुने काम को 8 घंटे प्रतिदिन के हिसाब से 25 दिनों में संपन्न करने के लिए कितने व्यक्ति चाहिए?

हल: इस प्रश्न में 3 प्रकार के तर्क समाहित हैं:

1) कम दिन, अधिक आदमी [यदि काम को कम दिनों में संपन्न किया जाना है तो अधिक

yoursmanbooh

व्यक्ति काम पर लगाने होंगे।]

2) कम घंटे, अधिक व्यक्ति [यदि कार्य के घंटे कम हों, तो निश्चित अवधि में कार्य पूरा करने के लिए अधिक व्यक्ति काम पर लगाने होंगे।]

3) अधिक कार्य, अधिक व्यक्ति [यदि कार्य अधिक हो तो निश्चित अवधि में पूरा करने के लिए अधिक व्यक्तियों को कार्य पर लगाना होगा।]

अब Rule of Three के अनुसार,

चरण I. दिन : .. .. : .....

घंटे : ..... : ..... :: 6 : व्यक्तियों की अपेक्षित संख्या

कार्य : ..... : .....

चरण II. Rule of Three के अनुसार,

1) काम को 25 दिनों में कम में पूरा करने के लिए अधिक व्यक्ति चाहिए। इसलिए दूसरे स्थान पर बड़ी संख्या होगी एवं पहले स्थान पर छोटी संख्या होगी जैसे, दिन : 25 : 30

2) कार्य करने के घंटे घट कर 8 हो गए हैं। इसलिए अधिक व्यक्तियों की जरूरत पड़ेगी। इसलिए दूसरे स्थान पर बड़ी संख्या एवं प्रथम स्थान पर छोटी संख्या होगी। जैसे, घंटे : 8 : 9

3) चूँकि कार्य दस गुना हो गया है। इसलिए पूरा करने के लिए अधिक व्यक्ति चाहिए होंगे। इसलिए दूसरे स्थान पर बड़ी संख्या एवं पहले स्थान पर छोटी संख्या होगी। जैसे, कार्य : 1 : 10

इस प्रकार चरण I के सभी रिक्त स्थान भरे जा सकते हैं।

दिन	25 : 30	:: 6 : x
घंटे	8 : 9	
कार्य	1 : 10	

Rule of Three के अनुसार,

$$x = \frac{\text{तीसरा पद} \times \text{मध्य पदों का गुणनफल}}{\text{पहले पदों का गुणनफल}}$$

या, $x = \frac{6 \times 30 \times 9 \times 10}{25 \times 8 \times 1} = 81$ व्यक्ति

अब हमलोग ***भिन्न का नियम*** **(Rule of Fractions)** की चर्चा करेंगे। यह बहुत कुछ Rule of Three से मिलता जुलता है।

भिन्न के आधारभूत सिद्धांत (Some basics of fraction)

1) यदि किसी भिन्न का अंश उसके हर से बड़ा हो तो भिन्न का मान एक से अधिक होता है। सुविधा के लिए ऐसे भिन्न को महत्तर भिन्न (greater fraction) कह सकते हैं। जब किसी संख्या x में ऐसे महत्तर भिन्न से गुणा किया जाता है, तो गुणनफल का मान उस संख्या से अधिक होता है

yoursmanbooks

उदाहरण के लिए, जब 15 में $\frac{4}{3}$ (महत्तर भिन्न) से गुणा किया जाता है, तो गुणनफल 20, 15 से अधिक है।

2) यदि किसी भिन्न का अंश हर से छोटा हो तो इसका मान एक से कम होता है। सुविधा के लिए इसे न्यूनतर भिन्न (less fraction) कह सकते हैं। जब कभी किसी संख्या में न्यूनतर भिन्न से गुणा किया जाता है तो प्राप्त गुणनफल उस संख्या से कम होता है। उदाहरण के लिए, $15 \times \frac{3}{5} = 9$, जो कि 15 से छोटा है।

नोट: 'भिन्न का नियम' (Rule of Fractions) के सहारे उदा. 14 को हल करने के क्रम में Rule of Three के अतिरिक्त उपर्युक्त दोनों सिद्धांतों का भी इस्तेमाल किया जाएगा।

हल: **चरण I:** प्रश्न में क्या माँगा गया है? निश्चित रूप से व्यक्तियों की संख्या ज्ञात करना है। इसलिए हम प्रश्न में व्यक्त व्यक्तियों की संख्या लिख लेते हैं। यह संख्या है 6।

चरण II: दिनों की संख्या 30 से घटकर 25 हो जा रही है इसलिए अधिक व्यक्तियों की आवश्यकता पड़ेगी (कम दिन, अधिक व्यक्ति) इसका सीधा अर्थ है कि 6 में किसी महत्तर भिन्न से गुणा किया जाना चाहिए, क्योंकि हमें 6 से अधिक मान वाली संख्या चाहिए

$$\therefore \quad 6 \times \frac{30}{25}$$

चरण III: इसी प्रकार, उपर्युक्त भिन्न किसी महत्तर भिन्न से गुणित होना चाहिए। और वह संख्या है $\frac{9}{8}$.

$$\therefore \quad 6 \times \frac{30}{25} \times \frac{9}{8}$$

चरण IV: इसी तरह उपर्युक्त राशि में महत्तर भिन्न $\frac{10}{1}$ से गुणा किया जाना चाहिए

$$\therefore \text{ अभीष्ट व्यक्तियों की संख्या} = 6 \times \frac{30}{25} \times \frac{9}{8} \times \frac{10}{1} = 81 \text{ व्यक्ति}$$

उदा. 15: एक खास काम में 9 व्यक्ति 108 खिलौने बना सकते हैं, तो उतने ही समय में 48 खिलौने बनाने के लिए कितने व्यक्ति चाहिए होंगे?

हल: चूँकि कम खिलौने बनाने हैं, इसलिए आदमी भी कम चाहिए होंगे। अतः व्यक्तियों की संख्या में न्यूनतर भिन्न से गुणा करना होगा:

$$9 \times \frac{48}{108} = 4 \text{ व्यक्ति}$$

उदा. 16: यदि 8 व्यक्ति 24 दिनों में 80 हेक्टेयर काट सकते हैं तो 36 व्यक्ति 30 दिनों में कितना हेक्टेयर जंगल काटेंगे?

yoursmahboob

हल: **चरण I:** यहाँ अभीष्ट इकाई हेक्टेयर है, इसलिए उसकी संख्या लिख लें।
हेक्टेयर की संख्या – 80

चरण II: चूँकि व्यक्तियों की संख्या 8 से बढ़कर 36 हो रही है, इसलिए व्यक्तियों की संख्या बढ़ जाएगी। 80 में किसी महत्तर भिन्न से गुणा करना पड़ेगा। $\therefore$ $80\times\frac{36}{8}$

चरण III: चूँकि दिनों की संख्या भी 24 से बढ़कर 30 हो रही है, इसलिए हेक्टेयर की संख्या भी बढ़ेगी। इस प्रकार,

$$80\times\frac{36}{8}\times\frac{30}{24}=450 \text{ हेक्टेयर}$$

समानुपाती विभाजन (Proportional Division)

समानुपात का उपयोग किसी राशि को ऐसे हिस्सों में विभाजित करने में किया जा सकता है जो प्रदत्त संख्या के समानुपाती हों।

उदा. 1: 1350 रु. को तीन ऐसे हिस्सों में विभाजित करें जो संख्या 2, 3 एवं 4 के समानुपाती हों।

हल: पहला हिस्सा – $1350\times\frac{2}{2+3+4}=1350\times\frac{2}{9}=300$ रु.

दूसरा हिस्सा – $1350\times\frac{3}{9}=450$ रु.

तीसरा हिस्सा = $1350\times\frac{4}{9}=600$ रु.

उदा. 2: 391 रु. को तीन ऐसे हिस्सों में विभाजित करें, जो भिन्न $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$ एवं $\frac{3}{4}$ के समानुपाती हों।

हल: प्रदत्त अनुपातों के हर 2, 3 एवं 4 के ल.स. (LCM), 12 से गुणा करने पर, हमें

$\frac{1}{2}:\frac{2}{3}:\frac{3}{4}=\frac{1}{2}\times12:\frac{2}{3}\times12:\frac{3}{4}\times12=6:8:9$ प्राप्त होता है

अब, $6+8+9=23$

$\therefore$ पहला हिस्सा – $\frac{6}{23}\times391=102$ रु.

दूसरा हिस्सा = $\frac{8}{23}\times391=136$ रु.

तीसरा हिस्सा – $\frac{9}{23}\times391=153$ रु.

नोट: तीसरा हिस्सा प्राप्त करने के लिए पहले एवं दूसरे हिस्से अर्थात् 102 रु. एवं 136 रु. के योगफल को 391 रु. में से घटाया भी जा सकता है।

yourmanboob

उदा. 3: एक निश्चित रकम को A, B एवं C के बीच इस प्रकार विभाजित किया जाता है कि A के मिलनेवाले 1 रु. के लिए B को 65 पैसे एवं C को 40 पैसे मिलें। यदि C को कुल 8 रु. प्राप्त हुए तो कुल रकम कितनी थी?

हल: यहाँ, A : B : C = 100 : 65 : 40 = 20 : 13 : 8

अब, 20 + 13 − 8 = 41

∵ कुल रकम का $\frac{8}{41}$ = 8 रु.

∴ कुल रकम = $\frac{8 \times 41}{8}$ = 41 रु.

उदा. 4: 1540 रु. को A, B एवं C के बीच इस प्रकार विभाजित करें कि A को B और C के कुल हिस्से का $\frac{2}{9}$ प्राप्त हो तथा B को A एवं C के कुल हिस्से का $\frac{3}{11}$ प्राप्त हो।

हल: A का हिस्सा : (B + C) का हिस्सा = 2 : 9 ....(1)

B का हिस्सा : (A + C) का हिस्सा = 3 : 11 ....(2)

1540 रु. को 2 : 9 एवं 3 : 11 के अनुपात में विभाजित करने पर,

A का हिस्सा = 1540 रु. का $\frac{2}{11}$ = 280 रु.

B का हिस्सा = 1540 रु. का $\frac{3}{14}$ = 330 रु.

∴ C का हिस्सा = 1540 रु. −(280 रु. + 330 रु.) = 930 रु.

उदा. 5: 581 को तीन हिस्सों में विभाजित करें ताकि पहले हिस्से के 4 गुना दूसरे हिस्से के 5 गुना एवं तीसरे हिस्से के 7 गुना के बराबर हो।

हल: पहले हिस्से का 4 गुना = दूसरे हिस्से का 5 गुना = तीसरे हिस्से का 7 गुना = 1 (माना)

∴ पहला हिस्सा = $\frac{1}{4}$, दूसरा हिस्सा = $\frac{1}{5}$ एवं तीसरा हिस्सा = $\frac{1}{7}$

पहला हिस्सा : दूसरा हिस्सा : तीसरा हिस्सा

= $\frac{1}{4} : \frac{1}{5} : \frac{1}{7}$ = 35 : 28 : 20

अब 581 को इन संख्याओं के अनुपात में विभाजित करें।

नोट: ऐसे प्रश्नों में इस बात का ध्यान रखें कि तीनों हिस्से प्रदत्त संख्याओं 4, 5 एवं 7 के प्रतिलोम अनुपाती हैं।

उदा. 6: 2430 रु. को तीन व्यक्ति A, B एवं C के बीच इस प्रकार विभाजित कीजिए ताकि A के हिस्से से यदि क्रमशः 5, 10 एवं 15 रु. घटा लिए जाएँ तो शेष रकम 3 : 4 : 5 के अनुपात में होते हैं।

yoursmahboob

हल: 2430 रु. (5 + 10 + 15)रु. = 2400 रु.

2400 रु. को 3 : 4 : 5 के अनुपात में विभाजित करने पर,

A का हिस्सा $= \frac{3}{3+4+5} \times 2400 + 5$ रु. = 605 रु.

B का हिस्सा $= \frac{4}{3+4+5} \times 2400 + 10$ रु. = 810 रु.

C का हिस्सा $= \frac{5}{3+4+5} \times 2400 + 15$ रु. = 1015 रु.

उदा. 7: 1320 रु. को 7 पुरुषों 11 महिलाओं एवं 5 बच्चों के बीच विभाजित किया जाता है यह विभाजन इस प्रकार हो कि प्रत्येक महिला को एक बच्चे को प्राप्त राशि का 3 गुना मिले तथा प्रत्येक पुरुष को एक महिला एवं एक बच्चे के सम्मिलित रकम के बराबर प्राप्त हो। बताएँ कि प्रत्येक व्यक्ति को कितना प्राप्त होता है?

हल: 1 पुरुष = 1 महिला + 1 बच्चा

1 महिला = 3 बच्चा

∴ 1 पुरुष = 4 बच्चा

∴ 7 पुरुष : 11 महिला : 5 बच्चा = 28 बच्चे : 33 बच्चे : 5 बच्चे

= 28 : 33 : 5

1320 रु. को 28, 33 एवं 5 के अनुपात में विभाजित करने पर,

7 पुरुषों का हिस्सा $= \frac{28}{66} \times 1320 = 560$ रु.

∴ 1 पुरुष का हिस्सा $= \frac{560}{7} = 80$ रु.

4 बच्चे का हिस्सा = 80 रु. (∵ 1 पुरुष = 4 बच्चे)

∴ 1 बच्चे का हिस्सा = 20 रु.

एवं 1 महिला का हिस्सा = 3 × 20 = 60 रु.

उदा. 8: एक रुपया, 50 पैसा एवं 25 पैसे वाले सिक्कों को $\frac{5}{2}$, 3 एवं 4 के अनुपात में मिलाया गया है, यदि कुल रकम 210 रु. हो तो हर प्रकार के सिक्कों की संख्या बताएँ।

हल: यहाँ, $2\frac{1}{2} : 3 : 4 = 5 : 6 : 8$

इनका समानुपाती मान $= 5 \times 1 : 6 \times \frac{1}{2} : 8 \times \frac{1}{4} = 5 : 3 : 2$

अब, 5 + 3 + 2 = 10

yoursmahboob

$\therefore$ रुपए का मान $= 210$ का $\frac{5}{10} = 105$ रु.

50 पैसे के सिक्कों का मान $= 210$ का $\frac{3}{10} = 63$ रु.

25 पैसे वाले सिक्कों का कुल मान $= 210 \times \frac{2}{10} = 42$ रु.

$\therefore$ 1 रु. वाले 105 सिक्के, 50 पैसे वाले 126 सिक्के एवं 25 पैसे वाले 168 सिक्के हैं

विविध उदाहरण

प्रमेय: यदि दूध और पानी के x लिटर मिश्रण में दूध एवं पानी a : b के अनुपात में हों तो उस मिश्रण में दूध एवं पानी का अनुपात c : d करने के लिए उसमें $\frac{x(ad-bc)}{c(a+b)}$ लिटर पानी मिलाना होगा।

प्रमाण: मिश्रण में दूध की मात्रा $= \frac{x}{a+b}.a$

मिश्रण में पानी की मात्रा $= \frac{x}{a+b}.b$

मान लिया कि मिश्रण में दूध और पानी का अनुपात (c:d) बनाने के लिए हमें y लिटर पानी मिलाना होगा इसलिए,

$$\left(\frac{ax}{a+b}\right):\left(\frac{bx}{a+b}+y\right)=c:d$$

या, $$\left(\frac{ax}{a+b}\right):\left(\frac{bx+y(a+b)}{a+b}\right)=c:d$$

या, $$\frac{ax}{bx+y(a+b)}=\frac{c}{d}$$

$$\therefore \quad y=\frac{x(ad-bc)}{(a+b)c}$$

नोट: उपर्युक्त परिणाम को स्मरण रखना मुश्किल नहीं है इसे स्मरण रखें। इससे समय की बचत होती है।

उदा. 1: दूध और पानी के 40 लिटर मिश्रण में दूध और पानी 3 : 1 के अनुपात में है। उसमें कितना पानी मिलाया जाए कि दूध और पानी का अनुपात 2 : 1 हो जाए?

yoursmahboob

हल: इस सवाल को सीधे उपर्युक्त सूत्र से हल करने पर,

पानी की अभीष्ट मात्रा $= \frac{40(3\times1-1\times2)}{(3+1)\times2} = \frac{40}{8} = 5$ लिटर

उपर्युक्त हल को निम्नलिखित विधि से जाँचा जा सकता है।

40 लिटर मिश्रण में, दूध $= \frac{40}{3+1}\times3 = 30$ लिटर एवं पानी $= 40 - 30 = 10$ लिटर

5 लिटर पानी मिलाने पर नये मिश्रण में, दूध $= 30$ लिटर एवं पानी $= 10 + 5 = 15$ लिटर

$\therefore$ नया अनुपात $= 30 : 15 = 2 : 1$

यह अनुपात प्रश्न में दिए अनुपात के बराबर है

दूसरी हल विधि (Another Quicker Approach) :

प्रारंभिक अनुपात : दूध $= 30$ लिटर, पानी $= 10$ लिटर

अंतिम अनुपात $= 2 : 1$

आपको पानी मिलाना है। इसका अर्थ है दूध की मात्रा समान रहती है (30 लिटर)। अंतिम अनुपात में दूध का मान 2 है। इसका तात्पर्य है कि $2 \equiv 30$ या, $1 \equiv 15$. इसका अर्थ है, अंतिम मिश्रण में पानी 15 होना चाहिए। इसलिए 5 लिटर पानी मिलाया जाना चाहिए।

उदा. 2: दूध और पानी के 30 लिटर मिश्रण में दूध और पानी का अनुपात 7:3 है। उस मिश्रण में कितना पानी मिलाया जाए कि अनुपात बदलकर 3:7 हो जाए?

हल: उपर्युक्त प्रमेय के अनुसार,

अभीष्ट उत्तर $= \frac{30(7\times7-3\times3)}{3(7+3)} = 40$ लिटर

नोट: यह प्रश्न उपर्युक्त प्रमेय की एक विशिष्ट स्थिति है जहाँ पहले की तुलना में पानी मिलाने के बाद अनुपात उलट जाता है। अर्थात $a : b$ अनुपात नए मिश्रण में $b : a$ हो जाता है तथा कुल मिश्रण (पानी मिलाने से पूर्व) हर $c(a + b)$ के बराबर है। ऐसी स्थिति में मिलाए जाने वाले पानी की मात्रा $= a^2 - b^2$.

दूसरी हल विधि (Another Quicker Approach) :

प्रारंभिक अनुपात : दूध $= 21$ लिटर, पानी $= 9$ लिटर

अंतिम अनुपात : दूध : पानी $= 3 : 7$

आपको पानी मिलाना है। इसका अर्थ है पानी की मात्रा समान रहती है (21 लिटर)। चूँकि अंतिम अनुपात में दूध का मान 3 है, तो इसका अर्थ $3 \equiv 21$ $\therefore 7 = 49$. इसका तात्पर्य है अंतिम मिश्रण में पानी 49 लिटर होना चाहिए, अर्थात $(49 - 9 =) 40$ लिटर पानी मिलाया जाना चाहिए।

प्रमेय: किसी मिश्रण में दूध और पानी $a : b$ के अनुपात में है यदि मिश्रण में x लिटर पानी मिलाया जाए, तो दूध और पानी का अनुपात बदलकर $a : c$ हो जाता है। ऐसी स्थिति में मिश्रण में

yoursmahboob

दूध की मात्रा $= \frac{ax}{c-b}$ एवं पानी की मात्रा $= \frac{bx}{c-b}$

प्रमाण: मान लिया कि मिश्रण M लिटर है।

$\therefore$ दूध की मात्रा $= \frac{aM}{a+b}$ लिटर

एवं पानी की मात्रा $= \frac{bM}{a+b}$ लिटर

यदि मिश्रण में x लिटर पानी मिला दिया जाए तो, $\frac{aM}{a+b} : \frac{bM}{a+b} + x = a : c$

या, $\frac{aM}{a+b} : \frac{bM + x(a+b)}{a+b} = a : c$

या, $\frac{aM}{bM + x(a+b)} = \frac{a}{c}$

या, $cM = bM + x(a+b)$

$\therefore \quad M = \frac{x(a+b)}{(c-b)}$

इस प्रकार, मिश्रण में दूध की मात्रा $= \frac{aM}{a+b} = \frac{ax(a+b)}{(a+b)(c-b)} = \frac{ax}{c-b}$

इसी तरह, मिश्रण में पानी की मात्रा $= \frac{bM}{a+b} = \frac{bx(a+b)}{(a+b)(c-b)} = \frac{bx}{c-b}$

उदा. 3: किसी मिश्रण में दूध और पानी का अनुपात 3 : 2 है। यदि मिश्रण में 4 लिटर पानी मिला दिया जाए तो मिश्रण में दूध और पानी बराबर हो जाता है। मिश्रण में दूध और पानी की मात्रा क्या है?

हल: यदि इस सवाल को उपर्युक्त प्रमेय के आधार पर हल करना चाहें तो हमें अनुपात को a : b एवं a : c के रूप में व्यक्त करना होगा। इस प्रश्न में आरंभिक अनुपात 3 : 2 है। इस प्रकार पूर्व पद को बराबर करने के लिए हम दूसरे अनुपात को 3 : 3 लिखते हैं। अब उपर्युक्त सूत्र से,

दूध की मात्रा $= \frac{3 \times 4}{3-2} = 12$ लिटर

तथा, पानी की मात्रा $= \frac{2 \times 4}{3-2} = 8$ लिटर

दूसरी द्रुत विधि (Another Quicker Approach):

प्रारंभिक अनुपात = 3 : 2

दूसरा अनुपात = 3 : 3

yousmahboob

हम देखते हैं कि प्रारंभिक अनुपात में पानी 2 है तथा यह दूसरे अनुपात में जब 3 लिटर पानी मिलाया जाता है तो यह 3 हो जाता है

इसका अर्थ है अनुपात में 1 = 4 लिटर पानी

अतः दूध = अनुपात में 3 = 12 लिटर

पानी = अनुपात में 2 = 8 लिटर

उदा. 4: किसी मिश्रण में दूध और पानी 8 : 3 के अनुपात में है। मिश्रण में 3 लिटर पानी मिलाने पर दूध और पानी का अनुपात बदलकर 2:1 हो जाता है। मिश्रण में दूध और पानी की मात्रा ज्ञात करें।

हल: उपर्युक्त प्रमेय का उपयोग करने के लिए हम प्रदत्त अनुपात को a : b एवं a : c के रूप में अभिव्यक्त करते हैं। इस प्रकार व्यक्त अनुपात है 8 : 3 एवं 8 : 4। ∴ मिश्रण में दूध की

मात्रा = $\frac{8\times3}{4-3}$ = 24 लिटर एवं मिश्रण में पानी की मात्रा = $\frac{3\times3}{4-3}$ = 9 लिटर।

***दूसरी द्रुत विधि* (Another Quicker Approach) :**

प्रारंभिक : दूध : पानी : = 8 : 3

अंतिम : दूध : पानी : = 2 : 1

या 8 : 4

चूँकि दूध समान रहता है, हम दूसरे (अंतिम) अनुपात को इस प्रकार से परिवर्तित करते हैं जिससे कि दूध दोनों ही अनुपातों में एक समान रहता है। अब हम पानी भाग पर ध्यान देते हैं । की वृद्धि होती है। इसका अर्थ है 1 = 4 लिटर

इसलिए, दूध = (3 × 8 =) 24 लिटर

पानी = (3 × 3 =) 9 लिटर

प्रमेय: यदि दो राशियाँ X एवं Y, x : y के अनुपात में हों तो

$$X + Y : X - Y :: x + y : x - y$$

प्रमाण: उपर्युक्त प्रमेय को योगानुपात (componendo) एवं अंतरानुपात (dividendo) के नियम से प्रमाणित किया जा सकता है।

दिया गया है कि $\frac{X}{Y} = \frac{x}{y}$

योगानुपात एवं अंतरानुपात के नियम के अनुसार, $\frac{X+Y}{X-Y} = \frac{x+y}{x-y}$

या, $X + Y : X - Y = x + y : x - y$

$\therefore X + Y : X - Y :: x + y : x - y$

yoursmahboob

नोट: 1. यदि a : b : : c : d, तो b : a : : d : c

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ से $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$ प्राप्त होता है। यह संक्रिया व्युत्क्रमानुपात (invertendo) कहलाती है। इसका तात्पर्य है कि यदि चार राशियाँ समानुपाती हों तो व्युत्क्रम में लेने पर भी यह समानुपात में ही रहती हैं।

2. यदि a : b : : c : d, तो a : c : : b : d

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ से $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$ प्राप्त होता है। यह संक्रिया एकांतरानुपात (alternendo) कहलाती है। इससे तात्पर्य यह है कि यदि चार राशियाँ समानुपात में हों तो एकांतर में लेने पर भी यह समानुपात में ही रहती हैं।

3. यदि a : b : : c : d, तो (a + b) : b : : (c + d) : d

दिया गया है कि $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, अतः $\frac{a}{b}+1=\frac{c}{d}+1$

या, $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$

इस संक्रिया को योगानुपात (componendo) कहते हैं।

4. यदि a : b : : c : d, तो (a - b) : b : : (c - d) : d

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, अतः $\frac{a}{b}-1=\frac{c}{d}-1$ या, $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$

इस संक्रिया को अंतरानुपात (dividendo) कहते हैं।

5. यदि a : b : : c : d, तो (a + b) : (a - b) : : (c + d) : (c - d)

योगांतरानुपात (componendo - dividendo) का उपयोग करते हुए, हमें प्राप्त होता है

$\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$ .....(1)

तथा $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$ .....(2)

(1) और (2) के क्रमशः पक्षों को विभाजित करते हुए, हमें प्राप्त होता है

$\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$

इस संक्रिया को योगांतरानुपात (componendo - dividendo) कहते हैं।

उदा. 5: कुछ रकम दो व्यक्तियों के बीच 1:5 के अनुपात में विभाजित की जाती है। यदि एक व्यक्ति को दूसरे की अपेक्षा 200 रु. कम मिला है तो रकम क्या है?

yoursmahboob

हल: उपर्युक्त प्रमेय के अनुसार, $\frac{\text{कुल रकम}}{20} = \frac{3+5}{5-3}$

$\therefore$ कुल रकम $= \frac{8}{2} \times 20 = 80$ रु.

नोट: इस सवाल को निम्नलिखित विधि (जो कि प्रमेय के अनुरूप है) से भी हल कर सकते हैं।

$5-3 = 20$ रु. $\therefore$ $5+3 = \frac{20}{5-3} \times (5+3) = 80$ रु.

उदा. 6: स्कूटर एवं मोपेड की कीमत का अनुपात 9:5 है। यदि स्कूटर की कीमत मोपेड से 4200 रु. अधिक हो तो मोपेड की कीमत ज्ञात करें।

हल: उपर्युक्त 'नोट' में बताई गई विधि से हल करने पर, $9-5 = 4200$ रु.

$\therefore$ $5 = \frac{4200}{9-5} \times 5 = 5250$ रु.

प्रमेय: यदि किसी द्विविमीय (two-dimensional) आकृति (जिस आकृति में केवल लंबाई एवं चौड़ाई हो) की संगत भुजाएँ a : b के अनुपात में हों तो उनका क्षेत्रफल $a^2 : b^2$ के अनुपात में होता है।

प्रमाण: उपर्युक्त प्रमेय को सिद्ध करने के लिए एक आयत पर विचार कीजिए। चूँकि आयत एक द्विविमीय आकृति है, इसलिए प्राप्त निष्कर्ष सभी द्विविमीय आकृतियों पर लागू होगा। मान लिया कि विचाराधीन आयत की भुजाएँ x एवं y हैं। दिया गया है कि दूसरे आयत की भुजाएँ a : b के अनुपात में हैं।

$\therefore$ दूसरे आयत की भुजाएँ $= \frac{b}{a}x$ एवं $\frac{b}{a}y$

$\therefore$ दोनों आयतों के क्षेत्रफल का अनुपात $= xy : \frac{b^2}{a^2}xy = a^2 : b^2$

उदा. 7: किसी षट्भुज (hexagon) की भुजाएँ तिगुनी कर दी जाती हैं तो नए एवं पुराने षट्भुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात ज्ञात करें।

हल: उपर्युक्त प्रमेय को ध्यान में रखते हुए, दोनों षट्भुजों की भुजाओं का अनुपात a : b = 1 : 3

$\therefore$ दोनों षट्भुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात $= a^2 : b^2 = 1^2 : 3^2 = 1 : 9$

उदा. 8: दो वर्गों के विकर्णों का अनुपात 2 : 1 है। उनके क्षेत्रफलों का अनुपात ज्ञात करें।

हल: यदि भुजाओं के अनुपात की जगह विकर्णों का अनुपात दिया गया हो, तो भी उपर्युक्त नियम (प्रमेय) ही लागू होगा।

$\therefore$ क्षेत्रफलों का अनुपात $= 2^2 : 1^2 = 4 : 1$

उदा. 9: दो वृत्तों की त्रिज्या (या व्यास या परिधि) का अनुपात 3 : 4 है। उनके क्षेत्रफलों का अनुपात ज्ञात करें।

yoursmahboob

हल: उपर्युक्त प्रमेय के अनुसार,

क्षेत्रफलों का अनुपात $= 3^2 : 4^2 = 9 : 16$

नोट: उपर्युक्त प्रमेय हर तरह के द्विविमीय आकृति के लिए समान रूप से सत्य है यह जरूरी नहीं है कि भुजाओं का ही अनुपात दिया हुआ हो, उनके अन्य मापों के संदर्भ में भी यह उतना ही सत्य है। (उदा. 8 एवं उदा. -9 में इसे देखा जा सकता है।)

प्रमेय: यदि किन्हीं दो त्रिविमीय (three-dimensional) आकृतियों की संगत भुजाएँ या अन्य माप $a : b$ के अनुपात में हों तो उनका आयतन $a^3 : b^3$ के अनुपात में होता है।

उदा. 10: **(a)** किन्हीं दो घनों की भुजाएँ 2:1 के अनुपात में हैं तो उनके आयतन का अनुपात बताएँ

(b) यदि एक घनाभ (Parallelopiped) की प्रत्येक भुजा दुगुनी कर दी जाती है तो पुराने एवं नए घनाभ के आयतन का अनुपात ज्ञात करें।

हल: (a) अभीष्ट अनुपात $= (2)^3 : (1)^3 = 8 : 1$ (b) अभीष्ट अनुपात $= (1)^3 : (2)^3 = 1 : 8$

प्रमेय: दो संख्याओं का अनुपात $a : b$ है। यदि दोनों संख्याओं में x की बढ़त हो जाए और अनुपात बदलकर $c : d$ हो जाता है तो

$$\text{दोनों संख्याओं का योगफल} = \frac{x(a-b)(c-d)}{ad-bc}$$

$$\text{दोनों संख्याओं का अंतर} = \frac{x(a-b)(c-d)}{ad-bc}$$

और दोनों संख्याओं को $\frac{xa(c-d)}{ad-bc}$ एवं $\frac{xb(c-d)}{ad-bc}$ लिखा जाता है।

प्रमाण: मान लिया कि दोनों संख्याओं का योगफल X है।

तो संख्याएँ $\frac{aX}{a+b}$ एवं $\frac{bX}{a+b}$ हैं

जब प्रत्येक संख्या में x की वृद्धि होती है तब $\frac{aX}{a+b}+x : \frac{bX}{a+b}+x = c : d$

या, $\frac{aX+x(a+b)}{a+b} : \frac{bX+x(a+b)}{a+b} = \frac{c}{d}$

या, $\frac{aX+x(a+b)}{bX+x(a+b)} = c : d$

$$\therefore \quad X = \frac{x(a+b)(c-d)}{ad-bc}$$

और संख्याएँ हैं:

yoursmahboob

$$\frac{aX}{a+b} = \frac{xa(c-d)}{ad-bc} \quad \text{एवं} \quad \frac{bX}{a+b} = \frac{xb(c-d)}{ad-bc}$$

$\therefore$ दोनों संख्याओं का अंतर $= \dfrac{x(a-b)(c-d)}{ad-bc}$

उदा. 11: दो संख्याओं का अनुपात 3 : 4 है। यदि प्रत्येक संख्या में 2 जोड़ दिए जाएं तो अनुपात बदलकर 7 : 9 हो जाता है। संख्याएँ क्या हैं?

हल: उपर्युक्त प्रमेय के अनुसार, संख्याएँ

$$\frac{2\times3(7-9)}{3\times9-4\times7} \quad \text{एवं} \quad \frac{2\times4(7-9)}{3\times9-4\times7} \quad \text{हैं।}$$

या, 12 एवं 16।

दूसरी द्रुत विधि (Another Quicker Approach) :

प्रारंभिक अनुपात = 3 : 4 = 6 : 8

अंतिम अनुपात = 7 : 9

चूँकि प्रत्येक संख्या के अनुपात से बढ़ाया जाता है, इसलिए हम पहला या दूसरा अनुपात को इस प्रकार से परिवर्तित करते हैं जिससे कि उसके पूर्व पदों (antecedents) एवं अंतिम पदों (consequents) के अलग अलग अंतर समान हों। इसलिए यदि हम प्रारंभिक अनुपात (पहला) को 6 : 8 कर दें तो, हम देखते हैं कि 7 - 6 = 1 = 9 - 8. इसका तात्पर्य है कि परिवर्तित प्रारंभिक अनुपात में 1, 2 के समतुल्य है इसलिए संख्याएँ हैं : 6 × 2 एवं 8 × 2 अर्थात् 12 एवं 16.

उदा. 12: दो संख्याओं का अनुपात 3 : 4 है। यदि दोनों संख्याओं में छः की वृद्धि हो जाए तो अनुपात बदलकर 4 : 5 हो जाता है। दोनों संख्याएँ क्या हैं?

हल: इस सवाल को उपर्युक्त प्रमेय की विशेष स्थिति के रूप में स्वीकार किया जा सकता है, जहाँ

$c = a - d = b$

ऐसे प्रश्नों को पहचानना बड़ा आसान है। ऐसे प्रश्नों में अनुपात के पूर्व पद एवं अंतिम पद में समान वृद्धि होती है।

इस प्रश्न में पूर्व पद एवं अंतिम पद दोनों में 1 की वृद्धि होती है एवं संख्याओं में 6 की वृद्धि होती है इसलिए कहा जा सकता है कि

$1 = 6$

या, $3 = 3\times6 = 18$

एवं $4 = 4\times6 = 24$

$\therefore$ संख्याएँ 18 एवं 24 हैं।

नोट–1. उपर्युक्त सूत्र उदा. 12 पर भी लागू होता है, हमारा सुझाव है कि आप इस सूत्र का प्रयोग करें यह नियम सार्वभौम है एवं इसके प्रयोग से परिचित होना जरूरी है

2. उपर्युक्त सूत्र को निम्नलिखित ढंग से भी लिखा जा सकता है।

yoursmartbook

दो संख्याओं का अनुपात 4:5 है। यदि दोनों संख्याओं को 6 कम कर दिया जाए तो अनुपात बदलकर 3:4 हो जाता है। दोनों संख्याएँ क्या हैं? इस स्थिति में भी वही नियम लागू होगा।

उदा. 13: तीन कक्षाओं में विद्यार्थी 2:3:5 के अनुपात में हैं। यदि प्रत्येक कक्षा में 20 विद्यार्थी बढ़ा दिए जाएँ तो अनुपात बदलकर 4:5:7 हो जाता है। विद्यार्थियों की संख्या बढ़ाए जाने से पूर्व प्रत्येक कक्षा में कितने विद्यार्थी थे?

हल: इस सवाल में भी प्रत्येक आनुपातिक पद में 1 की वृद्धि होती है।

$4-2=5-3=7-3$

इस प्रकार, $2 = 20$

$\therefore \ (2+3+5)=\frac{20}{2}\times 10=100$ विद्यार्थी

प्रमेय: दो व्यक्तियों की आय एवं व्यय का अनुपात क्रमशः $a : b$ एवं $c : d$ है। यदि प्रत्येक व्यक्ति X रु. की बचत करता हो तो उनकी आय को क्रमशः $\frac{Xa(d-c)}{ad-bc}$ एवं $\frac{Xb(d-c)}{ad-bc}$ से ज्ञात किया जाता है।

प्रमाण: स्वयं प्रयास करें क्योंकि इसका प्रमाण बहुत हद तक पिछले प्रमेय के प्रमाण के अनुरूप ही है।

उदा. 14: A एवं B की आय एवं व्यय का अनुपात क्रमशः 3 : 2 एवं 5 : 3 है। यदि दोनों अलग अलग 2000 रु. की बचत करते हों तो उनकी आय ज्ञात करें।

हल: उपर्युक्त प्रमेय के अनुसार,

$a : b = 3 : 2$ (आय)

$c : d = 5 : 3$ (व्यय)

$X = 2000$ रु. (बचत)

$\therefore$ A की आय $= \frac{Xa(d-c)}{ad-bc} = \frac{2000\times 3\times(3-5)}{3\times 3-2\times 5}=12000$ रु.

एवं B की आय $= \frac{Xb(d-c)}{ad-bc} = \frac{2000\times 2\times(3-5)}{3\times 3-2\times 5}=8000$ रु.

नोट: I. यदि हमें व्यय निकालने के लिए कहा जाए तो इसके दो तरीके हैं:

1) व्यय = आय − बचत

$\therefore$ A का व्यय $= (12000-2000)$ रु. $= 10000$ रु.

B का व्यय $= (8000-2000)$ रु. $= 6000$ रु.

2) सूत्र निम्नलिखित है:

A का व्यय $= \frac{Xc(b-a)}{ad-bc}$; B का व्यय $= \frac{Xd(b-a)}{ad-bc}$

II. यदि आप गौर फरमाएँ तो पाएँगे कि आय एवं व्यय की गणना से संबद्ध सूत्रों में आश्चर्यजनक समानता है।

yoursmahboob

III : द्रुत विधि (Quicker Approach) :

	A	:	B			:	
आय =	3	:	2 =	6	:	4	
व्यय =	5	:	3				

A एवं B दोनों समान मात्र (2000 रु) में बचत करते हैं।

चूँकि बचत = आय – व्यय, हमें अनुपात मे पदों को इस प्रकार से परिवर्तित करना चाहिए कि A एवं B दोनों के लिए आय – व्यय समान हों। उपर्युक्त स्थिति में, यदि आय का अनुपात 3 : 2 परिवर्तित होकर 6 : 4 हो जाता है, तो हम देखते हैं कि 6 – 5 = 1 = 4 - 3.

इसप्रकार, आय के परिवर्तित अनुपात में 1, 2000 रु. के समतुल्य है।

इसलिए, A की आय = (6 × 2000 =) 12000 रु.

B की आय = (4 × 2000 =) 8000 रु.

A का व्यय = (5 × 2000 =) 10000 रु.

B का व्यय = (3 × 2000 =) 6000 रु.

उदा. 15: राम और श्याम की आय और व्यय का अनुपात क्रमशः 8 : 11 एवं 7 : 10 है। यदि उनमें से प्रत्येक 500 रु. की बचत करे तो उनके आय एवं व्यय की गणना करें। (सूत्र का प्रयोग अनिवार्य है।)

हल: प्रमेय के अनुसार,

a : b = 8 : 11 (आय)

c : d = 7 : 10 (व्यय)

X = 500 रु. (बचत)

$$\therefore \text{ राम की आय} = \frac{Xa(d-c)}{ad-bc} = \frac{500\times 8(10-7)}{80-77} = 4000 \text{ रु.}$$

$$\text{श्याम की आय} = \frac{Xb(d-c)}{ad-bc} = \frac{500\times 11(10-7)}{80-77} = 5500 \text{ रु.}$$

$$\text{राम का व्यय} = \frac{Xc(b-a)}{ad-bc} = \frac{500\times 7(11-8)}{80-77} = 3500 \text{ रु.}$$

$$\text{श्याम का व्यय} = \frac{Xd(b-a)}{ad-bc} = \frac{500\times 10(11-8)}{80-77} = 5000 \text{ रु.}$$

नोट: उपर्युक्त सूत्रों को याद रखना बड़ा आसान है। इनकी समझ विकसित करने के लिए अभ्यास जरूरी है। जहाँ कहीं भी इस तरह के प्रश्न को देखें उपर्युक्त सूत्रों के सहारे हल करने का प्रयास करें। हर बार सूत्र लिखना जरूरी नहीं है, बल्कि केवल गणना के अंक लिखें। उत्तर पलक झपकते मिल जाएगा।

yoursmahboob

द्रुत विधि **(Quicker Approach)**:

	A	:	B
आय =	8	:	11
व्यय =	7	:	10

बचत = आय - व्यय। उपर्युक्त स्थिति में, 8 – 7 = 1 = 11 – 10.

इस प्रकार अनुपात में 1, 500 रु. के समतुल्य है।

∴ A की आय = (8 × 500 =) 4000 रु.

B की आय = (11 × 500 =) 5500 रु.

A का व्यय = (7 × 500 =) 3500 रु.

B का व्यय = (10 × 500 =) 5000 रु.

प्रमेय: यदि किसी दी गई राशियों का अनुपात a : b : c : d हो तो उन राशियों का, जो उपर्युक्त राशियों का व्युत्क्रमानुपाती है, का अनुपात,

$\frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c} : \frac{1}{d}$ होता है।

उदा. 16: तीन कारों की चाल का अनुपात 2 : 3 : 4 है। इन कारों द्वारा समान दूरी तय करने में लगे समय का अनुपात बताएँ।

हल: आप यह जानते हैं कि चाल एवं समय एक दूसरे के व्युत्क्रमानुपाती हैं। अर्थात् यदि चाल अधिक हो तो समय कम लगेगा और यदि चाल कम हो तो समय अधिक लगेगा। इसलिए इस प्रश्न को हल करने में उपर्युक्त प्रमेय का प्रयोग किया जा सकता है।

∴ तीनों कारों द्वारा लिए गए समय का अनुपात = $\frac{1}{2} : \frac{1}{3} : \frac{1}{4}$

अब सभी अनुपातों को हर (2, 3, 4) के ल.स. (LCM) 12 से गुणा करें। इस प्रकार अभीष्ट

अनुपात = $\frac{12}{2} : \frac{12}{3} : \frac{12}{4}$ = 6 : 4 : 3

उदा. 17: एक ही तरह का काम तीन दलों को सौंपा जाता है। दलों में व्यक्तियों की संख्या का अनुपात 3 : 4 : 5 है। उनके द्वारा कार्य पूरा करने में लगे दिनों की संख्या का अनुपात बताएँ।

हल: यहाँ भी व्यक्ति एवं दिनों की संख्या व्युत्क्रमानुपाती (inversely proportional) है। इसलिए इस प्रश्न में भी उपर्युक्त नियम लागू होगा।

∴ अभीष्ट अनुपात = $\frac{1}{3} : \frac{1}{4} : \frac{1}{5}$

उपर्युक्त भिन्नों को 3, 4 एवं 5 के ल.स. (LCM) 60 से गुणा करने पर,

$\frac{60}{3} : \frac{60}{4} : \frac{60}{5}$ = 20 : 15 : 12

yourshahboob

प्रमेय: यदि दो संख्याओं का योगफल 'A' हो तथा उनका अंतर 'a' हो तो उन संख्याओं का अनुपात $A + a : A - a$ से व्यक्त किया जाता है।

प्रमाण: मान लिया कि दोनों संख्याएँ x एवं y हैं।

प्रश्नानुसार, $x + y = A$ ....(1)

एवं $x - y = a$ ....(2)

(1) + (2) से,

$2x = A + a$

$$\therefore \quad x = \frac{A + a}{2}$$

(1) − (2) से,

$2y = A - a$

$$\therefore \quad y = \frac{A - a}{2}$$

$\therefore$ दोनों संख्याओं का अनुपात $= x : y = \frac{A + a}{2} : \frac{A - a}{2} = A + a : A - a$

उदा. 18: दो संख्याओं का योगफल 40 है एवं उनका अंतर 4 है। दोनों संख्याओं का अनुपात बताएँ।

हल: उपर्युक्त प्रमेय के अनुसार,

अभीष्ट अनुपात $= 40 + 4 : 40 - 4 = 44 : 36 = 11 : 9$

प्रमेय: वह संख्या, जिसे किसी अनुपात $a : b$ के दोनों पदों में जोड़ने पर अनुपात बदलकर $c : d$ हो जाता हो, का मान $\frac{ad - bc}{c - d}$ होता है।

प्रमाण: मान लिया कि अभीष्ट संख्या x है, तब $\frac{a + x}{b + x} = \frac{c}{d}$

या, $ad + dx = bc + cx$

या, $x(c - d) = ad - bc$

$$\therefore \quad x = \frac{ad - bc}{c - d}$$

उदा. 19: यदि किसी संख्या के अनुपात 11 : 23 के दोनों पदों में जोड़ने से अनुपात बदलकर 4 : 7 हो जाता हो तो वह संख्या बताएँ।

हल: उपर्युक्त प्रमेय के अनुसार, यहाँ $a : b = 11 : 23$

एवं $c : d = 4 : 7$

$$\therefore \text{ अभीष्ट संख्या} = \frac{ad - bc}{c - d} = \frac{11 \times 7 - 23 \times 4}{4 \times 7} = \frac{15}{3} = 5$$

yoursmahboob

दूसरी द्रुत विधि (Another Quicker Approach) :

प्रारंभिक अनुपात = 11 : 23

अंतिम अनुपात = 4 : 7 = 16 : 28

इस स्थिति में, हमें दूसरे (अंतिम) अनुपात को इस तरह से परिवर्तित करना चाहिए कि अंतिम अनुपात का पूर्व पद (antecedent) – प्रारंभिक अनुपात का पूर्व पद (antecedent)

= अंतिम अनुपात का अंतिम पद – प्रारंभिक अनुपात का अंतिम पद

= जोड़ी जाने वाली अभीष्ट संख्या

यहाँ 4 : 7 को परिवर्तित करके 16 : 28 कर दिया जाता है जिससे कि 16 – 11 = 28 – 23,

अतः अभीष्ट संख्या = 5

प्रमेय: वह संख्या, जिसे अनुपात a : b के दोनों पदों में से घटाने पर अनुपात बदलकर c : d हो जाता हो, का मान $\frac{bc-ad}{c-d}$ होता है।

प्रमाण: खुद प्रयास करें।

उदा. 20: यदि किसी संख्या को अनुपात 11 : 23 के दोनों पदों में से घटाने पर अनुपात बदलकर 3 : 7 हो जाता है, तो वह संख्या क्या है?

हल: यहाँ, a : b = 11 : 23

c : d = 3 : 7

$\therefore$ अभीष्ट संख्या = $\frac{bc-ad}{c-d} = \frac{23\times3-11\times7}{3-7} = \frac{8}{4} = 2$

दूसरी द्रुत विधि (Another Quicker Approach) :

प्रारंभिक अनुपात = 11 : 23

अंतिम अनुपात = 3 : 7 = 9 : 21

उदा. 19 में दिए गए अवधारणा (concept) को लागू करने पर, हम अंतिम अनुपात को परिवर्तित करके 9 : 21 कर देते हैं जिससे कि 11 - 9 = 23 - 21 = 2, इसलिए अभीष्ट संख्या 2 है।

उदा. 21: दो पात्रों में पानी और दूध का मिश्रण है। दोनों पात्रों में पानी और दूध के अनुपात क्रमशः 1:2 एवं 2:5 हैं। दोनों पात्रों के मिश्रण को 1:4 के अनुपात में मिलाया जाता है। नए मिश्रण में पानी एवं दूध का अनुपात ज्ञात करें।

हल: अनुपातों को भिन्न में परिवर्तित कर दें।

	पानी	दूध
पात्र-I	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
पात्र-II	$\frac{2}{7}$	$\frac{5}{7}$

yoursmahboob

पीपा I से $\frac{1}{5}$ लिया जाता है एवं पीपा II से $\frac{4}{5}$ लिया जाता है।

इसलिए

नए पीपे में पानी एवं दूध का अनुपात $=\left(\frac{1}{3}\times\frac{1}{5}+\frac{2}{7}\times\frac{4}{5}\right):\left(\frac{2}{3}\times\frac{1}{5}+\frac{5}{7}\times\frac{4}{5}\right)$

$$=\left(\frac{1}{15}+\frac{8}{35}\right):\left(\frac{2}{15}+\frac{20}{35}\right) \quad =\left(\frac{31}{105}\right):\left(\frac{74}{105}\right)$$

$$=31:74$$

उदा. 22: पिछले वर्ष A एवं B की आय का अनुपात 3:4 था। A के पिछले वर्ष एवं इस वर्ष की आय का अनुपात 4:5 है तथा B के पिछले वर्ष एवं इस वर्ष की आय का अनुपात 2:3 है। यदि दोनों की कुल वर्तमान आय 4160 रुपये हों तो A की वर्तमान आय ज्ञात करें।

हल: वर्तमान आयों का अनुपात $=3\times\frac{5}{4}:4\times\frac{3}{2}$

$$=\frac{15}{4}:\frac{12}{2}=30:48=5:8$$

$\therefore$ A की वर्तमान आय $=\frac{4160}{5+8}\times 5=1600$ रुपए

उदा. 23: तीन ग्लासों A, B एवं C जिनकी क्षमता (Capacity) का अनुपात 2:3:4 है, स्पिरिट एवं पानी के मिश्रण से भरा हुआ है। स्पिरिट एवं पानी के अनुपात A, B एवं C में क्रमशः 1:5, 3:5 एवं 5:7 हैं। यदि तीनों ग्लासों के मिश्रण को एक साथ मिलाया जाता है तो नए मिश्रण में स्पिरिट एवं पानी का अनुपात ज्ञात करें।

हल:

	A	:	B	:	C
	2	:	3	:	4
स्पिरिट : पानी =	1:5		3:5		5:7

जब वे मिलाए जाते हैं तो स्पिरिट एवं पानी का अनुपात

$$=\left(2\times\frac{1}{1+5}+3\times\frac{3}{3+5}+4\times\frac{5}{5+7}\right):\left(2\times\frac{5}{1+5}+3\times\frac{5}{3+5}+4\times\frac{7}{5+7}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{3}+\frac{9}{8}+\frac{5}{3}\right):\left(\frac{5}{3}+\frac{15}{8}+\frac{7}{3}\right)=\frac{25}{8}:\frac{47}{8}=25:47$$

उदा. 24: एक रुपया, 50 पैसे एवं 25 पैसे वाले कुल 465 सिक्के हैं। उनके मूल्यों का अनुपात 5:3:1 है; प्रत्येक सिक्का की संख्या ज्ञात करें।

हल: सिक्कों की संख्या का अनुपात $=5\times\frac{100}{100}:3\times\frac{100}{5}:1\times\frac{100}{25}=5:6:4$

yoursmahboob

$\therefore$ एक रुपया वाले सिक्कों की संख्या $= \frac{465}{5+6+4} \times 5 = 155$

50 पैसे वाले सिक्कों की संख्या $= \frac{465}{5+6+4} \times 6 = 186$

25 पैसे वाले सिक्कों की संख्या $= \frac{465}{5+6+4} \times 4 = 125$

उदा. 25: एक रुपया, 50 पैसे एवं 5 पैसे वाले सिक्कों को 3:5:7 के अनुपात में मिलाया गया है। यदि कुल रकम 11.70 रुपये हो तो हर प्रकार के सिक्कों की संख्या ज्ञात करें।

हल: यह प्रश्न उदा.-24 से भिन्न है। उदा. 24 में मूल्यों का अनुपात दिया गया है परंतु इस प्रश्न में संख्याओं का अनुपात दिया गया है।

अब, प्रदत्त संख्याओं के अनुपात को मूल्यों के अनुपात में परिवर्तित करना होगा। (जबकि, उदा.-24 में, मूल्यों के अनुपात को संख्याओं के अनुपात में परिवर्तित किया गया था।)

$\therefore$ मूल्यों का अनुपात $= 3 \times \frac{100}{100} : 5 \times \frac{50}{100} : 7 \times \frac{5}{100}$

$= 300 : 250 : 35 = 60 : 50 : 7$

$\therefore$ एक रुपया वाले सिक्कों का मूल्य $= \frac{11.70}{60+50+7} \times 60 = 6$ रु. या 6 सिक्के

50 पैसे वाले सिक्कों का मूल्य $= \frac{11.70}{60+50+7} \times 50 = 5$ रु. या 10 सिक्के

5 पैसे वाले सिक्कों का मूल्य $= \frac{11.70}{60+50+7} \times 7 = 0.7$ रु. या $0.7 \times 20 = 14$ सिक्के

उदा. 26: एक साल पहले, लक्ष्मण एवं गोपाल के आमदनी का अनुपात 3:5 था। दोनों के पिछले वर्ष एवं इस वर्ष के व्यक्तिगत आमदनियों के अनुपात क्रमशः 2:3 एवं 4:5 हैं। यदि वर्तमान वर्ष में दोनों की कुल आमदनी 4300 रुपये हों तो लक्ष्मण की वर्तमान आमदनी क्या है?

हल: लक्ष्मण के दो वर्षों की आमदनी का अनुपात = 2:3

गोपाल के दो वर्षों की आमदनी का अनुपात = 4:5

दिया हुआ है कि पिछले वर्ष उनके आमदनियों का अनुपात = 3:5

अब, पहले दोनों अनुपातों के पूर्व पदों (2 एवं 4) को हम इस प्रकार परिवर्तित करते हैं कि पहले अनुपात में पूर्व पद 3 हो जाए (तीसरे अनुपात का पूर्व पद) एवं दूसरे अनुपात में पूर्व पद 5 हो जाए (तीसरे अनुपात का पश्चात पद)।

इस प्रकार, $2:3 = 3 : \frac{9}{2}$ एवं $4:5 = 4\left(\frac{5}{4}\right) : 5\left(\frac{5}{4}\right) = 5 : \frac{25}{4}$

yoursmahboob

अब, यह स्पष्ट है कि, उनके वर्तमान आमदनियों का अनुपात $= \frac{9}{2} : \frac{25}{4} = 18:25$

$\therefore$ लक्ष्मण की वर्तमान आमदनी $= \frac{4300}{18+25} \times 18 = 1800$ रुपये

नोट: आपको उपर्युक्त विधि को अच्छी तरह समझ लेना चाहिए। यदि आप ऐसा करते हैं तो बहुत ही आसानी से उत्तर तक पहुँच सकते हैं। क्या होगा यदि प्रश्न निम्न प्रकार से दिया गया हो?

'उनके आमदनियों का वर्तमान अनुपात 18:15 है एवं उनके व्यक्तिगत आमदनियों के अनुपात दो वर्षों के लिए 2:3 एवं 4:5 है। उनकी कुल आमदनी पिछले वर्ष 3200 रुपए थी। और आपको लक्ष्मण के पिछले वर्ष की आमदनी ज्ञात करने को कहा जाता है।'

अब, हम उपर्युक्त विधि का प्रयोग अंतिम पदों (consequents) के लिए करते हैं।

$2:3 = 2 \times 6 : 3 \times 6 = 12:18$

$4:5 = 4 \times 5 : 5 \times 5 = 20:25$

इस प्रकार, पिछले वर्ष उनकी आमदनियों का अनुपात 12:20 = 3:5

$\therefore$ लक्ष्मण की पिछले वर्ष की आमदनी $= \frac{3200}{3+5} \times 3 = 1200$ रुपये

उदा. 27: एक बाल्टी में दो द्रव A एवं B के मिश्रण 7:5 के अनुपात में है। यदि बाल्टी में से 9 लिटर मिश्रण निकालकर उसकी जगह 9 लिटर द्रव B डाल दिया जाए, तो दोनों द्रवों का अनुपात 7 : 9 हो जाता है। बाल्टी में द्रव A की मात्रा कितनी है?

हल: ***विस्तार विधि* (Detail Method):**

माना कि दो द्रव A एवं B क्रमशः $7x$ लिटर एवं $5x$ लिटर हैं।

अब, प्रश्नानुसार, 9 लिटर मिश्रण निकाल लिया जाता है

A बचता है, $7x - 9\left(\frac{7}{7+5}\right) = 7x - \frac{9 \times 7}{12} = \left(7x - \frac{21}{4}\right)$ लिटर

एवं B बचता है, $5x - 9\left(\frac{5}{7+5}\right) = 5x - \frac{9 \times 5}{12} = \left(5x - \frac{15}{4}\right)$ लिटर

अब, जब 9 लिटर द्रव B मिलाया जाता है,

$$\left(7x - \frac{21}{4}\right) : \left(5x - \frac{15}{4} + 9\right) = 7:9$$

या $$\frac{7x - \frac{21}{4}}{5x - \frac{15}{4} + 9} = \frac{7}{9}$$

yoursmahboob

या, $63x - \frac{189}{4} = 35x - \frac{105}{4} + 63$

या, $28x - \frac{189}{4} - \frac{125}{4} + 63 = 21 + 63 = 84$

या, $x = \frac{84}{28} = 3$

$\therefore$ $7x = 7 \times 3 = 21$ लिटर

द्रुत विधि (Quicker Method):

यदि हम चरणों को नजरअंदाज करते हैं तो हमें एक सूत्र प्राप्त होता है जो कि न केवल आसानी से प्रयोग में लाया जा सकता है बल्कि उसे याद रखना भी काफी आसान है।

पहला अनुपात = 7:5, दूसरा अनुपात = 7:9

D = अनुपातों के वज्र-गुणनफलों (cross-products) का अंतर

$= 7 \times 9 - 7 \times 5 = 63 - 35 = 28$

अब निम्नलिखित सूत्र का प्रयोग करते हैं :

पहले अनुपात का सार्व गुणनखंड (common factor)

$$= \left[\frac{\text{निकाले एवं डाले गए द्रव की मात्रा}}{\text{पहले अनुपात के पदों का योग}}\right]$$

$$\left[\frac{(\text{निकाले एवं डाले गए द्रव की मात्रा}) \times (\text{दूसरे अनुपात में पद A})}{D}\right]$$

$$= \left[\frac{9}{7+5}\right] \times \left[\frac{9 \times 7}{28}\right] = \frac{9}{12} \times \frac{9}{4} = \frac{36}{12} = 3$$

$\therefore$ A की मात्रा $= 7 \times 3 = 21$ लिटर

उसी प्रकार, B की मात्रा $= 5 \times 3 = 15$ लिटर

उदा. 28: एक मालिक अपने कर्मचारियों की छँटनी 10:9 के अनुपात में करता है एवं उनकी मजदूरी 11:12 के अनुपात में बढ़ा देता है. उनके दोनों व्ययों का अनुपात क्या है?

हल: अभीष्ट अनुपात $= 10 \times 11 : 9 \times 12 = 55 : 54$

उदा. 29: एक पात्र में दो द्रव A एवं B 5:3 के अनुपात में हैं. यदि मिश्रण का 16 लिटर निकालकर उसकी जगह पर उतनी ही मात्रा में द्रव B मिला दिया जाता है तो अनुपात 3:5 हो जाता है तो पात्र में द्रव की कुल कितनी मात्रा रखी जा सकती है?

हल: ***विस्तार विधि* (Detail Method):**

मान लिया कि पात्र में द्रव A एवं B क्रमशः $5x$ लिटर एवं $3x$ लिटर है।

yoursmahboob

निकाले गए मिश्रण में द्रव A की मात्रा $=\frac{16}{5+3}\times 5=10$ लिटर

एवं द्रव B की मात्रा = 16−10 = 6 लिटर

अब, $(5x-10)/(3x-6+16)=3/5$

या, $\frac{5x-10}{3x+10}=\frac{3}{5}$

या, $25x-50=9x+30$

या, $16x=80 \therefore x=5$

$\therefore$ पात्र में $8x=8\times 5=40$ लिटर द्रव रखा जा सकता है।

द्रुत विधि (Quicker Method):

जब अनुपात व्युत्क्रम (reverse) हो जाता है (अर्थात् 5:3, 3:5 हो जाता है) तो हम निम्नलिखित सूत्र का प्रयोग करते हैं:

कुल मात्रा $=\frac{(5+3)^2}{5^2-3^2}\times$(निकाले गये मिश्रण में A की मात्रा)

$=\frac{64}{16}\times 10=40$ लिटर

नोट: जब द्रव A को फिलर (filler) की तरह प्रयोग किया जाता है तो सूत्र में 'B की मात्रा' का प्रयोग करते हैं।

दूसरी द्रुत विधि (Another Quicker Approach):

निकाली गई मात्रा में, A 10 लिटर है तथा B 6 लिटर है।

पुनः B का 16 लिटर मिलाया जाता है। इसका तात्पर्य है कि नए मिश्रण में A 10 लिटर कम है तथा B (16 − 6 =) 10 लिटर अधिक है।

अब अनुपातों पर नजर डालते हैं।

प्रारंभिक अनुपात = 5 : 3

अंतिम अनुपात = 3 : 5

ध्यान दें कि अंतिम अनुपात में पूर्व पद (antecedent) (5 − 3 =) 2 कम है तथा अंतिम पद (consequent) (5 − 3 =) 2 अधिक है।

इसका तात्पर्य है कि अनुपात में 2, 10 लिटर के समतुल्य है।

इसलिए कुल मात्रा = $\frac{10}{2}(5+3)$ = 40 लिटर

उदा. 30: यदि $(a+b):(b+c):(c-a)=6:7:8$ एवं $a+b+c=14$, तो a : b : c का मान ज्ञात करें। a, b एवं c का मान ज्ञात करें।

yoursmahboob

हल: हम जानते हैं कि,

$$a+b=\frac{6}{6+7+8}[(a+b)+(b+c)+(a+c)]$$

$$=\frac{6}{21}[2(a+b+c)]=\frac{6}{21}\times 28=8$$

उसी प्रकार, $b+c=\frac{7}{6+7+8}[2(a+b+c)]=\frac{7}{21}\times 28=\frac{28}{3}$

एवं $a+c=\frac{8}{21}\times 28=\frac{32}{3}$

अब, $a=[(a+b+c)-(b+c)]=14-\frac{28}{3}=\frac{14}{3}$

उसी प्रकार, $b=14-\frac{32}{3}=\frac{10}{3}$ एवं $c=14-8=6$

इस प्रकार, $a=\frac{14}{3}, b=\frac{10}{3}$ एवं $c=6$

$\therefore\ a:b:c=\frac{14}{3}:\frac{10}{3}:6=14:10:18=7:5:9$

द्रुत विधि (Quicker Method):

$(a+b):(b+c):(c+a)=6:7:8$

अब, $[(a+b)+(b+c)+(c+a)]:(a+b):(b+c):(c+a)$

$=(6+7+8):6:7:8$

या, $2(a+b+c):(a+b):(b+c):(c+a)=21:6:7:8$

या, $(a+b+c):(a+b):(b+c):(c+a)=10.5:6:7:8$

अब, $a:b:c=(10.5-7):(10.5-8):(10.5-6)=3.5:2.5:4.5=7:5:9$

$$\therefore\ a=\frac{14}{7+5+9}\times 7=\frac{14}{3}$$

$$b=\frac{14}{7+5+9}\times 5=\frac{10}{3}$$

$$c=\frac{14}{7+5+9}\times 9=6$$

उदा. 31: समान ऊँचाई की दो मोमबत्तियाँ एक ही समय पर जलाई जाती हैं। पहली मोमबत्ती 7 घंटे में और दूसरी मोमबत्ती 4 घंटे में पूरी जल जाती है। मान लीजिए कि दोनों मोमबत्तियाँ स्थिर गति से जलती हैं। बताइए कि प्रज्ज्वलित होने के कितने घंटे बाद पहली मोमबत्ती

yoursmahboob

की ऊँचाई दूसरी मोमबत्ती की ऊँचाई को चार गुनी हो जाएगी ?

हल : ***विस्तार विधि* (Detail Method) :** माना कि मोमबत्तियों की ऊँचाई h है तथा x घंटे बाद पहली मोमबत्ती की ऊँचाई दूसरी मोमबत्ती की ऊँचाई की 4 गुनी है

अतः x घंटे बाद पहली मोमबत्ती की ऊँचाई $= h - \frac{xh}{7} = \frac{7h - xh}{7}$

तथा, x घंटे बाद दूसरी मोमबत्ती की ऊँचाई $= h - \frac{xh}{4} = \frac{4h - xh}{4}$

अब, प्रश्नानुसार, $\frac{7h - xh}{7} : \frac{4h - xh}{4} = 4 : 1$

या, $\frac{(7h - xh)4}{7(4h - xh)} = \frac{4}{1}$

या, $28 - 4x = 112 - 28x$

या, $24x = 84 \quad \therefore \quad x = \frac{84}{24} = 3.5$ घंटे $= 3$ घंटे 30 मिनट

सूत्र विधि (Direct Formula) :

यदि समान ऊँचाई की दो मोमबत्तियों में से पहली मोमबत्ती T_1 घंटे में पूरी जलती है तथा दूसरी मोमबत्ती T_2 घंटे में पूरी जलती है, तो $\frac{T_1T_2(a-b)}{aT_1 - bT_2}$ घंटे बाद बचे हुए भाग की ऊँचाई का अनुपात $a : b$ होगा।

इसलिए उपर्युक्त स्थिति में, $T_1 = 7$ घंटा, $T_2 = 4$ घंटा,

$a = 4$ एवं $b = 1$

$\therefore$ अभीष्ट समय $= \frac{7 \times 4(4-1)}{4 \times 7 - 1 \times 4} = \frac{84}{24} = 3.5$ घंटा

उदा. 32: एक कंटेनर में 80 कि.ग्रा. दूध है। इस कंटेनर से 8 कि.ग्रा. दूध निकालकर उसकी जगह पानी मिलाया जाता है। इस प्रक्रिया को दो बार दुहराया जाता है। अब कंटेनर में कितना दूध है?

हल : इस प्रकार के प्रश्न को हल करने का सबसे आसान तरीका है निकाले गए द्रव को मूल आयतन का प्रतिशत या अनुपात में व्यक्त करना। उदाहरण के लिए, निम्नलिखित व्याख्या पर नजर डालें : चूँकि 8 कि.ग्रा. 80 कि.ग्रा. का 10% है, अतः प्रत्येक निकासी में दूध का

yoursmahboob

10% निकाल जाता है, जिसका तात्पर्य है कि प्रत्येक क्रिया के बाद मिश्रण में दूध के पहले आयतन का 90% शेष रहता है।

	दूध	पानी
मूलतः :	80 किग्रा.	0 किग्रा.
पहली क्रिया के बाद :	80 (90%) = 72 किग्रा.	80 (10%) = 8 किग्रा.
दूसरी क्रिया के बाद :	72 (90%) = 64.8 किग्रा.	8 किग्रा. + 72 का 10% = 15.2 किग्रा.
तीसरी क्रिया के बाद :	64.8 (90%) = 58.32 किग्रा.	15.2 किग्रा. + 64.8 का 10% = 21.68 किग्रा.

यदि हम उपर्युक्त मानों का सरलीकरण करते हैं तो हम कह सकते हैं कि

तीसरी क्रिया के बाद मिश्रण में दूध की मात्रा = $80\left(\frac{90}{100}\right)^3$.

उसी प्रकार, nवीं क्रिया के बाद मिश्रण में दूध की मात्रा = $80\left(\frac{90}{100}\right)^n$

इसी चीज को हम अनुपात में प्रस्तुत कर सकते हैं जैसा कि नीचे दिया गया है :

nवीं क्रिया के बाद दूध की मात्रा = $80\left(\frac{80-8}{80}\right)^n$

(क्योंकि प्रत्येक क्रिया के बाद दूध निम्नलिखित अनुपात में परिवर्तित हो जाता है 72 : 80 या 9 : 10, अर्थात् 10 से 9 तक)

नोट : उपर्युक्त प्रश्न का सबसे अधिक प्रचलित प्रारूप (generalised format) निम्नलिखित है: 'एक कंटेनर जिसमें 'X' लिटर दूध है, x लिटर निकालकर उसकी जगह पर उतना ही पानी मिला दिया जाता है। यह प्रक्रिया 'n' बार दुहराई जाती है तो nवीं क्रिया के बाद कंटेनर में बचे हुए दूध की मात्रा = $X\left(\frac{X-x}{X}\right)^n$ लिटर

उदा. 33 : एक कंटेनर दूध से भरा हुआ है। 9 लिटर दूध निकालकर कंटेनर में उतना ही पानी भर दिया जाता है। पुनः, 9 लिटर मिश्रण निकालकर कंटेनर को पुनः पानी से भर दिया जाता है। अब कंटेनर में बचे दूध की मात्रा तथा पानी का अनुपात 16 : 9 है। कंटेनर में दूध की मूल मात्रा ज्ञात करें।

हल : उपर्युक्त उदाहरण को हल करने के लिए हमें उदा. 32 में दिए गए सूत्र को अच्छी तरह से समझ लेना चाहिए। nवीं क्रिया के बाद बचे दूध की मात्रा

yoursmahboob

= दूध की मूल मात्रा (अर्थात् X) $\left(\frac{X-x}{X}\right)^n$

या, $\frac{\text{nवीं क्रिया के बाद बचे दूध की मात्रा}}{\text{दूध की मूल मात्रा}} = \left(\frac{X-x}{X}\right)^n$

इस स्थिति में, $\left(\frac{16}{16+9}\right) = \left(\frac{X-9}{X}\right)^2$ ..... (*)

या, $\frac{X-9}{X} = \frac{4}{5}$

$\therefore$ X = 45 लिटर

नोट : समी. (*) में LHS (अर्थात्) $\frac{16}{16+9}$ के संबंध में आप भ्रमित (confused) हो सकते हैं।

वस्तुतः, अंतिम मिश्रण में दूध एवं पानी का अनुपात 16 : 9 है। इसका तात्पर्य है कि अंतिम मिश्रण में दूध तथा कुल दूध एवं पानी (जो कि दूध की मूल मात्रा के समान है) के बीच का अनुपात अवश्य ही 16 : (16 + 9) होना चाहिए।

उदा. 34 : एक कंटेनर स्पिरिट से भरा हुआ है। 40 लिटर स्पिरिट निकाल लिया जाता है तथा कंटेनर को पानी से भर दिया जाता है। यह प्रक्रिया तीन बार दुहराई जाती है। अब, कंटेनर में स्पिरिट एवं पानी का अनुपात 27 : 98 है। कंटेनर की धारिता (capacity) ज्ञात करें।

हल : उदा. - 33 में दिए गए सूत्र का इस्तेमाल करें।

$\frac{\text{तीसरी क्रिया के बाद स्पिरिट की मात्रा}}{\text{कंटेनर की धारिता (या, दूध की मूल मात्रा)}} = \left(\frac{X-40}{X}\right)^3$

या, $\frac{27}{27+98} = \left(\frac{X-40}{X}\right)^3$

या, $\left(\frac{3}{5}\right)^3 = \left(\frac{X-40}{X}\right)^3$

या, $\frac{X-40}{X} = \frac{3}{5}$

$\therefore$ X = 100 लिटर।

yoursmartboob

अभ्यास प्रश्न

1. अनुपात 45 : 75, 3 : 4, 51 : 68 एवं 256 : 81 को मिलाकर एक मिश्रित अनुपात बनाएँ।
2. यदि A : B = 6 : 7 एवं B : C = 8 : 9, तो A : B : C का मान बताएँ।
3. दो संख्याओं का योगफल 20 है एवं अंतर $\frac{5}{2}$ है तो संख्याओं का अनुपात निकालें
4. यदि एक संख्या का 0.7 दूसरी संख्या के 0.075 के बराबर हो तो दोनों संख्याओं का अनुपात निकालें।
5. वह भिन्न बताएँ जिसका $\frac{1}{27}$ के साथ का अनुपात, $\frac{3}{11}$ एवं $\frac{5}{9}$ के अनुपात के बराबर है।
6. दो रकम 8 : 9 के समानुपाती है। यदि पहला रकम 20 रु. है तो दूसरा रकम ज्ञात करें।
7. वे दो संख्याएँ ज्ञात करें जिनका अनुपात $5\frac{5}{7} : 5$ है पर जब दोनों संख्याओं में से $\frac{25}{2}$ घट लिया जाता है तो अनुपात बदलकर $3\frac{2}{3} : 3$ हो जाता है।
8. 37 को दो हिस्सों में इस प्रकार विभाजित करें कि एक हिस्से के 5 गुना एवं दूसरे हिस्से के 11 गुना का योगफल 227 के बराबर हो।
9. वह अनुपात ज्ञात करें, जिसका पूर्व पद 9 हो तथा मान $\frac{4}{5}$ के बराबर हो
10. निम्नलिखित समानुपातों में x का मान निकालें:
    (i) 5 : 15 = 2 : x (ii) 75 : 3 = x : 9
11. निम्नलिखित संख्याओं का चौथा समानुपाती निकालें:
    (i) 1, 2, 3 (ii) 490, 70, 69 (iii) 2.5, 1.5, 1.5
12. यदि 30 व्यक्ति किसी काम को 27 दिनों में निपटाते हैं तो 18 व्यक्ति उस काम के तीन गुने को कितने समय में पूरा कर पाएँगे?
13. जब गेहूँ 1.30 रु. प्रति किलोग्राम है, तब एक निश्चित रकम से 60 व्यक्तियों को 15 दिनों तक खिलाया जा सकता है। यदि गेहूँ 1 रु. प्रति किलोग्राम हो जाए तो उसी रकम से 45 दिनों तक कितने लोगों को खिलाया जा सकता है?
14. यदि 7 व्यक्तियों का एक परिवार 840 रु. में 36 दिनों तक जी सकता है तो 9 व्यक्तियों का एक परिवार 810 रु. में कितने दिन रह पाएगा?
15. यदि 5 घोड़े 18 क्विंटल जई 9 दिनों में खाते हैं तो उसी रफ्तार से 66 क्विंटल जई 15 घोड़ों के लिए कितने दिनों की रसद है?
16. यदि 13 पृष्ठों वाली किसी पुस्तक की 1000 प्रतियों के लिए 26 रीम कागज चाहिए होता हो तो 17 पृष्ठों वाली पुस्तक की 5000 प्रतियों के लिए कितना रीम कागज चाहिए होगा?
17. यदि 810 किलोग्राम वजन को 70 किलोमीटर तक ढोने का खर्च 45 रु. हो तो 840 किग्रा. वजन को 63 किलोमीटर तक ढोने में कितना खर्च आएगा यदि दर पहले की तुलना में आधी कर दी जाए?

yousmahboob

18. यदि 300 व्यक्ति किसी काम को 16 दिनों में संपन्न करते हैं तो उसी काम के तीसरे हिस्से को 15 दिनों में पूरा करने के लिए कितने आदमी चाहिए होंगे?
19. 324.36 रु. को 5 : 6 : 7 के अनुपात में तीन हिस्से में विभाजित करें
20. 53.95 रु. को A, B एवं C के बीच इस प्रकार विभाजित करें कि A को B का तिगुना मिले तथा C को B का एक-तिहाई मिले।
21. 91.30 रु. को A, B एवं C के बीच इस प्रकार विभाजित करें कि A को C का $1\frac{1}{2}$ गुना मिले एवं B को C का $2\frac{1}{2}$ गुना मिले।
22. 625 रु. को A, B एवं C के बीच इस प्रकार विभाजित करें कि A को B के हिस्से का $\frac{2}{9}$ मिले तथा C को A के हिस्से का $\frac{3}{4}$ मिले।
23. 99 रु. को A, B एवं C के बीच इस प्रकार विभाजित करें कि A को B का 5 गुना प्राप्त हो तथा C को A एवं B के प्राप्त कुल रकम का $\frac{1}{2}$ प्राप्त हो।
24. 355 रु. को तीन हिस्सों में इस प्रकार विभाजित करें कि पहले हिस्से का तिगुना, दूसरे हिस्से के 5 गुना एवं तीसरे हिस्से के 7 गुना के बराबर हो।
25. 4 बटालियनों की 7300 टुकड़ियों को मिलाकर एक निकाय तैयार किया जाता है ताकि पहली बटालियन का $\frac{1}{2}$, दूसरी बटालियन का $\frac{2}{3}$, तीसरी बटालियन का $\frac{3}{4}$ एवं चौथी बटालियन का $\frac{4}{5}$ भाग में सैनिकों की संख्या समान है। तो प्रत्येक बटालियन में कुल कितने सैनिक हैं?
26. किसी दिवालिया व्यक्ति ने 21000 रु. कर्ज लिए थे। अब उसकी संपत्ति 4 कर्जदाताओं A, B, C एवं D के बीच विभाजित किया जाना है। इन कर्जदाताओं ने इस प्रकार कर्ज दिया था कि A और B के कर्ज का अनुपात 2 : 3 है, B एवं C के कर्ज का अनुपात 4 : 5 है, तथा C एवं D के कर्ज का अनुपात 6 : 7 है। इनमें से प्रत्येक कर्जदाता को कितना मिलेगा?
27. 32 रु. में एक रु., 50 पैसे एवं 25 पैसे वाले कितने सिक्के होंगे जबकि वे 4 : 5 : 6 के अनुपात में हों?
28. 3115 रु. को A, B एवं C के बीच इस प्रकार विभाजित किया जाता है कि यदि इनके हिस्सों में से क्रमशः 25, 23 एवं 52 रु. घटा दिए जाएँ तो शेष रकम 8 : 15 : 20 के अनुपात में होते हैं प्रत्येक व्यक्ति का हिस्सा ज्ञात करें।
29. दो संख्याएँ 3 : 4 के अनुपात में हैं। इनमें कितना जोड़ा जाए कि अनुपात बदलकर 4 : 5 हो जाए?

yourmajboob

30. अनुपात 19 : 23 के प्रत्येक पद में से कितना घटाया जाए कि अनुपात बदलकर 3 : 4 हो जाए?

31. एक मालिक अपने कर्मचारियों की छँटनी 9 : 8 के अनुपात में करता है तथा उनके वेतन 14 : 15 के अनुपात में बढ़ा देता है। क्या कर्मचारियों को भुगतान किए जानेवाले कुल रकम बढ़ गई? यदि हाँ, तो किस अनुपात में? यदि घट गई, तो किस अनुपात में?

32. 50 रु. को 6 पुरुषों, 12 महिलाओं एवं 17 बच्चों के बीच इस प्रकार विभाजित किया जाता है कि 2 पुरुषों को मिलनेवाली रकम 5 बच्चों को मिलने वाली रकम के बराबर है तथा 2 महिलाओं को मिलने वाली रकम 3 बच्चों को मिलने वाली रकम के बराबर है। एक बच्चे का हिस्सा क्या है?

उत्तर

1. $\frac{45}{75}\times\frac{3}{4}\times\frac{51}{68}\times\frac{256}{81}=\frac{16}{15}=16:15$

2. $A:B = 6:7$
   $B:C = 8:9$
   $A:B:C = 6\times8:7\times8:7\times9=48:56:63$

3. अनुपात $=\dfrac{20-\frac{5}{2}}{20-\frac{5}{2}}=\dfrac{22.5}{17.5}=\dfrac{225}{175}=\dfrac{9}{7}=9:7$

4. यहाँ, $0.7x=0.075y$

   $\therefore\ \dfrac{x}{y}=\dfrac{0.075}{0.7}=\dfrac{75}{700}=\dfrac{3}{28}=3:28$

5. $x:\dfrac{1}{27}=\dfrac{3}{11}:\dfrac{5}{9}$ या, $27x=\dfrac{3\times9}{11\times5}$ $\therefore\ x=\dfrac{1}{55}$

6. $\dfrac{20\times9}{8}-\dfrac{45}{2}=22.5$ रुपये

7. $\dfrac{40}{7}x-\dfrac{25}{2}:5x-\dfrac{25}{2}=\dfrac{11}{3}:3$

   या, $\dfrac{\frac{40}{7}x-\frac{25}{2}}{5x-\frac{25}{2}}=\dfrac{11}{9}$

   या, $\dfrac{40\times9x}{7}-\dfrac{225}{2}=55x-\dfrac{275}{2}$ या, $\dfrac{385-360}{7}x=\dfrac{50}{2}$ या, $x=7$

yoursmahboob

इसलिए अभीष्ट संख्याएँ हैं: $\frac{40}{7} \times 7$ एवं 5×7 या, 40 और 35 हैं।

द्रुत विधि (Quicker Method)

इस प्रश्न को सरल किया जा सकता है यदि अनुपात को निम्नलिखित रूप में व्यक्त किया जाए:

$$5\frac{5}{7} : 5 = \frac{40}{7} : 5 = 40 : 35 = 8 : 7 \text{ एवं } 3\frac{2}{3} : 3 = \frac{11}{3} : 3 = 11 : 9$$

$$\text{उभयनिष्ठ गुणनखंड} = \frac{12.5(11-9)}{7 \times 11 - 8 \times 9} = 5$$

इस प्रकार अभीष्ट संख्याएँ 8×5 एवं 7×5 अर्थात् 40 एवं 35 हैं।

8. $x + y = 37$

$5x + 11y = 227$

दोनों समीकरणों को सरल करने पर, $x = 30$ एवं $y = 7$

9. $\frac{4}{5} = \frac{9}{x}$ या, $x = \frac{45}{4}$

$\therefore$ अनुपात $= 9 : \frac{45}{4} = 4 : 5$

10. (i) $x = \frac{15 \times 2}{5} = 6$

(ii) $x = \frac{75 \times 9}{3} = 225$

11. (i) $1 : 2 :: 3 : x \quad \therefore x = \frac{2 \times 3}{1} = 6$

(ii) $490 : 70 :: 69 : x \quad \therefore x = \frac{70 \times 69}{490} = \frac{69}{7}$

(iii) $x = \frac{1.5 \times 1.5}{2.5} = 0.9$

12. समानुपात के नियम से,

18 पुरुष : 30 पुरुष
1 काम : 3 काम } :: 27 : अभीष्ट दिनों की संख्या

$\therefore$ अभीष्ट दिन $= \frac{30 \times 3 \times 27}{18} = 135$ दिन

yoursmahboob

भिन्न के नियम से: $27\left[\left(\frac{30}{18}\right)\right]\left(\frac{3}{1}\right)=135$ दिन

13. $60\left[\left(\frac{15}{45}\right)\right]\left[\left(\frac{13}{1}\right)\right]=26$ पुरुष

नोट: I. चूँकि प्रश्न में दिनों की संख्या निकालनी है इसलिए पहले प्रदत्त व्यक्तियों की संख्या लिख लेते हैं।

II. जब दिनों की संख्या बढ़ती है तो कम व्यक्तियों को खिलाया जा सकता है, इसलिए एक ऐसे भिन्न से गुणा करते हैं, जिसका मान 1 से कम हो अर्थात् $\frac{15}{45}$ से।

III. चूँकि कीमत घट जाती है, इसलिए अधिक व्यक्तियों को खिलाया जा सकता है। इसलिए ऐसे भिन्न से गुणा करें जिसका मान एक से अधिक हो और वह भिन्न है $\left(\frac{13}{1}\right)$.

14. $36\left(\frac{7}{9}\right)\left(\frac{810}{840}\right)=27$ दिन

यहाँ वैसे ही तर्क का इस्तेमाल करें, जैसा कि प्रश्न संख्या 13 में किया गया है.

15. $9\left(\frac{66}{18}\right)\left(\frac{5}{15}\right)=11$ दिन

16. $26\left[\left(\frac{5000}{1000}\right)\right]\left[\left(\frac{17}{13}\right)\right]=170$ सीम

17. $45\left(\frac{840}{810}\right)\left(\frac{63}{70}\right)\left(\frac{1}{2}\right)=21$ रु.

18. $300\left(\frac{16}{15}\right)\left(\frac{1}{4}\right)=80$ व्यक्ति

19. अभीष्ट तीनों हिस्से हैं; $\frac{324.36}{18}\times 5, \frac{324.36}{18}\times 6, \frac{324.36}{18}\times 7$

$=18.02\times 5, 18.02\times 6, 18.02\times 7=90.10$ रु., 108.12 रु., 126.14 रु.

20. $A:B=3:1$

$B:C=3:1$ $\therefore A:B:C=3\times 3:1\times 3:1\times 1=9:3:1$

इसके बाद प्र.-19 की तरह की प्रक्रिया अपनाएँ।

21. $A:C=3:2$

$C:B=2:5$

yoursmahboob

$\therefore$ A : C : B = 3 × 2 : 2 × 2 : 2 × 5 = 6 : 4 : 10 = 3 : 2 : 5

$\therefore$ A : B : C = 3 : 5 : 2

22. A : B = 2 : 9 $\Rightarrow$ B : A = 9 : 2

A : C = 4 : 3

$\therefore$ B : A : C = 9 × 4 : 2 × 4 : 2 × 3 = 36 : 8 : 6 = 18 : 4 : 3

या, A : B : C = 4 : 18 : 3

नोट: यहाँ अनुपातों को इस ढंग से लिखा गया है कि पहले अनुपात का अंतिम पद (consequent) दूसरे अनुपात के पूर्व पद (antecedent) के बराबर हो, जैसे,

A : B एवं B : C ...(1)

या, B : A एवं A : C ...(2) या, B : C एवं C : A ...(3)

इनके बाद नियम लागू किया जाता है,

(1) के लिए; A : B : C = A × B : B × B : B × C

(2) के लिए; B : A : C = B × A : A × A : A × C

23. A = 5B $\Rightarrow$ A : B = 5 : 1

$$C = \frac{1}{2}(A - B) = \frac{1}{2}(6B) = 3B \Rightarrow B : C = 1 : 3$$

$\therefore$ A : B : C = 5 × 1 : 1 × 1 : 1 × 3 = 5 : 1 : 3

24. स्वयं कोशिश करें। [प्रश्न सं.-23 के अनुरूप]

25. $\frac{x}{2} = \frac{2y}{3} = \frac{3z}{4} = \frac{4w}{5} = k$ (मान)

$$\therefore x = 2k; y = \frac{3k}{2}; z = \frac{4k}{3}; w = \frac{5k}{4}$$

$$\therefore x : y : z : w = 2 : \frac{3}{2} : \frac{4}{3} : \frac{5}{4} = 24 : 18 : 16 : 15$$

अब, 24 + 18 + 16 + 15 = 73

$\therefore$ चार बटालियनों में क्रमशः 2400, 1800, 1600 एवं 1500 सैनिक हैं

26. A : B = 2 : 3

B : C = 4 : 5

C : D = 6 : 7

A : B : C = 2 × 4 : 3 × 4 : 3 × 5 = 8 : 12 : 15

C : D = 6 : 7 = 15 : 17.5 $\therefore$ A : B : C : D = 8 : 12 : 15 : 17.5 = 16 : 24 : 30 : 35

चूँकि 16 + 24 + 30 + 35 = 105

A का हिस्सा = $\frac{21000}{105}$ × 16 = 3200 रु.

B का हिस्सा = 200 × 24 = 4800 रु.

yoursmahboob

C का हिस्सा $= 200 \times 30 = 6000$ रु.

D का हिस्सा $= 200 \times 35 = 7000$ रु.

27. एक रु., 50 पैसे एवं 25 पैसे के सिक्के के मूल्यों का अनुपात

$= 4 \times 100 : 5 \times 50 : 6 \times 25 = 8 : 5 : 3$

चूँकि $8 + 5 + 3 = 16$

$\therefore$ एक रु. के सिक्के का मूल्य $= \frac{32}{16} \times 8 = 16$

50 पैसे के सिक्के का मूल्य $= \frac{32}{16} \times 5 = 10$

25 पैसे के सिक्के का मूल्य $= \frac{32}{16} \times 3 = 6$

$\therefore$ 1 रु. के सिक्कों की संख्या $= 16 \times 1 = 16$

50 पैसे के सिक्कों की संख्या $= 10 \times 2 = 20$

25 पैसे के सिक्कों की संख्या $= 6 \times 2 = 12$

28. घटने के बाद कुल रकम $= 3115 - (25 + 28 + 52) = 3010$ रु.

घटे हुए हिस्से का अनुपात $= 8 : 15 : 20$

$\therefore$ A को घटा हुआ हिस्सा $= \frac{3010}{43} \times 8 = 560$ रु.

B का घटा हुआ हिस्सा $= 70 \times 15 = 1050$ रु.

C का घटा हुआ हिस्सा $= 70 \times 20 = 1400$ रु.

$\therefore$ A का हिस्सा $= 560 + 25 = 585$ रु.

B का हिस्सा $= 1050 + 28 = 1078$ रु.

C का हिस्सा $= 1400 + 52 = 1452$ रु.

29. $3 : 4$

$4 : 5$

$\therefore$ संख्या $= \frac{4 \times 4 - 3 \times 5}{5 - 4} = \frac{1}{1} = 1$

30. $19 : 23$

$3 : 4$

$\therefore$ संख्या $= \frac{19 \times 4 - 23 \times 3}{4 - 3} = \frac{7}{1} = 7$

31. $9 : 8$

$14 : 15$

हम जानते हैं कि कुल खर्चा (बिल) = प्रति व्यक्ति मजदूरी × कर्मचारियों की संख्या

$\therefore$ बिल में परिवर्तन का अनुपात $= 9 \times 14 : 8 \times 15 = 126 : 120 = 21 : 20$

अनुपात से जाहिर है कि बिल में कमी आएगी।

yourmahboob

नोट: विस्तार से समझने के लिए, यह मान लें कि दोनों स्थितियों में कर्मचारियों की संख्या क्रमशः $9x$ एवं $8x$ है।

मजदूरी क्रमशः $14y$ एवं $15y$ है।

$\therefore$ आरंभिक मजदूरी $= 9x \times 14y = 126xy$

परिवर्तित मजदूरी $= 8x \times 15y = 120xy$

इससे पता चलता है कि बिल में कमी आई है और अनुपात है:

$126xy : 120xy = 21 : 20$

32. 2 पु. = 5 ब.

2 म = 3 ब.

दोनों को एकीकृत करने पर (लेखम क. अनुनासन करें)

2 पु. = 5 ब.

3 ब. = 2 म.

2×3 पु. $= 5 \times 3$ ब. $= 5 \times 2$ म.

$\therefore$ 6 पु. = 15 ब. = 10 म.

पुरुष, महिला एवं बच्चे की मजदूरी का अनुपात निकालने के लिए मान लें कि

6 पु. = 15 ब. = 10 म. = k

$$\therefore \text{ पु.} = \frac{k}{6};\ \text{ब.} = \frac{k}{15};\ \text{म.} = \frac{k}{10}$$

$$\therefore \text{ पु. : म. : ब.} = \frac{1}{6} : \frac{1}{10} : \frac{1}{15} = 5 : 3 : 2$$

6 पुरुषों, 12 महिलाओं एवं 17 बच्चों के मजदूरी का अनुपात

$= 6 \times 5 : 12 \times 3 : 17 \times 2 = 30 : 36 : 34$

$$\therefore \text{ 17 बच्चों को } \frac{50}{36+36+34} \times 34 = 17 \text{ रु. मिलता है।}$$

$\because$ 1 बच्चे को 1 रु. मिलता है।

नोट: जल्दी से हल करने के लिए, यदि

6 पु. = 10 म. = 15 ब.

$\therefore$ पु. : म. : ब. $= 10 \times 15 : 6 \times 15 : 6 \times 10 = 5 : 3 : 2$

$\therefore$ 6 पु. : 12 म. : 17 ब. $= 6 \times 5 : 12 \times 3 : 17 \times 2 = 30 : 36 : 34$

$$\therefore \text{ 17 ब.} = \frac{50}{30+36+34} \times 34 = 17 \text{ रु.}$$

$\therefore$ ब. = 1 रु.

yoursmahboob

साझेदारी
(Partnership)

साझेदारी दो या उससे अधिक व्यक्तियों का ऐसा संगठन है, जो किसी निश्चित व्यवसाय को शुरू करने के लिए अपनी अपनी पूँजी (हकड़े) लगाता है। साझेदारी के दो प्रकार हैं।

(i) सरल (simple) (ii) मिश्र (compound)

***सरल साझेदारी* (Simple Partnership):** यदि साझेदार समान समय के लिए अपनी पूँजी लगाते हैं तो ऐसी साझेदारी को सरल साझेदारी कहा जाता है।

***मिश्र साझेदारी* (Compound Partnership):** यदि साझेदार अपनी पूँजी भिन्न भिन्न समय के लिए लगाते हों तो इसे मिश्र साझेदारी कहा जाता है।

यदि n व्यक्तियों का समूह किसी व्यवसाय में अलग-अलग पूँजी, अलग अलग समय के लिए लगाते हैं तो उनके लाभ का अनुपात: $At_1 : Bt_2 : Ct_3 : Dt_4 : \ldots\ldots : Xt_n$ होता है (जहाँ पहला व्यक्ति व्यवसाय में A रु. t_1 समय के लिए, दूसरा व्यक्ति B रु. t_2 समय कि लिए, ... तथा nवाँ व्यक्ति X रु. t_n समय कि लिए लगाता है।)

उदा. 1: तीन साझेदार A, B एवं C किसी व्यवसाय में क्रमशः 1600 रु., 1800 रु. एवं 2300 रु. लगाते हैं। यदि उन्हें 1938 रु. लाभ हुआ हो तो उसे आपस में किस तरह विभाजित करेंगे?

हल: लाभ हमेशा पूँजी के अनुपात में ही विभाजित किया जाएगा और पूँजी का अनुपात है:
16 : 18 : 23

अब, 16 + 18 + 23 = 57

A का हिस्सा = $\frac{16}{57} \times 1938$ रु. = 544 रु.

B का हिस्सा = $\frac{18}{57} \times 1938$ रु. = 612 रु.

C का हिस्सा = $\frac{23}{57} \times 1938$ रु. = 782 रु.

उदा. 2: A, B एवं C आपस में साझेदारी करते हैं। A चार महीने के लिए 1200 रु. लगाता है, B आठ महीने के लिए 1400 रु. लगाता है एवं C दस महीने के लिए 1000 रु. लगाता है। उनको साझा आमदनी 585 रु. है तो प्रत्येक को अलग-अलग कितना हिस्सा मिलेगा?

हल: 1200 रु. 4 महीने में उतना ही मुनाफा देगा जितना कि
(1200 × 4 रु. =) 4800 रु. 1 महीना में।
1400 रु. 8 महीने में उतना ही मुनाफा देगा जितना कि
(1400 × 8 रु. =) 11200 रु. 1 महीना में
1000 रु. 10 महीने में उतना ही मुनाफा देगा जितना कि
(1000 × 10 रु. =) 10000 रु. 1 महीना में।

yoursmahboob

∴ मुनाफा को 4800 : 11200 : 10000 अर्थात् 12 : 28 : 25 के अनुपात में विभाजित करना होगा।

अब, 12 + 28 + 25 = 65

A का हिस्सा = $\frac{12}{65} \times 585 = 108$ रु.

B का हिस्सा = $\frac{28}{65} \times 585 = 252$ रु.

C का हिस्सा = $\frac{25}{65} \times 585 = 225$ रु.

नोट: मिश्र साझेदारी में मुनाफे का अनुपात पूँजी एवं समय के अनुलोम समानुपाती (directly proportional) होता है। मुनाफे में प्रत्येक का हिस्सा निकालने के लिए उन्हें आपस में गुणा कर दिया जाता है।

उदा. 3: A 2000 रु. की पूँजी से एक व्यवसाय शुरू करता है 3 महीने बाद B 4000 रु. की पूँजी के साथ व्यवसाय में शामिल हो जाता है। C भी 2 महीने के लिए इसमें 10000 रु. की पूँजी लगा देता है. साल के अंत में व्यवसाय से 5600 रु. का मुनाफा होता है। मुनाफे को A, B एवं C के बीच किस तरह से विभाजित किया जाना चाहिए?

हल: A, B एवं C के मुनाफे का अनुपात = 2×12 : 4×9 : 10×2 = 24 : 36 : 20 = 6 : 9 : 5

अब, 6 + 9 + 5 = 20

∴ A का हिस्सा = $\frac{5600}{20} \times 6 = 1680$ रु.

B का हिस्सा = $\frac{5600}{20} \times 9 = 2520$ रु.

C का हिस्सा = $\frac{5600}{20} \times 5 = 1400$ रु.

उदा. 4: A एवं B एक साल के लिए साझेदारी करते हैं। A 1500 रु. लगाता है एवं B 2000 रु. लगाता है। 4 महीने बाद इस व्यवसाय में C को भी शामिल कर लिया जाता है। C 2250 रु. की भागीदारी करता है। यदि B 9 महीने बाद अपना साझा वापस ले ले तो वर्ष के अंत में प्राप्त होनेवाले 900 रु. के मुनाफे को वे किस तरह विभाजित करेंगे?

हल: A का हिस्सा : B का हिस्सा : C का हिस्सा

= 1500 × 12 : 2000 × 9 : 2250 × 8

= 15 × 12 : 20 × 9 : 22.5 × 8

= 180 : 180 : 180

= 1 : 1 : 1

∴ प्रत्येक को $\frac{900}{3} = 300$ रु. मिलेंगे।

yourmahboob

उदा. 5: A, B एवं C आपस में साझेदारी करते हैं। A चौथाई पूँजी चौथाई समय के लिए लगाता है, B $\frac{1}{5}$ पूँजी आधे समय के लिए लगाता है। शेष पूँजी C लगाता है पूरे समय के लिए। 1140 रु. के मुनाफे को वे आपस में किस तरह बाँटेंगे?

हल: A का हिस्सा : B का हिस्सा : C का हिस्सा

$$= \frac{1}{4}\times\frac{1}{4} : \frac{1}{5}\times\frac{1}{2} : \left\{1-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)\right\}\times 1$$

$$= \frac{1}{16} : \frac{1}{10} : \frac{11}{20}$$

प्रत्येक भिन्न को 16, 10 एवं 20 के ल. स. (LCM) 80 से गुणा करने पर, हमें 5 : 8 : 44 प्राप्त होता है।

$\therefore$ A का हिस्सा $= \frac{1140}{57}\times 5 = 100$ रु.

B का हिस्सा $= \frac{1140}{57}\times 8 = 160$ रु.

C का हिस्सा $= \frac{1140}{57}\times 44 = 880$ रु.

उदा. 6: A एवं B सट्टेबाजी करते हैं। A 50 रु. लगाता है एवं B 45 रु. का दाँव रखता है। चौथे महीने की समाप्ति पर A अपनी पूँजी का आधा निकाल लेता है तथा छठे महीने की समाप्ति पर B अपनी पूँजी का आधा निकाल लेता है। तब C 70 रु. की पूँजी के साथ व्यवसाय में शामिल होता है। 12वें महीने की समाप्ति पर मुनाफा किस अनुपात में विभाजित होगा?

हल: A का हिस्सा : B का हिस्सा : C का हिस्सा

$$= 50\times 4+\frac{50}{2}\times 8 : 45\times 6+\frac{45}{2}\times 6 : 70\times 6$$

$$= 400 : 405 : 420$$

$$= 80 : 81 : 84$$

$\therefore$ मुनाफा 80 : 81 : 84 के अनुपात में विभाजित होगा।

अब आप सरल एवं मिश्र साझेदारी को अच्छी तरह समझ गए होंगे। मिश्र साझेदारी के सूत्र को निम्नलिखित रूप में भी लिखा जा सकता है:

$$\frac{\text{A की पूँजी}\times\text{A के साझे की अवधि}}{\text{B की पूँजी}\times\text{B के साझे की अवधि}} = \frac{\text{A का मुनाफा}}{\text{B का मुनाफा}}$$

उपर्युक्त संबंध को याद रखें। कुछ प्रश्नों को हल करने में बहुधा इनका इस्तेमाल किया जाता है।

yousmanhoob

उदा. 7: A 450 रु. के साथ एक व्यवसाय शुरू करता है। कुछ समय बाद 300 रु. के साथ B भी इस व्यवसाय में शामिल हो जाता है। यदि साल के अंत में मुनाफे को 2 : 1 के अनुपात में विभाजित किया जाता हो तो बताएँ कि B व्यवसाय में कब शामिल हुआ?

हल: मान लिया कि B x महीने तक व्यवसाय में शामिल रहा। तब उपर्युक्त सूत्र के अनुसार,

$$\frac{450\times12}{300\times x}=\frac{2}{1}$$

या, $300\times2x=450\times12$

$$\therefore\ x=\frac{450\times12}{2\times300}=9 \text{ महीने}$$

$\therefore$ B ने $(12-9)=3$ महीने बाद साझेदारी की।

उदा. 8: A और B मिलकर किसी चारागाह को 10 महीने के लिए किराए पर लेते हैं। A 8 महीने तक 100 गायें रखता है; B शेष 2 महीने तक कितनी गायें रखे ताकि उसे A की आधी रकम चुकानी पड़े?

हल: मान लिया कि B x गायें रखता है। A एवं B के किराए का अनुपात

$$=1:1+\frac{1}{2}=1:\frac{3}{2}=2:3$$

अब, $\frac{100\times8}{x\times2}=\frac{2}{3}$

या, $x=\frac{100\times8\times3}{2\times2}=600$ गायें

उदा. 9: A एवं B 7 : 9 के अनुपात में पूँजी लगाकर एक साझा व्यवसाय शुरू करते हैं। 8वें महीने की समाप्ति पर A अलग हो जाता है। यदि उनका मुनाफा 8 : 9 के अनुपात में हो तो बताएँ कि B कितने दिनों तक इस व्यवसाय में शामिल रहा?

हल: मान लिया कि B ने x महीने तक पूँजी लगाए रखा। इसलिए,

$$\frac{7\times8}{9\times x}=\frac{8}{9}$$

या, $x=\frac{7\times8\times9}{8\times9}=7$

$\therefore$ B, 7 महीने तक व्यवसाय में शामिल रहा।

उदा. 10: A, B एवं C ने 2 : 3 : 5 के अनुपात में पूँजी लगाकर एक व्यवसाय शुरू किया। व्यवसाय में साझेदारी की अवधि 4 : 5 : 6 रही। किस अनुपात में उनका मुनाफा विभाजित होगा?

हल: यदि पूँजी a : b : c के अनुपात में x : y : z अवधि के लिए निवेश की गई हो तो मुनाफा ax : by : cz के अनुपात में विभाजित होता है। इस नियम के सहारे, अभीष्ट अनुपात $=2\times4:3\times5:5\times6=8:15:30$

yoursmanhoob

उदा. 11: यदि A, B एवं C ने 5 : 6 : 8 के अनुपात में पूँजी लगाई हो और कारोबार के अन्त में मुनाफा 5 : 3 : 12 के अनुपात में बाँटा गया हो तो ज्ञात करें कि उन लोगों के पूँजी लगाने की अवधि का अनुपात क्या है?

हल: उपर्युक्त नियम के सहारे,

यदि पूँजी का अनुपात a : b : c हो एवं मुनाफा p : q : r के अनुपात में वितरित किया जाए तो समय (अवधि) का अनुपात $\frac{p}{a} : \frac{q}{b} : \frac{r}{c}$ होता है।

$\therefore$ अभीष्ट अनुपात $= \frac{5}{3} : \frac{3}{6} : \frac{12}{8} = 1 : \frac{1}{2} : \frac{3}{2} = 2 : 1 : 3$

उदा. 12: A एवं B 5 : 6 के अनुपात में पूँजी लगाकर एक व्यवसाय शुरू करते हैं। 8वें महीने की समाप्ति पर A अपनी पूँजी वापस ले लेता है। यदि उन्हें 5 : 6 के अनुपात में मुनाफा प्राप्त होता हो तो B ने कितने दिनों के लिए पूँजी निवेश किया था?

हल: उदा.-11 में बताए गए नियम के अनुसार निवेश की अवधि का अनुपात

$$= \frac{5}{5} : \frac{9}{6} = 1 : \frac{3}{2} = 2 : 3$$

उपरानुसार, A ने 8 महीने के लिए निवेश किया है,

$\therefore$ B के निवेश की अवधि $= \frac{8}{2} \times 3 = 12$ महीने

नोट: उपर्युक्त नियम की सत्यता को निम्न प्रकार से जाँच सकते हैं:

मान लिया कि A और B ने क्रमशः 5 एवं 6 रु. निवेश किए। A ने 8 महीने के लिए पूँजी लगाई एवं B ने 12 महीने के लिए।

$\therefore$ मुनाफे का अनुपात $= 5 \times 8 : 6 \times 12 = 10 : 18 = 5 : 9$

जैसा कि प्रश्न में दिया गया है।

उदा. 13: A, B एवं C साझेदार हैं। A मुनाफे का $\frac{2}{5}$ भाग प्राप्त करता है तथा B एवं C शेष मुनाफे का बराबर-बराबर प्राप्त करते हैं। जब मुनाफा 8% से बढ़कर 10% हो जाता है तो A की आय 220 रु. बढ़ जाती है। A, B एवं C के द्वारा निवेशित पूँजी ज्ञात करें।

हल: A के हिस्से के लिए : (10% − 8%) = 220 रु.

$\therefore$ 100% $= \frac{220}{2} \times 100 = 11000$ रु.

$\therefore$ A की पूँजी $= 11000$ रु.

B एवं C के हिस्से के लिए : $\frac{x}{5} = 11000$ रु.

$\therefore \frac{x}{5} = \frac{11000}{2} \times 3 = 16500$ रु.

yoursmaboob

∴ B एवं C प्रत्येक द्वारा निवेशित पूँजी = 8250 रु.

उदा. 14: दो साझेदार एक व्यवसाय में क्रमशः 1,25,000 रु. एवं 85,000 रु. निवेश करते हैं एवं इस बात पर सहमत हैं कि मुनाफे का 60% दोनों में बराबर अनुपात विभाजित किया जाएगा तथा अर्जित हुए मुनाफे को पूँजी पर ब्याज माना जाएगा। यदि एक साझेदार को दूसरे से 300 रु. अधिक प्राप्त होता है तो व्यवसाय में कुल मुनाफा ज्ञात करें।

हल: ***विस्तार विधि* (Detail Method) :**

अंतर केवल 40% मुनाफे, जो निवेश के अनुसार विभाजित किया गया है, की वजह से है।

माना कि कुल मुनाफा = x रु.

x का 40% (125000 : 8500–) 25 : 17 के अनुपात में विभाजित किया जाता है।

इसलिए, पहला साझेदार का हिस्सा $= x\left(\frac{25}{25+17}\right)$ का 40%

$$= x\frac{25}{42} \text{ का } 40\% = \frac{40x}{100}\left(\frac{24}{42}\right) = \frac{5x}{21}$$

एवं दूसरा साझेदार का हिस्सा $= x\frac{17}{42}$ का 40%

$$= \frac{17}{105}x$$

अब, प्रश्नानुसार

$$\text{हिस्सों में अंतर} = \frac{5x}{21} - \frac{17}{105} = 300$$

या, $\frac{x(25-17)}{105} = 300$

$$\therefore\ x = \frac{300\times105}{8} = 3937.50 \text{ रु.}$$

तुरंत विधि (Quicker Method):

मुनाफे का अनुपात = 125000 : 85000

= 25 : 17

$$\therefore\ \text{कुल मुनाफा} = 300\left(\frac{100}{40}\right)\left(\frac{25+17}{25-17}\right) = 3937.50 \text{ रु.}$$

उदा. 15: A एवं B क्रमशः 16000 रु. एवं 12000 रु. निवेश कर आपस में साझेदारी करते हैं। 3 महीने बाद A 5000 रु. निकाल लेता है जबकि B 5000 रु. और निवेश करता है। 21000 रु. के साथ C तीन महीने और बाद व्यवसाय में शामिल होता है। एक साल के बाद वे 26400 रु. मुनाफा प्राप्त करते हैं। B का हिस्सा C के हिस्सा से कितना अधिक है?

yoursmahboob

हल: उपर्युक्त प्रश्न को पुनः निम्न प्रकार से लिखा जा सकता है।

A 16000 रु. 3 महीने के लिए एवं (16000 + 5000) रु. 9 महीने के लिए निवेश करता है।

B 12000 रु. 9 महीने के लिए एवं (12000 + 5000) रु. 9 महीने के लिए निवेश करता है।

C 21000 रु. 6 महीने के लिए निवेश करता है। (इन चरणों की गणना लिखने के बजाय मन में ही कर लेनी चाहिए)

अब,

A का हिस्सा : B का हिस्सा : C का हिस्सा

$$= (16 \times 3 + 11 \times 9) : (12 \times 3 + 17 \times 9) : (21 \times 6)$$

$$= 147 : 189 : 126 = 7 : 9 : 6$$

इसलिए B का हिस्सा C के हिस्से से

$$\frac{26400}{7+9+6} \times (9-6) = \frac{26400 \times 3}{22} = 3600 \text{ रु. अधिक है।}$$

नोट: गणना के दौरान, हम हजार के शून्यों को नजरअंदाज कर देते हैं क्योंकि अनुपात की गणना में इनका कोई महत्व नहीं है।

उदा. 16: A, B एवं C एक व्यवसाय में साझेदार हैं। A की पूँजी 4 महीने के लिए व्यवसाय में लगी है, जबकि वह मुनाफे का $\frac{1}{8}$ भाग प्राप्त करता है। B की पूँजी 6 महीने के लिए लगी है, जबकि वह मुनाफे का $\frac{1}{3}$ भाग प्राप्त करता है। C, 1560 रु. 8 महीने के लिए निवेश करता है। A एवं B की व्यवसाय में लगी पूँजी ज्ञात करें।

हल: मुनाफे में उनके हिस्सों का अनुपात $= \frac{1}{8} : \frac{1}{3} : \left\{1 - \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{3}\right)\right\}$

$$= \frac{1}{8} : \frac{1}{3} : \frac{13}{24} = 3 : 8 : 13$$

अब, A और C के लिए,

$$A \times 4 : 1560 \times 8 = 3 : 13$$

$$\therefore \quad A = \frac{3}{13} \times \frac{1560 \times 8}{4} = 720 \text{ रु.}$$

अब, B और C के लिए,

$$B \times 6 : 1560 \times 8 = 8 : 13$$

$$\therefore \quad B = \frac{8}{13} \times \frac{1560 \times 8}{6} = 1280 \text{ रु.}$$

youtmaboob

उदा. 17: दो साझेदार एक व्यवसाय में क्रमशः 50000 रु. एवं 70000 रु. निवेश करते हैं एवं इस बात पर सहमत हैं कि मुनाफे का 70% दोनों में बराबर-बराबर विभाजित किया जाएगा तथा बचे हुए मुनाफे को निवेश के अनुपात के अनुसार विभाजित किया जाएगा। यदि एक साझेदार को दूसरे साझेदार से 90 रु. अधिक प्राप्त होता है तो व्यवसाय में कुल मुनाफा ज्ञात करें।

हल: अंतर केवल 30% मुनाफे, जो निवेश के अनुसार विभाजित किया गया है, की वजह से है। माना कि कुल मुनाफा x रु. है तो x का 30%, (50000 : 70000 =) 5 : 7 के अनुपात में विभाजित किया जाता है।

इसलिए, पहले साझेदार का हिस्सा

$$= \left(\frac{7}{5+7}\right)x \text{ रु. का } 30\% = \frac{5x}{12} \text{ का } 30\% = \frac{x}{8}$$

एवं दूसरे साझेदार का हिस्सा

$$= \left(\frac{7}{5+7}\right)x \text{ का } 30\% = \frac{7x}{12} \text{ का } 30\% = \frac{7x}{40}$$

अतः, हिस्सों में अंतर $= \frac{7x}{40} - \frac{x}{8} = 90$ रु.

या, $\frac{7x-5x}{40} = 90$

$\therefore x = \frac{90 \times 40}{2} = 1800$ रु.

द्रुत विधि (Quicker Method) :

मुनाफे का अनुपात = 50000 : 70000 = 5 : 7

$\therefore$ कुल मुनाफा $= 90\left(\frac{100}{30}\right)\left(\frac{5+7}{7-5}\right)$

$= 1800$ रु.

उदा. 18: A, B एवं C, 2 : 3 : 4 के अनुपात में पूँजी निवेश करते हैं। कारोबार के अंत में वे 3 : 6 : 10 के अनुपात में मुनाफा प्राप्त करते हैं। पूँजी निवेश करने की अवधि का अनुपात ज्ञात करें।

हल : यदि निवेश करने का अनुपात x : y : z हो एवं मुनाफे का अनुपात P : Q : R हो तो अवधि का अनुपात $= \frac{P}{x} : \frac{Q}{y} : \frac{R}{z}$

इसलिए, अभीष्ट अनुपात $= \frac{3}{2} : \frac{6}{3} : \frac{10}{4}$

प्रत्येक पद को 2, 3 एवं 4 का ल. स. (LCM) अर्थात् 12 से गुणा करें।

yoursmahboob

$$\frac{3}{2}\times 12 : \frac{6}{3}\times 12 : \frac{10}{4}\times 12 = 18 : 24 : 30$$

$$= 3 : 4 : 5.$$

उदा. 19: A एवं B एक व्यवसाय में 3 : 2 के अनुपात में निवेश करते हैं। यदि कुल मुनाफे का 5% चैरिटी (charity) को चला जाता है तथा A का हिस्सा 855 रु. है, तो कुल मुनाफा ज्ञात करें।

हल: माना कि कुल मुनाफा 100 रु. है तो 5 रु. चैरिटी को चला जाता है। अब 95 रु. 3 : 2 के अनुपात में विभाजित किया जाता है।

$\therefore$ A का हिस्सा $= \frac{95}{3+2}\times 3 = 57$ रु.

लेकिन हम देखते हैं कि A का वास्तविक हिस्सा 855 रु. है।

$\therefore$ कुल वास्तविक मुनाफा $= 855\left(\frac{100}{57}\right) = 1500$

द्रुत विधि (Quicker Method) :
उपर्युक्त स्थिति में,

$$\text{कुल मुनाफा} = 855\left(\frac{100}{100-5}\right)\left(\frac{3+2}{3}\right)$$

$$= 855\left(\frac{100}{95}\right)\left(\frac{5}{3}\right) = 1500 \text{ रु.}$$

उदा. 20: एक साझेदारी में A पूँजी का $\frac{1}{6}$ भाग, $\frac{1}{3}$ समय के लिए निवेश करता है। B पूँजी का $\frac{1}{3}$ भाग, $\frac{1}{3}$ समय के लिए निवेश करता है, तथा C शेष पूँजी पूरे समय के लिए निवेश करता है। समय के अंत में वे 4600 रु. मुनाफा के रूप में प्राप्त करते हैं। B का हिस्सा ज्ञात करें।

हल: C पूँजी का $\left\{1-\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\right)\right\} = 1-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ हिस्सा निवेश करता है।

अब, मुनाफा का अनुपात $= A : B : C$

$$= \frac{1}{6}\times\frac{1}{6} : \frac{1}{3}\times\frac{1}{3} : \frac{1}{2}\times 1$$

$$= \frac{1}{36} : \frac{1}{9} : \frac{1}{2} = 1 : 4 : 18$$

yoursmahboob

$\therefore$ B का हिस्सा $= 4600\left(\frac{4}{1+4+18}\right) = 4600\left(\frac{4}{23}\right)$

$= 800$ रु.

अभ्यासी प्रश्न

1. 450 रु. मुनाफा को दो साझेदारों के बीच किस प्रकार विभाजित किया जाए यदि उनमें से एक ने 1200 रु. की पूँजी 5 महीने के लिए लगाई हो तथा दूसरे ने 750 रु. की पूँजी 4 महीने के लिए, निवेश की हो?

2. किसी व्यवसाय में A, B एवं C तीन साझेदार हैं। A 5 महीने के लिए 2000 रु. लगाता है, B 6 महीने के लिए 1200 रु. लगाता है तथा C 3 महीने के लिए 2500 रु. लगाता है। यदि साल के अंत में लाभ 509.82 रु. हुए हों तो प्रत्येक को कितना हिस्सा मिलेगा?

3. A एवं B एक साल के लिए साझेदारी करते हैं। A 1500 रु. लगाता है एवं B 2000 रु. निवेश करता है। 4 महीने बाद इस व्यवसाय में C भी शामिल हो जाता है, जिसने 2250 रु. निवेश किए। यदि B, 9 महीने बाद अपनी पूँजी वापस ले ले तो साल के अन्त में प्राप्त 910 रु. मुनाफे को वे आपस में किस तरह बाँटेंगे?

4. A, B एवं C साझेदारी में एक व्यवसाय शुरू करते हैं। A चौथाई अवधि के लिए, कुल पूँजी का चौथा हिस्सा निवेशित करता है; B आधे समय के लिए $\frac{1}{5}$ पूँजी लगाता है और शेष पूँजी C द्वारा पूर्ण अवधि के लिए निवेशित किया जाता है। यदि मुनाफा 3420 रु. प्राप्त हुआ हो तो A, B एवं C को कितना-कितना प्राप्त होगा?

5. तीन साझेदारों ने मिलकर व्यवसाय में 114000 रुपए लगाए। वर्ष के अंत में, इन्हें मुनाफे के तौर पर क्रमशः 337.50 रु., 1125.00 रु. एवं 675 रु. प्राप्त हुए। बताएँ कि इन लोगों ने कितना-कितना पूँजी लगाया था तथा लाभ का प्रतिशत क्या है?

6. A एवं B एक तरह की साझेदारी करते हैं। A 50 रु. लगाता है और B 45 रु.। चौथे महीने की समाप्ति पर A अपनी आधी पूँजी वापस ले लेता है और 5वें महीने की समाप्ति पर B भी अपनी पूँजी का आधा निकाल लेता है। इसके बाद C शामिल होता है 70 रु. लेकर। यदि 12 महीने की समाप्ति पर 256 रु. मुनाफा प्राप्त होता हो तो इनके बीच किस प्रकार विभाजित होगा?

7. A एवं B किसी व्यवसाय में 5 : 6 के अनुपात में पूँजी लगाते हैं। 8वें महीने की समाप्ति पर A अपनी पूँजी वापस ले लेता है। यदि वे 5 : 9 के अनुपात में मुनाफा प्राप्त करते हैं तो बताएँ, कि B ने कितने समय के लिए पूँजी लगाई थी?

8. A एवं B 10 महीने के लिए एक चरागाह किराया पर लेते हैं। A 7 महीने के लिए 90 बैल रखता है। यदि B को A को आधी रकम चुकानी पड़ी हो तो उसने शेष 3 महीने तक कितने बैल रखे थे?

yoursmahboob

उत्तर

1. मुनाफे का अनुपात – $12 \times 5 : 7.5 \times 4 = 60 : 30 = 2:1$

$\therefore$ पहले साझेदार को $\frac{450}{3} \times 2 = 300$ रु. मिलेंगे।

दूसरे साझेदार को $\frac{450}{3} \times 1 = 150$ रु. मिलेंगे।

2. मुनाफे का अनुपात = $20 \times 5 : 12 \times 6 : 25 \times 3 = 100 : 72 : 75$

अब इनका हिस्सा निकालें।

3. A का हिस्सा : B का हिस्सा : C का हिस्सा $= 15 \times 12 : 20 \times 9 : 22.5 \times 8$

$= 180 : 180 : 180$

$= 1 : 1 : 1$

अब इनका हिस्सा निकाले लें।

4. A का हिस्सा : B का हिस्सा : C का हिस्सा $= \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} : \frac{1}{5} \times \frac{1}{2} : \left\{1 - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right)\right\} \times 1$

$= \frac{1}{16} : \frac{1}{10} : \frac{11}{20}$

$= 5 : 8 : 44$

(प्रत्येक में हर के ल.स. (LCM) 80 से गुणा करने पर)

अब हिस्सा निकाल लें।

5. निवेश का अनुपात – लाभ का अनुपात

$= 337.5 : 1125 : 675$

$= 3375 : 11250 : 6750$

प्रत्येक को 1125 से विभाजित करने पर अनुपात = 3 : 10 : 6। अब हिस्सा निकाल लें।

6. A का हिस्सा : B का हिस्सा : C का हिस्सा

$= 50 \times 4 + 25 \times 8 : 45 \times 5 + 22.5 \times 7 : 70 \times 7$

$= 400 : 382.5 : 490$

अब हिस्सा निकाल लें.

7. पूँजी का अनुपात = 5 : 6

मान लिया कि समय का अनुपात = 8 : x

तब, $5 \times 8 : 6x = 5 : 9$

$\therefore \frac{40}{6x} = \frac{5}{9}$

$\therefore x = \frac{40 \times 9}{6 \times 5} = 12$ महीने

yoursmahboob

सीधे सूत्र से:

पूँजी 5 : 6

मुनाफा 5 : 9

$\therefore$ B का समय − A का समय $\left[\frac{5\times9}{6\times5}\right] - \frac{8\times5\times9}{6\times5} = 12$ महीने

8. $\frac{\text{A का हिस्सा}}{\text{B का हिस्सा}} = \frac{90\times7}{x\times3} = \frac{2}{1}$

$\therefore \quad x = \frac{90\times7}{3\times2} = 105$ बैल

yoursmahboob

प्रतिशत
(Percentage)

'प्रतिशत' शब्द का मतलब है 'प्रति सैकड़ा'। इसे निम्नलिखित रूप में परिभाषित किया जा सकता है:

"जिस भिन्न का हर 100 हो, उसे प्रतिशत (percentage) कहते हैं और उस भिन्न का अंश प्रतिशत दर (rate per cent) कहा जाता है।"

निम्नलिखित उदाहरणों के सहारे प्रतिशत एवं उनके भिन्नात्मक मानों को समझा जा सकता है:

1. किसी विद्यार्थी को अंकगणित में 60 प्रतिशत अंक प्राप्त होने का मतलब है कि पूर्णांक 100 में से उसे 60 अंक प्राप्त होंगे। अर्थात् यदि पूर्णांक 500 है तो उसे गणित में कुल 60 + 60 + 60 + 60 + 60 = 300 अंक प्राप्त हुए। उपर्युक्त पाँच '60' प्रत्येक 100 के लिए एक' को इंगित करता है।

   उस विद्यार्थी द्वारा प्राप्त कुल अंकों की गणना दूसरे ढंग से भी की जा सकती है:

   500 का 60% = $\frac{60}{100} \times 500 = 300$

   उपर्युक्त गणना को और भी आसान बनाया जा सकता है यदि भिन्नात्मक मान को उसके रूढ़ रूप में व्यक्त कर दें। प्रस्तुत उदाहरण में,

   $60\% = \frac{60}{100} = \frac{3}{5}$

   यदि हमलोग स्मरण रखें कि 60% = $\frac{3}{5}$ तो हमारी गणना आसान हो जाती है। ऐसी स्थिति में विद्यार्थी द्वारा प्राप्त कुल अंक = $\frac{3}{5} \times 500 = 300$

2. एक व्यक्ति अपनी आय का 5% शेयर में निवेश करता है। इसका मतलब है कि
   i) वह अपनी आमदनी के प्रत्येक 100 रु. में से 5 रु. शेयर में निवेश करता है, या

   ii) वह अपनी आमदनी का $\frac{5}{100}$ शेयर में निवेश करता है, या

   iii) वह अपनी आमदनी का $\frac{1}{20}$ शेयर में निवेश करता है।

   अब यदि उसकी आय 1050 रु. हो तो वह शेयर में कितना निवेश करता है?

   आप तुरत उत्तर दे सकते हैं, $\frac{1050}{20} = 52.5$ रु.

yoursmartbook

हमारा सुझाव है कि हर के रूप में 100 लेकर आप कभी आगे न बढ़ें।

3. एक व्यापारी 15 प्रतिशत लाभ कमाता है। इसके तात्पर्य यह है कि यदि वह 100 रु. निवेश करता है तो उसे 15 रु. की आमदनी होती है। पर उसे कितना मुनाफा हुआ होता यदि उसने 900 रु. की पूँजी लगाई होती। यहाँ गणना के लिए उपर्युक्त में से कौन-सा तरीका बेहतर रहेगा? क्या आपको ऐसा नहीं लगता कि यहाँ उस भिन्न के प्रयोग से सुविधा होगी जिसके हर में 100 मौजूद हो! (क्यों ?) क्योंकि 100 एवं 900 के दोनों शून्य एक दूसरे को पूर्णतया विभिन्न बना देते हैं और हमें शीघ्रता से नतीजा प्राप्त हो जाता है:

$$\frac{15}{100} \times 900 = 15 \times 9 = 135$$

(हमें उम्मीद है कि ऐसे प्रश्नों को हल करने के लिए आपको कुछ लिखना नहीं पड़ेगा।)

4. एक व्यक्ति को अपने वेतन का $33\frac{1}{3}\%$ आय-कर के रूप में देना पड़ता है. यदि उसका वेतन 3516 रु. हो तो उसे कितना आय-कर चुकाना पड़ेगा? इस प्रश्न में आप भिन्न के रूढ़ मान को लेकर आगे बढ़ें:

$$\text{आय-कर} = \frac{3516}{3} = 1172 \text{ रु.}$$

5. एक व्यक्ति अपने वेतन का 12.5% व्यवसाय में निवेश करता है। यदि उसकी वार्षिक आमदनी 50128 रु. हो, तो वह प्रतिवर्ष कितने रुपए व्यवसाय में लगाता है?

$$12\frac{1}{2}\% = \frac{1}{8}$$

$$\therefore \text{ अभीष्ट रुपए} = \frac{1}{8} \times 50128 = 6266 \text{ रु.}$$

अभी तक आपने देखा कि गणना के दौरान प्रतिशत मान का रूढ़ भिन्न (prime fraction) बेहतर रूप से प्रयुक्त होता है। इसलिए कुछ महत्वपूर्ण रूढ़ भिन्नों को (जिनका बहुत अधिक इस्तेमाल होता है) याद रखें:

$3\frac{1}{8}\% = \frac{1}{32}$ $\qquad$ $6\frac{1}{4}\% = \frac{1}{16}$

$5\% = \frac{1}{20}$ $\qquad$ $8\% = \frac{2}{25}$

$8\frac{1}{3}\% = \frac{1}{12}$ $\qquad$ $10\% = \frac{1}{10}$

$12\% = \frac{3}{25}$ $\qquad$ $12\frac{1}{2}\% = \frac{1}{8}$

yoursmahboob

$13\frac{1}{3}\% = \frac{2}{15}$ $14\frac{2}{7}\% = \frac{1}{7}$

$15\% = \frac{3}{20}$ $16\% = \frac{4}{25}$

$16\frac{2}{3}\% = \frac{1}{6}$ $20\% = \frac{1}{5}$

$25\% = \frac{1}{4}$ $33\frac{1}{3}\% = \frac{1}{3}$

$37\frac{1}{2}\% = \frac{3}{8}$ $40\% = \frac{2}{5}$

$60\% = \frac{3}{5}$ $62\frac{1}{2}\% = \frac{5}{8}$

$66\frac{2}{3}\% = \frac{2}{3}$ $75\% = \frac{3}{4}$

$87\frac{1}{2}\% = \frac{7}{8}$

उदा. 1: 625 रु. का 8 प्रतिशत ज्ञात करें।

हल: 625 रु. का $8\% = \frac{2}{25} \times 625 = 50$ रु.

उदा. 2: $12\frac{1}{2}$ प्रतिशत को भिन्न में बदलें।

हल: $12\frac{1}{2}\% = \frac{12\frac{1}{2}}{100} = \frac{25}{200} = \frac{1}{8}$

उदा. 3: $\frac{3}{8}$ कितना प्रतिशत के समतुल्य है?

हल: $\frac{3}{8} \times 100 = \frac{75}{2} = 37\frac{1}{2}\%$

उदा. 4: $\frac{7}{11}$ कितना प्रतिशत के समतुल्य है? या $\frac{7}{11}$ को प्रतिशत के रूप में अभिव्यक्त करें।

हल: $\frac{7}{11} \times 100 = \frac{700}{11} = 63\frac{7}{11}\%$

yoursmahboob

उदा. 5: यदि किसी शहर की जनसंख्या 60000 से बढ़कर 65000 हो गई तो जनसंख्या में कुल कितने प्रतिशत की वृद्धि हुई?

हल: जनसंख्या में वृद्धि = 65000 − 60000 = 5000

$\therefore$ वृद्धि (प्रतिशत में) = $\frac{5000}{60000} \times 100 = \frac{25}{3} = 8\frac{1}{3}\%$

उदा. 6: राम का वेतन 630 से बढ़ाकर 700 कर दिया जाता है। बताइए कि वेतन में कितने प्रतिशत की वृद्धि हुई?

हल: वेतन में वृद्धि = (700 − 630) रु. = 70 रु.

$\therefore$ वृद्धि (प्रतिशत में) = $\frac{70}{630} \times 100 = 11\frac{1}{9}\%$

उदा. 7: दो उम्मीदवारों के एक चुनाव में, एक उम्मीदवार को 41% मत मिलता है तथा वह दूसरे उम्मीदवार से 2412 मतों से चुनाव हार जाता है; बताइए कुल मतों की संख्या क्या है?

हल : (59% − 41%) = 18% = 2412

$\therefore$ $100\% = \frac{2412}{18} \times 100 = 13400$

उदा. 8: यदि 8 लिटर चीनी के घोल को जिसमें 5% चीनी है खौलाने पर 2 लिटर पानी वाष्पीकृत होकर उड़ जाता है तो बचे हुए घोल में चीनी का प्रतिशत ज्ञात करें।

हल : चूँकि चीनी घोल से वाष्पीकृत नहीं हो सकती है इसलिए चीनी की मात्रा 8 लिटर मूल घोल में = चीनी की मात्रा बचे हुए घोल में (8 − 2 =) 6 लिटर में

$\therefore$ 8 का 5% = 6 का x%

$\therefore$ $x = \frac{5 \times 8}{6} = 6\frac{2}{3}\%$

***द्वितीय विधि* (Second Method) :**

चीनी का प्रतिशत (मूल घोल में) = 8 लिटर का 5%

= 0.4 लिटर

2 लिटर पानी वाष्पीकृत होने पर, शेष घोल की मात्रा = (8 − 2 =) 6 लिटर

$\therefore$ चीनी का अभीष्ट प्रतिशत = $\frac{0.4}{6} \times 100$

$= 6\frac{2}{3}\%$

उदा. 9: एक द्रव में 25% दूध है तथा दूसरे द्रव में 30% दूध है। एक कैन को पहले द्रव का 6 भाग तथा दूसरे द्रव का 4 भाग से भरा जाता है। दूध का प्रतिशत नए मिश्रण में क्या है?

हल: नये मिश्रण में दूध का अभीष्ट प्रतिशत

$= \frac{\text{नए मिश्रण में दूध की मात्रा}}{\text{नए मिश्रण की मात्रा}} \times 100$

yoursmahboob

$$= \frac{25\%\ \text{दूध का 6 भाग} \times 30\%\ \text{दूध का 4 भाग}}{\text{द्रव का (6 भाग + 4 भाग)}} \times 100$$

$$= \frac{6 \times \frac{25}{100} + 4 \times \frac{30}{100}}{10} \times 100$$

$$= (15 + 12) = 27$$

नोट : मिश्रण (Alligation) विधि से भी इस प्रश्न को हल किया जा सकता है।

$$\frac{30 - x}{x - 25} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

या, $60 - 2x = 3x - 75$

या, $5x = 60 + 75$

$\therefore\ x = 27\%$

उदा. *10:* किसी कारखाने में श्रमिकों की कमी की वजह से उसके उत्पादन में 25% की कमी आती है। कार्य अवधि को कितना प्रतिशत बढ़ाया जाए ताकि उत्पादन पूर्ववत बनी रहे?

हल : उत्पादन में कमी की वजह है केवल श्रमिकों में कमी.

श्रमिकों में कमी = 25%

अब, मान लिया कि कार्य अवधि को x% बढ़ा दिया जाता है। ताकि उत्पादन पूर्ववत बनी रहे।

उत्पादन = श्रमिक × कार्य अवधि = M × W (मान लिया)

अब, M × W = (M − M का 25%) × (W + W का x%)

या, $M \times W = \frac{75}{100} M \times \frac{100+x}{100} W$

या, $100 \times 100 = 75(100 + x)$

या, $\frac{400}{3} = 100 + x \quad \therefore\ x = \frac{100}{3} = 33\frac{1}{3}\%$

विधि II : गणना को आसान बनाने के लिए, मान लिया कि

श्रमिक = 100 इकाई एवं

कार्य-अवधि = 100 इकाई

yoursmahboob

पुनः मान लिया कि कार्य-अवधि को x% बढ़ा दिया जाता है।

तो, $(100 - 25)(100 + x) = 100 \times 100$

या, $100 - x = \frac{400}{3}$ $\therefore$ $x = \frac{100}{3} = 33\frac{1}{3}\%$

सूत्र विधि (Direct Formula) :

कार्य-अवधि में अभीष्ट प्रतिशत वृद्धि $= \frac{25}{100-25} \times 100 = \frac{100}{3} = 33\frac{1}{3}\%$

एक राशि दूसरे का कितना प्रतिशत है यह ज्ञात करना

उदा. 11: 1.25 रु. 10 रु. का कितना प्रतिशत है? इसे भिन्न के रूप में व्यक्त करें।

हल: भिन्न $= \frac{1.25 \text{ रु.}}{10 \text{ रु.}} = \frac{125}{1000} = \frac{1}{8}$

अब, $\frac{1}{8} = \frac{\frac{1}{8} \times 100}{100} = \frac{12\frac{1}{2}}{100} = 12\frac{1}{2}\%$

नोट: उपर्युक्त प्रश्न को प्रायः इस प्रकार लिखा जाता है: "1.25 रु. 10 रु. का कितना प्रतिशत है?"

उदा. 12: 6 पैसे 1 रु. का कितना प्रतिशत है?

हल: अभीष्ट भिन्न $= \frac{6 \text{ पै.}}{1 \text{ रु.}} = \frac{6}{100} = \frac{3}{50} = \frac{\overset{3}{\cancel{50}} \times 100}{100} = 6\%$

उदा. 13: किसी सुनिश्चित रकम का 12%, 43.5 रु. है तो रकम बताइए।

हल: रकम का $\frac{12}{100} = 43\frac{1}{2}$ रु.

$\therefore$ रकम $= \frac{87}{2} \times \frac{100}{12} = 362.50$ रु.

प्रमेय: यदि दो राशियाँ तीसरी राशि से क्रमशः x% एवं y% बड़ी हों तो पहली राशि, दूसरी राशि की $\frac{100+x}{100+y} \times 100\%$ होती है।

प्रमाण: मान लिया कि तीसरी राशि = 100 है।

तो, पहली राशि = 100 + 100 का x% = 100 + x

एवं, दूसरी राशि = 100 + 100 का y% = 100 + y

$\therefore$ पहली राशि दूसरे की $\frac{100+x}{100+y} \times 100\%$ है।

yoursmahboob

उदा. 14: दो संख्याएँ तीसरी संख्या से क्रमशः 20% एवं 50% बड़ी हैं। तो पहला दूसरे का कितना प्रतिशत है?

हल: उपर्युक्त प्रमेय के आधार पर अभीष्ट मान $= \frac{120}{150} \times 100 = 80\%$

प्रमेय: यदि A, C का x% हो तथा B, C का y% हो तो A, B का $\frac{x}{y} \times 100\%$ होता है।

प्रमाण: स्वयं प्रयास करें।

उदा. 15: दो संख्याएँ तीसरी संख्या का क्रमशः x% एवं y% हैं तो पहली संख्या, दूसरी संख्या का कितना प्रतिशत है?

हल: उपर्युक्त प्रमेय के अनुसार, अभीष्ट मान $= \frac{20}{25} \times 100 = 80\%$

नोट: उपर्युक्त गणितीय संबंध बड़े सरल हैं- जब पहला दूसरे का क्या है? पूछा जाए तो पहले को अंश बनाइए एवं दूसरे को हर। इसका विलोम भी उतना ही सत्य है।

उदा. 16: दो संख्याएँ तीसरी संख्या से क्रमशः 30% एवं 40% छोटी हैं तो दूसरी संख्या पहली संख्या का कितना प्रतिशत है?

हल: सर्वप्रथम आप स्वयं सूत्र प्राप्त करने का प्रयास करें। यदि आप ऐसा न कर सकें तो निम्नलिखित सूचनाओं पर ध्यान दें;

1. दो संख्याएँ तीसरी से छोटी हैं, तथा
2. हमें पहली संख्या की तुलना में दूसरी संख्या का प्रतिशत मान मालूम करना है। इसलिए हमारा सूत्र होना चाहिए

$$\frac{100-40}{100-30} \times 100 = \frac{60}{70} \times 100 = 85\frac{5}{7}\%$$

उदा. 17: एक धनात्मक संख्या को 5 से गुणा करने के बजाए उस संख्या में 5 से भाग दिया जाता है। प्राप्त परिणाम अभीष्ट सही मान का कितना प्रतिशत है?

हल: मान लिया कि संख्या 1 है तो सही उत्तर = 5

गलत उत्तर जो प्राप्त होता है $= \frac{1}{5}$

$\therefore$ अभीष्ट प्रतिशत $= \frac{1}{5 \times 5} \times 100\% = 4\%$

उदा. 18: एक धनात्मक संख्या में 5 से भाग देने के बजाए, गलती से उस संख्या में 5 से गुणा कर दिया जाता है। प्राप्त परिणाम सही उत्तर से कितना प्रतिशत अधिक या कम है?

हल: माना कि संख्या 1 है, तो सही उत्तर $= \frac{1}{5}$

$\therefore$ प्राप्त परिणाम सही उत्तर से $\left(5 - \frac{1}{5}\right) = \frac{24}{5}$ अधिक है।

yoursmahboob

$\therefore$ अभीष्ट प्रतिशत $= \dfrac{\frac{25}{5}}{\frac{1}{5}} \times 100 = 2400\%$

प्रतिशत व्यय एवं बचत

उदा. 19: एक व्यक्ति अपनी आमदनी का $12\frac{1}{2}\%$ खो देता है, तथा शेष का 70% खर्च कर देने के बाद उसके पास 210 रु. बच जाते हैं। उस व्यक्ति के पास प्रारंभ में कितने रुपए थे?

हल: उपर्युक्त प्रश्न को कई विधियों से हल किया जा सकता है। यहाँ हम उनमें से कुछ एक की चर्चा करेंगे:

I. मान लिया कि प्रारंभ में उसके पास कुल x रु. थे। $12\frac{1}{2}\%$ या $\frac{1}{8}$ खो देने के बाद उसके पास $x - \frac{x}{8} = \frac{7x}{8}$ रु. बच जाते हैं।

70% खर्च करने के बाद उसके पास शेष $\frac{7x}{8}$ का 30% बच जाएगा।

$$\frac{7x}{8} \times \frac{3}{10} = 210$$

$$\therefore x = \frac{210 \times 10 \times 8}{3 \times 7} = 800 \text{ रु.}$$

II. मान लिया कि उसके पास आरंभ में 100 रु. थे। $12\frac{1}{2}$ रु. खोने के बाद उसके पास $87\frac{1}{2}$ रु. बच गए। उसने $87\frac{1}{2}$ का 70% खर्च कर दिया। इसलिए उसके पास ($87\frac{1}{2}$ का 30%) या $\frac{105}{4}$ रु. बच जाएँगे। लेकिन उसके पास 210 रु. बच गए हैं। इसलिए हमें निम्नलिखित समानुपातिक संबंध प्राप्त होता है:

$\frac{105}{4}$ रु. : 210 रु. :: 100 रु. : अभीष्ट रु. (रूल ऑफ थ्री से)

$$\therefore \text{अभीष्ट रु.} = \frac{4 \times 210 \times 100}{105} \text{ रु.} = 800 \text{ रु.}$$

III. ***द्रुत विधि* (Quicker Method):** यह विधि न केवल संक्षिप्त है बल्कि गणना की दृष्टि से सरल एवं त्वरित भी। केवल सूत्र को सही ढंग से याद रखें।

yoursmahboob

प्रारंभ में उसके पास कुल रुपए $= \dfrac{210\times100\times100}{(100-12.5)(100-70)}$

$$= \frac{210\times100\times100}{87.5\times30} = 800 \text{ रु.}$$

नोट: चूँकि प्रारंभ में जितने रु. थे, वे निश्चय ही शेष बचे रुपयों से कहीं अधिक होंगे। इसलिए आयको बड़ी संख्या 100 को अंश एवं छोटी संख्या (100 – 12.5), या (100 – 70) को हर की जगह रखने में कोई दुविधा नहीं होनी चाहिए।

उदा. 20: आय का 3.5% कर के रूप में ले लिया जाता है तथा शेष का 12.5% बचाया जाता है। ऐसा करने के बाद खर्च करने के लिए 4053 रु. बच जाते हैं। आय कितनी है?

हल: दत्त विधि से जो परिणाम प्राप्त होता है, वह कुछ इस प्रकार है,

$$\text{आय} = \frac{4053\times100\times100}{(100-3.5)(100-12.5)} = 4800 \text{ रु.}$$

इस प्रकार हमें एक सामान्य सूत्र प्राप्त होता है, जिसे निम्नलिखित प्रमेय के रूप में व्यक्त किया जा सकता है:

प्रमेय: यदि किसी राशि का x% पहले व्यक्ति ने ले लिया हो, शेष का y% दूसरे व्यक्ति ने लिया हो तथा जो शेष बचे उसका z% तीसरे व्यक्ति द्वारा लेने के उपरान्त यदि A राशि बच जाए

तो आरंभ में कुल राशि $\dfrac{A\times100\times100\times100}{(100-x)(100-y)(100-z)}$ रही होगी।

प्रमाण: आरंभिक राशि निश्चित रूप से A से अधिक होगी, इसलिए भिन्न के निम्न से, A में ऐसे भिन्नों से गुणा करना होगा, जिसका मान 1 से अधिक है। समस्या है ऐसे भिन्नों को प्राप्त करने की। चूँकि हर चरण में राशि में कमी होती जाती है इसलिए हमारे भिन्न में 100 के अतिरिक्त (100 – x), (100 – y), एवं (100 – z) भी शामिल होने चाहिए। इस प्रकार, वे भिन्न, जिनका मान 1 से अधिक हो तथा जिनसे A में गुणा किया जाता है, वे इस प्रकार हैं:

$$\frac{100}{100-x},\ \frac{100}{100-y} \text{ एवं } \frac{100}{100-z}$$

$$\therefore \text{ अभीष्ट आरंभिक राशि} = A\left(\frac{100}{100-x}\right)\left(\frac{100}{100-y}\right)\left(\frac{100}{100-z}\right)$$

प्रमेय: यदि किसी राशि में उसका x% जोड़ दिया जाए, इस बढ़ी हुई राशि में फिर इसका y% जोड़ दिया जाए तथा फिर जो राशि प्राप्त हो उसमें उसका z प्रतिशत जोड़ दिया जाए और इस प्रकार जो राशि प्राप्त हो उसे A से सूचित किया जाए तो आरंभिक राशि

$$= \frac{A\times100\times100\times100}{(100+x)(100+y)(100+z)}$$

yoursnotebook

प्रमाण: आरंभिक राशि निश्चय ही अंतिम राशि 'A' से कम होनी चाहिए। इसलिए 'भिन्न के नियम' के अनुसार A में ऐसे भिन्नों से गुणा करना होगा जिनका मान 1 से कम हो। चूँकि प्रत्येक चरण में राशि में वृद्धि होती जाती है, इसलिए 100 के अतिरिक्त (100 + x), (100 + y) एवं (100 + z) जैसे भिन्न भी प्राप्त होते हैं। इस प्रकार 1 से कम मान वाले वे भिन्न जिनसे हमें A में गुणा करना है, निम्नलिखित हैं :

$$\frac{100}{100+x},\ \frac{100}{100-y} \text{ एवं } \frac{100}{100+z}$$

$$\therefore \text{ अभीष्ट आरंभिक राशि} = A\left(\frac{100}{100+x}\right)\left(\frac{100}{100+y}\right)\left(\frac{100}{100-z}\right)$$

उपर्युक्त प्रमेयों पर आधारित कुछ और उदाहरण

उदा. 21: किसी राशि में से 10 प्रतिशत घटाने के बाद जो शेष बचता है, उसका 20 प्रतिशत फिर उसमें से घटा लिया जाता है। इसके बाद 3600 रु. बच जाते हैं तो मूल राशि क्या है?

हल: निश्चय ही मूल राशि 3600 से अधिक होगी इसलिए इसमें $\frac{100}{(100-10)}$ एवं $\frac{100}{(100-20)}$ से गुणा करना होगा।

$$\therefore \text{ अभीष्ट राशि} = \frac{3600\times100\times100}{90\times80} = 5000 \text{ रु.}$$

उदा. 22: दो वर्ष पूर्व किसी व्यक्ति के लॉकर में 4800 रु. थे। पहले वर्ष में उसने इसका 20% उसमें जमा किया। दूसरे वर्ष में उसने लॉकर में बढ़ी हुई राशि का 25% जमा किया। इस समय लॉकर में कितने रु. हैं?

हल: निश्चय ही अभीष्ट राशि 4800 रु. से अधिक है। एवं प्रत्येक वर्ष रकम में कुछ बढ़त होती है। इसलिए इस राशि में $\left(\frac{100+20}{100}\right)$ एवं $\left(\frac{100+25}{100}\right)$ से गुणा किया जाना चाहिए।

$$\therefore \text{ अभीष्ट राशि} = \frac{4800\times120\times125}{100\times100} = 7200 \text{ रु.}$$

नोट: उपर्युक्त उदाहरण दूसरे उदाहरणों से अलग है, इस पर ध्यान दें।

जनसंख्या से संबंधित सूत्र

उदा. 23: यदि किसी शहर की मूल जनसंख्या P हो एवं यह r% प्रति वर्ष की दर से बढ़ रही हो तो n वर्षों के बाद जनसंख्या कितनी होगी?

हल: 1 साल के बाद जनसंख्या $= P + \frac{Pr}{100} = P\left[1 + \frac{r}{100}\right]$

yoursmyboob

इसका मतलब यह है कि एक वर्ष के दौरान, वर्ष के प्रारंभ की जनसंख्या (P) $\left[1+\frac{r}{100}\right]$ से गुणित हो जाती है। अब, दूसरे साल के आरंभ में जनसंख्या = $P\left(1+\frac{r}{100}\right)$

$\therefore$ 2 वर्षों में जनसंख्या = $P\left(1+\frac{r}{100}\right)^2$

$\therefore$ n वर्षों में जनसंख्या = $P\left(1+\frac{r}{100}\right)^n$

नोट: यदि जनसंख्या में प्रतिवर्ष r% की दर से कमी होने लगे तो n वर्ष के बाद जनसंख्या

$= P\left(1-\frac{r}{100}\right)^n$

उदा. 24: यदि किसी शहर की जनसंख्या 4% प्रति वर्ष की दर से बढ़ रही हो तथा लोगों की वर्तमान संख्या 15625 हो तो 3 वर्ष बाद जनसंख्या क्या होगी?

हल: अभीष्ट जनसंख्या $= 15625\left(1+\frac{4}{100}\right)^3$

$= 15625\times\frac{26}{25}\times\frac{26}{25}\times\frac{26}{25} = 17576$

उदा. 25: यदि किसी शहर की जनसंख्या 4% प्रतिवर्ष की दर से बढ़ रही हो तथा इस समय जनसंख्या 17576 हो तो 3 वर्ष पूर्व जनसंख्या कितनी थी?

हल: 3 वर्ष पूर्व की जनसंख्या $\times\left(\frac{26}{25}\right)^3$ = वर्तमान जनसंख्या

$\therefore$ 3 वर्ष पूर्व की जनसंख्या $= \frac{17576\times25\times25\times25}{26\times26\times26} = 15625$

नोट: उदा.-24, एवं उदा.-25 के सवाल भिन्नों के कमाल को देखा जा सकता है। उदा. 24 में अभीष्ट जनसंख्या निश्चय ही प्रदत्त जनसंख्या से बड़ी थी, इसलिए हमने बड़ी संख्या (26) को अंश बनाया एवं छोटी संख्या (25) को हर। उदा.-25 में ठीक इसके उल्टा किया गया है।

जब अलग-अलग वर्षों में अलग-अलग रफ्तार से वृद्धि हुई हो

प्रमेय: यदि किसी शहर की जनसंख्या P पहले वर्ष में x% की रफ्तार से बढ़े, दूसरे वर्ष में y% की रफ्तार से बढ़े एवं तीसरे वर्ष में z% की रफ्तार से बढ़े तो तीसरे वर्ष के अन्त में जनसंख्या

yoursmahboob

$$= \frac{P \times (100+x)(100+y)(100+z)}{100 \times 100 \times 100}$$

प्रमाण: भिन्न के नियम के अनुसार P में किसी ऐसे भिन्न से गुणा करना होगा जिसका मान 1 से अधिक हो।

$$\therefore \text{ 3 वर्ष बाद जनसंख्या} = P\left(\frac{100+x}{100}\right)\left(\frac{100+y}{100}\right)\left(\frac{100-z}{100}\right)$$

नोट: क्या आपने ध्यान दिया कि गुणक भिन्न $\left(\frac{100+x}{100}\right)$ है न कि $\left(\frac{100}{100-x}\right)$ क्यों?

क्योंकि जनसंख्या में x% प्रति वर्ष की दर से वृद्धि होती है, इसलिए हमारे पास दो राशियाँ हैं 100 एवं (100 + x) और चूँकि एक वर्ष बाद जनसंख्या P से निश्चय ही अधिक होगी, इसलिए हमलोग P में $\frac{100+x}{100}$ से गुणा करते हैं। बाकि वर्षों के लिए भी हम इसी प्रकार की गणना करते हैं।

उदा. 26: किसी शहर की जनसंख्या 8000 है। पहले वर्ष में यह 10 प्रतिशत की दर से बढ़ती है तथा दूसरे वर्ष में 20% की दर से वृद्धि होती है। दो वर्ष बाद जनसंख्या क्या होगी?

हल: अभीष्ट जनसंख्या $= \frac{8000 \times 110 \times 120}{100 \times 100} = 10560$

यदि जनसंख्या पहले वर्ष में बढ़ती हो एवं फिर दूसरे वर्ष में घट जाती हो

प्रमेय: उपर्युक्त प्रमेय में यदि दूसरे वर्ष में जनसंख्या y% घट जाए तथा पहले एवं तीसरे वर्ष में वैसी ही वृद्धि हुई हो तो, तीसरे वर्ष के अंत में जनसंख्या $= \frac{P(100+x)(100-y)(100+z)}{100 \times 100 \times 100}$

प्रमाण: स्वयं प्रयास करें।

उदा. 27: किसी शहर की जनसंख्या 10,000 है। पहले वर्ष में इसमें 10% की वृद्धि हुई। दूसरे वर्ष में यह 20% घट गई तथा तीसरे वर्ष इसमें फिर से 30% की वृद्धि हुई। 3 वर्ष बाद जनसंख्या कितनी होगी?

हल: अभीष्ट जनसंख्या $= \frac{10000 \times 110 \times 80 \times 130}{100 \times 100 \times 100} = 11440$

उदा. 28: किसी स्थान की जनसंख्या पहले वर्ष में 5 प्रतिशत बढ़ जाती है तथा अगले वर्ष 5 प्रतिशत कम हो जाती है। यदि दूसरे वर्ष के अंत में जनसंख्या 7980 हो, तो पहले वर्ष के आरंभ में जनसंख्या कितनी थी?

हल: अभीष्ट जनसंख्या $= 7980 \times \left(\frac{100}{100-5}\right)\left(\frac{100}{100+5}\right)$

$$= \frac{7980 \times 100 \times 100}{95 \times 105} = 8000$$

yousmahboob

नोट: उपर्युक्त उदाहरण में दो वर्षों के बाद की जनसंख्या दी हुई है तथा प्रथम वर्ष के आरंभ में कितनी जनसंख्या थी यह पूछा गया है। यही कारण है कि विकल्पों को उलट दिया गया है। इस बात को ध्यान में रखें। अगले उदाहरण में भी यही दिखाया गया है।

उदा. 29: किसी शहर की जनसंख्या पहले वर्ष में 10% की दर से बढ़ती है तथा दूसरे वर्ष में यह 10% प्रतिवर्ष की दर से कम हो जाती है। यदि इस शहर में कुल 29700 लोग रह रहे हों तो 2 वर्ष पूर्व जनसंख्या कितनी थी?

हल: अभीष्ट जनसंख्या $= \dfrac{29700\times100\times100}{(100-10)\times(100+10)}$

$$= \frac{29700\times100\times100}{90\times110} = 30000$$

उदा. 30: किसी शहर की जनसंख्या 8000 है। यदि पुरुषों की संख्या 6 प्रतिशत की दर से बढ़े एवं महिलाओं की संख्या में वृद्धि की रफ्तार 10 प्रतिशत हो तो जनसंख्या 8600 हो जाएगी। शहर में महिलाओं की संख्या ज्ञात करें।

हल: मान लिया कि महिलाओं की संख्या $= x$

तो x का $110\% + (8000 - x)$ का $106\% = 8600$

या, $\dfrac{110x}{100} + \dfrac{106(8000-x)}{100} = 8600$

या, $x(110-106) = 8600\times100 - 8000\times106$

$\therefore\ x = \dfrac{8600\times100 - 8000\times106}{110-106} = \dfrac{12000}{4} = 3000$

नोट: यदि हम बीच के (intermediate) चरणों को नजरंदाज कर दें तो महिलाओं एवं पुरुषों की जनसंख्या निम्नलिखित प्रकार से सीधे भी निकाली जा सकती है:

महिलाओं की जनसंख्या $= \dfrac{8600\times100 - 8000(100+6)}{10-6} = 3000$

पुरुषों की जनसंख्या $= \dfrac{8600\times100 - 8000(100-10)}{6-10} = \dfrac{20000}{4} = 5000$

***मिश्रण-विधि से* (By Method of Alligation):**

औसत प्रतिशत वृद्धि $= \dfrac{600}{8000}\times100 = \dfrac{15}{2} = 7.5\%$

अब,

पुरुष		महिलाएँ
6%	7.5%	10%
2.5		1.5

$\therefore$ पुरुष : महिला $= 2.5 : 1.5 = 5:3$

yoursmahboob

$\therefore$ महिलाओं की संख्या $= \frac{8000}{5+3} \times 3 = 3000$

उपभोग में ह्रास (Reduction In Consumption)

उदा. 31: यदि किसी वस्तु के मूल्य में 20% की वृद्धि होती है तो उस वस्तु की खपत कितना प्रतिशत कम की जाए ताकि खर्च बिल्कुल न बढ़ना पड़े?

हल: I. मान लिया कि मूल्य एवं खपत दोनों 100 इकाई हैं।

प्रश्नानुसार, प्रारंभ में व्यय $= (100 \times 100)$ रु.

नया मूल्य $= 120$ इकाई

मान लें कि व्यय को पूर्ववत रखने के लिए वह खपत में $x\%$ की कटौती करता है। तो उसका

कुल व्यय $= [120 \times (100 - x)]$ रु.

प्रश्नानुसार, $100 \times 100 = 120(100 - x)$

या, $120x = 120 \times 100 - 100 \times 100$

या, $x = \frac{100(120-100)}{120} = 16\frac{2}{3}\%$

II. बढ़ा हुआ मूल्य = पुराने मूल्य का $\frac{120}{100}$

$\therefore$ खपत = मूल मात्रा का $\frac{100}{120}$ $\left[\frac{120}{100} \text{ का व्युत्क्रम}\right]$

$\therefore$ खपत में कमी $=$ मूल खपत का $\left(1 - \frac{100}{120}\right)$

$= \text{मूल खपत का } \frac{1}{6} = 16\frac{2}{3}\%$

III. द्रुत विधि (Quicker Method):

प्रमेय: यदि किसी वस्तु की कीमत में $r\%$ की वृद्धि हो तो खपत में $\left(\frac{r}{100+r} \times 100\right)\%$ की कटौती करने से खर्च बराबर बना रहेगा।

प्रमाण: सूत्र को $\left(r \times \frac{100}{100+r}\right)$ के रूप में लिखा जा सकता है। यदि आप ध्यानपूर्वक देखें तो पाएँगे कि भिन्न $\frac{100}{100+r}$ का मान 1 से कम है (क्योंकि अंश हर से कम है)। क्यों? क्योंकि इस स्थिति में हमारा अभीष्ट मान प्रदत्त मान (20%) से कम है, इस प्रकार इस स्थिति में भी, भिन्न के निरूपण का प्रयोग किया गया है।

yoursmahboob

इस प्रकार,

अभीष्ट उत्तर $= \frac{20}{100+20} \times 100 = \frac{50}{3} = 16\frac{2}{3}\%$

उदा. 32: यदि चीनी की कीमत 10% गिर जाती हो तो कोई गृहपति अपनी खपत कितना बढ़ा दे ताकि उसके खर्च में कोई कमी नहीं आए।

हल: यह प्रश्न, उदा. 31 के अनुरूप है। उदा.– 31 के संदर्भ में प्रयुक्त तीनों विधियों से भी इसे हल किया जा सकता है। लेकिन हमलोग यहाँ केवल तीसरी विधि का इस्तेमाल करेंगे। अन्य दोनों विधियों के सहारे खुद ही हल करने का प्रयत्न करें।

द्रुत विधि (Quicker Method):

प्रमेय: यदि किसी वस्तु का मूल्य r% कम हो जाता हो तो खपत में $\left[\frac{r}{(100-r)} \times 100\right]\%$ की वृद्धि करने से उस वस्तु पर किया जानेवाला व्यय समान बना रहता है।

प्रमाण: यदि हम सूत्र को $r \times \frac{100}{(100-r)}$ के रूप में लिखें तो पाते हैं कि भिन्नात्मक मान $\left[\frac{100}{100-r}\right]$, 1 से बड़ा है। क्यों? (इसका उत्तर स्वयं ढूँढ़ें)।

इसलिए, इस स्थिति में,

अभीष्ट उत्तर $= \frac{10}{(100-10)} \times 100 = 11\frac{1}{9}\%$

प्रतिशत संबंध (Percentage Relationship)

यदि पहला मान दूसरे मान से r प्रतिशत अधिक हो, तो दूसरा मान पहले मान से $\left(\frac{r}{100+r} \times 100\right)\%$ कम होगा।

प्रमाण: भिन्न के निरूप से, r में ऐसे भिन्न से गुणा किया जाना चाहिए, जिसका मान 1 से कम हो। यह अभीष्ट भिन्न है: $\frac{r}{100+r}$.

साधारण गणितीय गणना की विधि

मान लिया कि दूसरा मान 100 है।

∴ पहला मान $= (100+r)$

अब चूँकि, जब पहला मान $(100+r)$ है तो दूसरा पहले मान से r कम है।

∴ जब पहला मान 100 है तो दूसरा पहले मान से $\left[\frac{r}{100+r} \times 100\right]$ कम है।

yoursmahboob

∴ दूसरा मान पहले की तुलना में $\left[\frac{r}{100+r}\times 100\right]\%$ कम है।

प्रमेय: यदि पहला मान दूसरे मान से r प्रतिशत कम है तो दूसरा मान पहले मान से $\left[\frac{r}{100-r}\times 100\right]\%$ अधिक होता है।

प्रमाण: स्वयं कोशिश करें।

उदा. 33: यदि A का वेतन B से 25% अधिक हो तो B का वेतन A से कितना प्रतिशत कम है?

हल: I. मान लिया कि B का वेतन 100 रु. प्रति माह है तब A का वेतन 125 रु. प्रति माह होगा।

अब चूँकि अब A का वेतन 125 है तो B, 25 कम है।

∴ जब A का वेतन 100 हो तो B, $\frac{25}{125}\times 100$ कम है। या, 20% कम है।

अर्थात् B का वेतन A से 20% कम है।

II. द्रुत विधि (Quicker Method):

यदि A की आय B की आय से r% अधिक हो तो B की आय A की तुलना में $\left(\frac{r}{100+r}\times 100\right)\%$ कम होगा।

प्रदत्त प्रश्न में,

अभीष्ट उत्तर = $\frac{25}{100+25}\times 100\% = 20\%$

नोट: क्या आपने उदा. 32 में प्रयुक्त सूत्र एवं इस सूत्र में कोई समानता देखी?

उदा. 34: यदि A का वेतन B के वेतन से 30% कम हो तो B का वेतन A से कितना अधिक होगा?

हल: **द्रुत विधि (Quicker Method):**

यदि A का वेतन B से r प्रतिशत कम हो तो B का वेतन A की तुलना में $\left(\frac{r}{100-r}\times 100\right)\%$ अधिक होगा।

∴ प्रस्तुत प्रश्न में, अभीष्ट उत्तर = $\frac{30}{100-30}\times 100 = 42\frac{6}{7}\%$

नोट: उदा. 33 एवं उदा. 34 में आपको कोई एकरूपता दिखी?

उदा. 35: एक संख्या दूसरी से 50% अधिक है तो, दूसरी संख्या पहली संख्या से कितना प्रतिशत कम है?

हल: पिछले प्रश्न में जिस सूत्र की चर्चा की गई उसका यहाँ भी उपयोग किया जा सकता है।

yourshahboob

उस सूत्र के अनुसार दूसरी संख्या पहली संख्या से $\left[\frac{50}{100-50}\times 100\right]\% = 33\frac{1}{3}\%$ कम होगी।

उदा. 36: एक संख्या दूसरी से 20% कम है तो दूसरी संख्या पहली से कितना प्रतिशत अधिक है?

हल: उदा. 12 एवं उदा.-34 में दिए गए सूत्र का इस्तेमाल करें।

किसी राशि को दूसरी राशि के प्रतिशत के रूप में व्यक्त करना

उदा. 37: 20 को 80 के प्रतिशत के रूप में व्यक्त करें।

हल: यदि पहली राशि 80 है तो दूसरी 20 है।

$\therefore$ यदि पहली राशि 100 है तो दूसरी $\frac{20}{80}\times 100 = 25$

$\therefore$ 20, 80 का 25% है।

इस प्रकार, बिना विस्तार में गए हुए, हम कह सकते हैं कि x, y के प्रतिशत के रूप में, $\left[\frac{x}{y}\times 100\right]\%$ है।

उदा. 38: 250 को 50 के प्रतिशत के रूप में व्यक्त करें।

हल: अभीष्ट प्रतिशत $= \frac{250}{50}\times 100 = 500\%$

उदा. 39: 160 को 120 के प्रतिशत के रूप में व्यक्त करें।

हल: अभीष्ट प्रतिशत $= \frac{160}{120}\times 100 = \frac{400}{3} = 133\frac{1}{3}\%$

उदा. 40: 20 को '200 के प्रति हजार' के रूप में व्यक्त करें।

हल: अभीष्ट उत्तर $= \frac{20}{200}\times 1000 = 100$ प्रति हजार

जब शुरू में वृद्धि हो एवं बाद में ह्रास हो

उदा. 41: किसी श्रमिक के वेतन में आरंभ में 10% की वृद्धि होती है एवं फिर इसमें 10 प्रतिशत की कमी कर जाती है। वेतन में कुल मिलाकर कितना फर्क आया?

हल: मान लिया कि श्रमिक का वेतन 100 रुपए था।

वृद्धि के उपरान्त वेतन = 100 + 100 का 10% = 110 रु.

वेतन में कटौती के बाद, वेतन = 110 − 110 का 10% = 99 रु.

$\therefore$ प्रतिशत परिवर्तन = 100 − 99 = 1%

***द्रुत विधि* (Quicker Method):**

प्रमेय: यदि किसी संख्या में आरंभ में x% की वृद्धि होती हो एवं फिर x% की कमी हो तो कुल

yoursmartboob

मिलाकर उस संख्या का मान कम हो जाता है और यह कमी x का x% अर्थात् $\frac{x^2}{100}$ के बराबर होती है।

प्रमाण: मान लिया कि संख्या – A

यदि इसमें x% की वृद्धि हो तो यह

$A + A$ का $x\% = A + \frac{Ax}{100} = \frac{A(100+x)}{100}$ हो जाता है।

अब इस बढ़े हुए मान में x% की कमी आती है तो यह

$\left\{\frac{A(100+x)}{100} - \frac{A(100+x)}{100}\right.$ का $\left.x\%\right\}$ हो जाता है।

$$= \frac{A(100+x)}{100} - \frac{Ax(100+x)}{100\times100}$$

$$= \frac{100A(100+x) - Ax(100+x)}{100\times100}$$

$$= \frac{[A(100+x)][100-x]}{100\times100} = \frac{A(100+x)(100-x)}{100\times100}$$

$$= \frac{[A(100)^2 - x^2]}{(100)^2}$$

$\therefore$ कुल परिवर्तन $= \frac{A[(100)^2 - x^2]}{[100]^2} - A = \frac{-Ax^2}{(100)^2}$

$\therefore$ प्रतिशत परिवर्तन $= \frac{Ax^2\times100}{(100)^2\times A} = \frac{-x^2}{100}\%$

इस प्रकार, आपने देखा कि कुल मिलाकर संख्या के मान में कमी आती है (क्योंकि चिह्न ऋणात्मक है) और यह कमी $\frac{x^2}{100}\%$ के रूप में व्यक्त की जा सकती है। उपर्युक्त उदाहरण में, ह्रास (प्रतिशत में) $= -\frac{10^2}{100} = 1\%$

उदा. 42: एक दुकानदार अपने सामान का दाम 12% बढ़ाकर रखता है। इसके बाद वह 12% की छूट भी देता है। कुल मिलाकर उसे हानि होती है या लाभ? इसे प्रतिशत में व्यक्त करें।

हल: ऐसी स्थिति में हमेशा हानि ही होती है और इस हानि का प्रतिशत है $\frac{(12)^2}{100} = 1.44\%$

yourmahboob

उदा. 43: यदि किसी शहर की जनसंख्या पहले वर्ष में 15% बढ़ जाती हो एवं दूसरे वर्ष में 15% घट जाती हो तो कुल मिलाकर जनसंख्या में कितना परिवर्तन आता है?

हल: जनसंख्या में कुल मिलाकर कमी आती है और यह कमी $\frac{(15)^2}{100}\% = 2.25\%$ के बराबर है।

यदि दोनों मान अलग-अलग हों

प्रमेय: यदि किसी संख्या का मान शुरू में x% बढ़ जाता हो एवं फिर इसमें y% की कमी आती हो तो उसमें कुल मिलाकर $\left[x - y - \frac{xy}{100}\right]\%$ की वृद्धि या कमी आती है। यदि वृद्धि हो तो चिह्न धनात्मक होता है अन्यथा चिह्न ऋणात्मक होता है।

प्रमाण: मान लिया कि संख्या A है।

x% वृद्धि के बाद इसका मान

$A + A$ का $x\% = A + \frac{Ax}{100} = \frac{A(x+100)}{100}$ हो जाता है।

जब इस बढ़े हुए मान में y% की कमी आ जाती है तो परिवर्तित मान

$$= \frac{A(x+100)}{100} - \frac{A(x+100)}{100} \text{ का } y\%$$

$$= \frac{A(x+100)}{100} - \frac{Ay(x+100)}{(100)^2}$$

$$= \frac{A(x+100)(100-y)}{(100)^2}$$

कुल परिवर्तन $= \frac{A(x+100)(100-y)}{(100)^2} - A$

$$= \frac{A\{(100)^2 + 100x - 100y - xy\} - (100)^2 A}{(100)^2}$$

$$= \frac{A\{100x - 100y - xy\}}{(100)^2}$$

$\therefore$ परिवर्तन (प्रतिशत में) $= \frac{A\{100x - 100y - xy\}}{(100)^2} \times \frac{100}{A}$

$$= \left[x - y - \frac{xy}{100}\right]\%$$

yoursmahboob

प्रमेय: यदि वृद्धि एवं ह्रास का क्रम बदल दिया जाए तब भी परिणाम अपरिवर्तित रहता है।

प्रमाण: स्वयं कोशिश करें।

उपर्युक्त दोनों प्रमेयों को सम्मिलित करके निम्नलिखित रूप में लिखा जा सकता है:

$$\text{कुल परिवर्तन} = \text{प्रतिशत वृद्धि} - \text{प्रतिशत ह्रास} - \frac{(\%\ \text{वृद्धि}) \times (\%\ \text{ह्रास})}{100}$$

उपर्युक्त सूत्र का प्रयोग आपकी कठिनाइयों को दूर कर देगा।

उदा. 44: एक श्रमिक के वेतन आरंभ में 10 प्रतिशत बढ़ा दिया जाता है तथा बाद में 5% कम कर दिया जाता है, तो उसके वेतन में कितने का फर्क आया?

हल: मान लिया कि श्रमिक का वेतन 100 रु. था।

वेतन में 10% वृद्धि के बाद बढ़ा हुआ वेतन = 100 + 100 का 10% = 110 रु.

वेतन में कमी के बाद घटा हुआ वेतन = 110 − 110 का 5% = 104.5 रु.

प्रतिशत वृद्धि = 104.5 − 100 = 4.5%

द्रुत विधि (Quicker Method):

उपर्युक्त प्रमेय के अनुसार,

यदि किसी राशि को पहले x% बढ़ा दिया जाए हो तथा फिर उसमें y% की कमी आ जाती हो तो कुल मिलाकर उसमें $\left(x - y - \frac{xy}{100}\right)\%$ की वृद्धि या ह्रास होता है और यह परिवर्तन क्रमशः धनात्मक या ऋणात्मक चिह्न से अभिव्यक्त होता है।

$$\text{उपर्युक्त प्रश्न में कुल परिवर्तन} = 10 - 5 - \frac{10 \times 5}{100} = 4.5\%$$

∴ चिह्न धनात्मक (+) है, इसलिए 4.5% की वृद्धि हुई।

उदा. 45: एक दुकानदार अपने वस्तुओं की कीमत मूल कीमत से 20% बढ़ा कर लिखता है। इसके बाद वह हर खरीददार को 10% की छूट देता है। उसे कितना प्रतिशत लाभ या हानि हुआ?

हल: **प्रमेय से:**

$$20 - 10 - \frac{20 \times 10}{100} = 8\%$$

∴ चिह्न धनात्मक (+) है, इसलिए उसे 8% का मुनाफा हुआ।

उदा. 46: यदि किसी श्रमिक का वेतन पहले 20 प्रतिशत घटा दिया जाए हो तथा फिर 10 प्रतिशत बढ़ा दिया जाता हो तो वेतन पर कितना प्रतिशत प्रभाव पड़ा?

हल: **द्रुत विधि से:**

$$\%\ \text{प्रभाव} = \%\ \text{वृद्धि} - \%\ \text{कमी} - \frac{(\%\ \text{वृद्धि}) \times (\%\ \text{कमी})}{100}$$

$$= 10 - 20 - \frac{10 \times 20}{100} = -12\%$$

इस प्रकार उसके वेतन में 12% की कमी आई क्योंकि चिह्न ऋणात्मक है।

yoursmartboob

नोट: वृद्धि एवं ह्रास के क्रम में परिवर्तन का मतलब है कि उपर्युक्त उदाहरण में, सर्वप्रथम 10% बढ़ाया जाता है और फिर 20% घटाया जाता है। दोनों ही स्थितियों में समान परिणाम प्राप्त होता है।

उदा. 47: 1988 में किसी शहर की जनसंख्या 12% कम हो गई। 1989 में इसमें 15% की वृद्धि हुई। 1990 के अंत में शहर की जनसंख्या पर कुल मिलाकर कितना प्रभाव पड़ा था।

हल: $\% \text{ प्रभाव} = \% \text{ वृद्धि} - \% \text{ ह्रास} - \frac{(\% \text{ वृद्धि})(\% \text{ ह्रास})}{100}$

$$= 15 - 12 - \frac{15 \times 12}{100} = 15 - 13.8 = 1.2$$

$\therefore$ जनसंख्या में 1.2% की वृद्धि हुई।

क्रमागत वृद्धि या ह्रास (Successive Increase or Decrease)

प्रमेय: यदि किसी संख्या का मान पहले x% एवं फिर y% बढ़ा दिया जाता हो तो कुल मिलाकर $\left(x + y + \frac{xy}{100}\right)\%$ की वृद्धि होती है।

प्रमाण: पिछले सूत्र में यदि y की जगह (−y) रख दिया जाए तो हमें अभीष्ट परिणाम मिल जाता है। ऐसा इसलिए कि हम ऐसा कह सकते हैं कि

वृद्धि = − ह्रास

उदा. 48: एक दुकानदार अपनी वस्तुओं की कीमत वास्तविक मूल्य से 15% बढ़ा कर रखता है। मंदी के वृद्धि के कारण वह एक बार फिर मूल्य में 10 प्रतिशत की वृद्धि करता है। उसे कितना प्रतिशत मुनाफा होगा?

हल: उपर्युक्त प्रमेय के अनुसार

$$\% \text{ मुनाफा} = 15 + 10 + \frac{15 \times 10}{100} = 26.5\%$$

उदा. 49: किसी शहर की जनसंख्या लगातार दो वर्षों तक घटती रही। पहले वर्ष में इसमें 10% की कमी आई एवं दूसरे वर्ष में 20% की। दो वर्षों बाद जनसंख्या में कुल कितने प्रतिशत की कमी आई?

हल: x = −10 एवं y = −20 रखने पर

$$10 - 20 - \frac{(-10)(20)}{100} = -28\%$$

$\therefore$ जनसंख्या में 28% की कमी आई।

राजस्व पर प्रभाव

प्रमेय: (i) यदि किसी वस्तु की कीमत x% घटा दी जाए एवं उसकी खपत में y% की वृद्धि हो, या

yourmahboob

(ii) यदि वस्तु की कीमत x% बढ़ा दी जाए एवं उसकी खपत में y% की कमी हो तो राजस्व पर प्रभाव

$$-\text{मान में \% वृद्धि} + \text{मान में \% हानि} - \frac{\text{प्रतिशत वृद्धि} \times \text{प्रतिशत हानि}}{100}$$

एवं मान में ऋण एवं धन चिह्न के अनुरूप क्रमशः ह्रास एवं वृद्धि होती है।

नोट: उपर्युक्त सूत्र स्थिति (i) एवं (ii) के लिए एक सामान्य सूत्र है। अलग-अलग इसके निम्नलिखित रूप हैं:

स्थिति (i) के लिए:

$$y - x - \frac{yx}{100}$$

स्थिति (ii) के लिए:

$$x - y - \frac{xy}{100}$$

इस प्रकार, यह स्पष्ट है कि दोनों ही स्थितियों के लिए समान रूप से उपयोगी सामान्य सूत्र को स्मरण रखना कहीं अधिक आसान है।

प्रमाण: स्थिति (i) के संदर्भ में:

मान लिया कि वस्तु का मूल्य A रुपए इकाई है तथा उसकी खपत B इकाई है

कुल राजस्व व्यय = AB रु.

नया मूल्य = A − A का x%

$$= A - \frac{Ax}{100} = \frac{A(100-x)}{100}$$

एवं नई खपत = B + B का y% = $B + \frac{By}{100} = \frac{B(100+y)}{100}$

$\therefore$ नया राजस्व व्यय $= \frac{A(100-x)}{100} \times \frac{B(100+y)}{100}$

$$= \frac{AB(100-x)(100+y)}{100 \times 100}$$

$\therefore$ राजस्व व्यय में परिवर्तन $= \frac{AB(100-x)(100+y)}{100 \times 100} - AB$

$$= \frac{AB(100^2 + 100y - 100x - xy) - 100^2 AB}{100^2}$$

$$= \frac{AB(100y - 100x - xy)}{100^2}$$

yoursmahboob

$\therefore$ राजस्व पर पड़ने वाला प्रतिशत प्रभाव $= \dfrac{AB\{100y - 100x - xy\}}{100^2} \times \dfrac{100}{AB}$

$$= y - x - \frac{xy}{100}$$

इसी तरह स्थिति (ii) के लिए भी सूत्र को प्रमाणित किया जा सकता है।

उदा. 50: किसी वस्तु पर लगाए जाने वाले कर में 20% की कमी की जाती है एवं इसकी खपत में 15% की वृद्धि होती है। राजस्व पर कितना प्रभाव पड़ता है?

हल: नया राजस्व = खपत × कर

= (वास्तविक राजस्व का) (115% × 80%)

= वास्तविक राजस्व का $\left(\dfrac{115}{100} \times \dfrac{80}{100}\right)\%$

= वास्तविक राजस्व का $\left(\dfrac{115}{100} \times 80\right)\%$

= वास्तविक राजस्व का 92%

$\therefore$ राजस्व में (100 − 92 =) 8% की कमी आती है।

प्रमेय से: राजस्व पर प्रभाव

= मान में % वृद्धि − मान में % ह्रास − $\dfrac{\text{मान में \% वृद्धि} \times \text{मान में \% ह्रास}}{100}$

$= 15 - 20 - \dfrac{15 \times 20}{100} = -8\%$

इसलिए 8% की कमी होती है।

उदा. 51: यदि मूल्य 10% बढ़ा दिया जाए तथा बिक्री 5% कम हो जाए तो आय पर क्या प्रभाव पड़ेगा?

हल: मान लिया कि प्रति वस्तु कीमत 100 रु. है तथा 100 वस्तुओं की ही बिक्री भी होती है।

$\therefore$ 100 वस्तुओं को बेचने के बाद प्राप्त राशि = 100 × 100 = 10000 रु.

बढ़ा हुआ मूल्य 110 रु. प्रति वस्तु है तथा घटी हुई बिक्री 95 वस्तुओं की है।

$\therefore$ कुल 95 वस्तुओं की बिक्री से प्राप्त राशि = 110 × 95 = 10450 रु.

$\therefore$ मुनाफा = 10450 − 10000 = 450 रु.

$\therefore$ % मुनाफा $= \dfrac{450 \times 100}{10000} = 4.5\%$

प्रमेय से:

% प्रभाव = % वृद्धि − % ह्रास $= \dfrac{(\text{\% वृद्धि}) \times (\text{\% ह्रास})}{100} = 10 - 5 - \dfrac{10 \times 5}{100} = 4.5\%$

$\therefore$ उसके आय में 4.5% की वृद्धि होती है

youreshahboob

उदा. 52: यदि मूल्य में 12% की कमी आती हो तथा बिक्री में 10 प्रतिशत की वृद्धि होती हो तो आय पर पर क्या प्रभाव पड़ेगा?

हल: **प्रमेय से:**

$$\% \text{ प्रभाव} = 10 - 12 - \frac{12 \times 10}{100} = -3.2\%$$

$\therefore$ आय में 3.2% की कमी आती है।

उदा. 53: यदि किसी व्यक्ति के पास जमीन के स्वामित्व (landholding) में 10% की कमी आती हो तथा मॉनसून में विलम्ब की वजह से उत्पादन में 8% की कमी आती हो तो राजस्व पर कुल कितना प्रभाव पड़ेगा?

हल: किसी भी प्रकार के ह्रास को वृद्धि में बदल लें। मान लीजिए कि

10% ह्रास = –10% वृद्धि

उपर्युक्त सूत्र में इन मानों को रखने पर,

$$\% \text{ प्रभाव} = -10 - 8 - \frac{(-10) \times 8}{100}$$

$$= -18 + 0.8 = -17.2\%$$

$\therefore$ राजस्व में 17.2% की कमी आती है।

अब मान लीजिए कि हमलोग 8% ह्रास को 8% वृद्धि में बदल देते हैं, तब

8% ह्रास = –8% वृद्धि

उपर्युक्त सूत्र में इस मान को रखने पर,

$$\text{राजस्व पर प्रभाव (प्रतिशत में)} = -8 - 10 - \frac{(-8)(10)}{100}$$

$$= -18 + 0.8 = -17.2\%$$

इस प्रकार हमें दोनों ही स्थितियों में समान परिणाम की प्राप्ति होती है। इसलिए, इस बात का विशेष महत्व नहीं है कि कौन-सा मान अपना रूप बदल देता है।

उदा. 54: किसी सिनेमा हॉल में सीटों की संख्या 25% बढ़ा दी जाती है। टिकट का मूल्य भी 10% बढ़ा दिया जाता है। संगृहीत राजस्व पर क्या प्रभाव पड़ता है?

हल: चूँकि यहाँ सीटों की संख्या एवं मूल्य दोनों में वृद्धि होती है। इसलिए हम निम्नलिखित सूत्र का उपयोग करते हैं:

ह्रास = वृद्धि

अब, सूत्र के प्रयोग से:

$$\% \text{ प्रभाव} = 25 - (-10) - \frac{25 \times (-10)}{100}$$

$$= 35 + 2.5 = 37.5$$

$\therefore$ राजस्व में कुल 37.5% की वृद्धि होती है।

yourmahboob

इस उदाहरण में भी किसी भी वृद्धि को ह्रास में बदलकर प्रश्न हल किया जा सकता है। दूसरे मान को बदलकर आप स्वयं हल करके देखें।

नोट: हम जानते हैं कि सर्वाधिक महत्वपूर्ण सूत्र $x+y+\frac{xy}{100}$ है। अन्य सभी रूप केवल चिह्नों को बदलकर ही प्राप्त किया जा सकता है।

i) x% वृद्धि एवं y% वृद्धि

$$=\left[x+y+\frac{xy}{100}\right]\% \text{ वृद्धि या ह्रास (चिह्न के अनुरूप)}$$

ii) x% वृद्धि एवं y% ह्रास [y = – y रखें]

$$=\left[x-y-\frac{xy}{100}\right]\% \text{ वृद्धि या ह्रास (चिह्न के अनुरूप)}$$

iii) x% ह्रास एवं y% वृद्धि [x = –x रखें]

$$=\left[-x+y-\frac{xy}{100}\right]\% \text{ वृद्धि या ह्रास (चिह्न के अनुरूप)}$$

iv) x% ह्रास एवं y% ह्रास [x = –x एवं y = –y रखें]

$$=\left[-x-y+\frac{xy}{100}\right]\% \text{ वृद्धि या ह्रास (चिह्न के अनुरूप)}$$

प्रमेय: किसी परीक्षा में सफल होने के लिए x% अंकों की जरूरत होती है। यदि कोई परीक्षार्थी y अंक प्राप्त करने के बावजूद z अंकों से असफल हो जाता हो तो अधिकतम अंक $M=\frac{100(y+z)}{x}$

प्रमाण: इस प्रमेय को सिद्ध करना बड़ा आसान है। मान लिया कि अधिकतम अंक (पूर्णांक) M है। प्रश्नानुसार,

M का x% = y + z

$$\therefore M=\frac{y+z}{x\%}=\frac{100(y+z)}{x}$$

नोट: यदि आपने संबंधों को भली-भाँति समझ लिया है तो सूत्र को याद करने की कोई आवश्यकता नहीं है। परंतु कुछ छात्र परीक्षा-भवन में संबंधों को लेकर भ्रम में पड़ जाते हैं। इसीलिए यहाँ सूत्र दे दिया गया है।

उदा. 55: किसी विद्यार्थी को सफल होने के लिए 40% अंक चाहिए। यदि उसे 40 अंक प्राप्त होते हैं, तो वह 40 अंकों से असफल हो जाता है तो पूर्णांक क्या है?

हल: उपर्युक्त प्रमेय के अनुसार;

$$\text{पूर्णांक}=\frac{100(40+40)}{40}=200$$

yourmahboob

उदा. 56: किसी परीक्षा में सफल होने के लिए परीक्षार्थी को 80% अंक चाहिए। यदि उसे 210 अंक प्राप्त होते हैं और वह 50 अंकों से असफल हो जाता है तो पूर्णांक बताएँ।

हल: उपर्युक्त प्रमेय से:

$$\text{पूर्णांक} = \frac{100\times(210+50)}{80} = 325 \text{ अंक}$$

प्रमेय: किसी परीक्षार्थी को परीक्षा में x% अंक प्राप्त होते हैं। इसके बावजूद वह 'a' अंकों से असफल हो जाता है। दूसरे परीक्षार्थी को y% अंक प्राप्त होते हैं जो उत्तीर्णांक से 'b' अंक अधिक है। ऐसी स्थिति में पूर्णांक $M = \frac{100(a+b)}{y-x}$

प्रमाण: मान लिया कि पूर्णांक = M

∴ पहले परीक्षार्थी द्वारा प्राप्त अंक = M का x%

एवं दूसरे परीक्षार्थी द्वारा प्राप्त अंक = M का y%

दोनों परीक्षार्थियों के लिए उत्तीर्णांक (pass marks) समान है।

M का x% + a = M का y% − b

या, $\frac{Mx}{100}\times a = \frac{My}{100} - b$

या, $\frac{M(y-x)}{100} = a+b$

∴ $M = \frac{100(a+b)}{y-x}$

उदा. 57: एक परीक्षार्थी परीक्षा में 25% अंक प्राप्त करता है तथा 30 अंकों से असफल हो जाता है। दूसरा परीक्षार्थी 50% अंक प्राप्त करता है जो कि उत्तीर्णांक (pass marks) से 20 अंक अधिक है। पूर्णांक क्या है?

हल: प्रमेय के अनुसार,

$$\text{पूर्णांक} = \frac{100(30+20)}{50-25} = 200$$

नोट: i) उपर्युक्त सूत्र को निम्नलिखित रूप में भी लिख सकते हैं:

$$\text{पूर्णांक} = \frac{100(\text{प्राप्तांकों का अंतर})}{\text{प्राप्तांकों के प्रतिशत का अंतर}}$$

ii) प्राप्तांकों का अंतर = 30 + 20

चूँकि पहले परीक्षार्थी को उत्तीर्णांक से 30 अंक कम प्राप्त होते हैं; जबकि दूसरे परीक्षार्थी को उत्तीर्णांक से 20 अंक अधिक प्राप्त होते हैं।

yoursmartboob

उदा. 58: एक परीक्षार्थी को परीक्षा में 30% अंक प्राप्त होते हैं और वह 50 अंकों से असफल हो जाता है। दूसरा परीक्षार्थी, जिसे 320 अंक प्राप्त होते हैं, वह भी 30 अंकों से असफल हो जाता है। पूर्णांक बताएँ।

हल: यहाँ उपर्युक्त सूत्र का सीधा इस्तेमाल मुश्किल है (क्यों?) इसलिए हम इस तथ्य का इस्तेमाल करेंगे कि दोनों परीक्षार्थियों के लिए पूर्णांक बराबर है।

यदि पूर्णांक x हो, तो पहले परीक्षार्थी के लिए उत्तीर्णांक = x का 30% + 50, तथा

दूसरे परीक्षार्थी के लिए उत्तीर्णांक = 320 + 30

$\therefore$ x का 30% + 50 = 320 + 30

या, $\frac{3x}{10} = 300$

$\therefore \quad x = \frac{300 \times 10}{3} = 1000$

उपर्युक्त विधि को ध्यान से समझ लें, क्योंकि प्रश्न के स्वरूप में परिवर्तन होने पर भी यह विधि काम करती है।

प्रमेय: किसी आयत के मापने के क्रम में एक भुजा को गलती से x% अधिक माप लिया जाता है एवं दूसरे को y% कम माप लिया जाता है। इस माप से गणना किए जाने पर क्षेत्रफल के माप में प्रतिशत त्रुटि = $x - y - \frac{xy}{100}$। यह त्रुटि वृद्धि के रूप में भी हो सकती है एवं ह्रास के रूप में भी। यदि वृद्धि होगी तो प्राप्त राशि का चिह्न धनात्मक होगा अन्यथा चिह्न ऋणात्मक होगा।

प्रमाण: मान लिया कि आयत की भुजाएँ a एवं b हैं।

$\therefore$ क्षेत्रफल = ab

माप में त्रुटि से भुजाएँ:

(a + a का x%) तथा (b − b का y%)

या, $\frac{a(100+x)}{100}$ तथा $\frac{b(100-y)}{100}$

$\therefore$ नया क्षेत्रफल = $\frac{ab(100+x)(100-y)}{100^2}$

त्रुटि = $\frac{ab(100+x)(100-y)}{(100)^2} - ab$

$= \frac{ab(100x - 100y - xy)}{(100)^2}$

%त्रुटि = $\frac{ab(100x - 100y - xy)}{(100)^2} \times \frac{100}{ab} = x - y - \frac{xy}{100}$

yoursmahboob

$\therefore$ % त्रुटि (error) = % अधिक (excess) - % कम (deficit) = $\frac{\%\ \text{अधिक} \times \%\ \text{कम}}{100}$

उदा. 59: किसी आयत की भुजाओं को मापने के क्रम में एक भुजा यदि 5% अधिक माप लिया जाता है तथा दूसरा 4% कम माप लिया जाता है तो इस माप से क्षेत्रफल में होने वाले प्रतिशत त्रुटि की गणना करें।

हल: उपर्युक्त प्रमेय से:

$$\%\ \text{त्रुटि} = 5 - 4 - \frac{5 \times 4}{100}$$

$$= 1 - \frac{1}{5}$$

$$= \frac{4}{5}\%\ \text{अधिक}\ (\because \text{चिह्न धनात्मक है})$$

उदा. 60: यदि आयत की दोनों भुजाएँ क्रमशः 20% एवं 5% बढ़ा दी जाएँ, तो आयत के क्षेत्रफल में कितने प्रतिशत का परिवर्तन होता है?

हल: उपर्युक्त प्रमेय इस सवाल के लिए भी उतना ही उपयोगी है। सवाल में दी गई सूचनाओं में केवल एक परिवर्तन अपेक्षित है। वृद्धि को ह्रास में बदल कर इस्तेमाल करें।

5% वृद्धि = –5% ह्रास

$$\therefore\ \%\ \text{प्रभाव} = 20 - (-5) - \frac{20 \times (-5)}{100} = 20 - 5 + 1 = 26\%$$

$\therefore$ चिह्न धनात्मक है, इसलिए क्षेत्रफल में 26% की वृद्धि हुई।

नोट: हमलोग दूसरी सूचना का भी उपयोग कर सकते हैं

20% वृद्धि – – 20% ह्रास

अब आप स्वयं हल करने का प्रयत्न करें!

उदा. 61: यदि किसी वर्ग की भुजा 30% बढ़ा दी जाए तो उसके क्षेत्रफल में कितने प्रतिशत की वृद्धि होगी?

हल: पिछले उदाहरण में प्रयुक्त विधि का इस्तेमाल करने पर,

$$\text{क्षेत्रफल में प्रतिशत वृद्धि} = 30 - (-30) - \frac{30 \times (-30)}{100}$$

$$= 60 + 9 = 69\%$$

प्रमेय: यदि किसी त्रिभुज, आयत, वर्ग, वृत्त, समचतुर्भुज (या किसी भी द्विविमीय ज्यामितीय आकृति) की भुजाओं में $x\%$ की वृद्धि होती है तो उसके क्षेत्रफल में $\frac{x(x+200)}{100}\%$ या $\left(2x + \frac{x^2}{100}\right)\%$ की वृद्धि होती है।

yoursmahboob

प्रमाण: पहले किसी त्रिभुज का उदाहरण लें।

मान लिया कि त्रिभुज की तीनों भुजाएँ क्रमशः a, b एवं c हैं।

$\therefore$ त्रिभुज का क्षेत्रफल $A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

जहाँ $s = \dfrac{a+b+c}{2}$

जब तीनों भुजाएँ x% बढ़ा दी जाती हैं तो भुजाएँ क्रमशः

$\dfrac{a(100+x)}{100}$, $\dfrac{b(100+x)}{100}$ एवं $\dfrac{c(100+x)}{100}$ हो जाएँगी।

अब, $s_1 = \dfrac{(100+x)}{100}\left[\dfrac{a+b+c}{2}\right] = \dfrac{(100+x)}{100}s$

$\therefore$ नया क्षेत्रफल A_1

$$= \sqrt{s_1\left(s_1 - \frac{a(100+x)}{100}\right)\left(s_1 - \frac{b(100+x)}{100}\right)\left(s_1 - \frac{c(100+x)}{100}\right)}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{100+x}{100}\right)^4 s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$\therefore \quad A_1 = \left(\frac{100+x}{100}\right)^2 A$$

क्षेत्रफल में % वृद्धि $= \dfrac{A_1 - A}{A} \times 100 = \dfrac{\left[\left(\dfrac{100+x}{100}\right)^2 - 1\right]A}{A} \times 100$

$$= \left[\left(\frac{100-x}{100}\right)^2 - 1\right] \times 100 = \left[\left(1+\frac{x}{100}\right)^2 - 1\right] \times 100$$

$$= \left[1 + \frac{x^2}{(100)^2} + \frac{2x}{100} - 1\right]100 = \frac{x(x-200)}{100} = 2x + \frac{x^2}{100}$$

इस प्रकार यह कहा जा सकता है कि यदि किसी त्रिभुज की तीनों भुजाएँ x% बढ़ा दी जाएँ तो इसके क्षेत्रफल में $\dfrac{x(x+200)}{100}$% या $\left(2x + \dfrac{x^2}{100}\right)$% की वृद्धि होती है।

yoursmahboob

आयत के लिए (For Rectangle)

मान लिया कि आयत की भुजाएँ a एवं b हैं।

$\therefore$ क्षेत्रफल $A = ab$

मान लिया कि इसकी भुजाएँ x% बढ़कर

$\frac{a(100+x)}{100}$ एवं $\frac{b(100+x)}{100}$ हो जाती हैं।

$\therefore$ नया क्षेत्रफल $A_1 = ab\left(\frac{100+x}{100}\right)^2 = \left(\frac{100+x}{100}\right)^2 A$

$\therefore$ क्षेत्रफल में प्रतिशत वृद्धि $= \frac{A_1 - A}{A} \times 100$

$$= \frac{\left[\left(\frac{100+x}{100}\right)^2 - 1\right]A}{A} \times 100$$

$$= \left[\left(\frac{100+x}{100}\right)^2 - 1\right] \times 100 = \frac{x(x+200)}{100}$$

$$2x + \frac{x^2}{100}$$

इस प्रकार यह कहा जा सकता है कि यदि किसी आयत की भुजाओं में x% की वृद्धि होती हो तो उसका क्षेत्रफल $\frac{x(x+200)}{100}\%$ या $\left(2x + \frac{x^2}{100}\right)\%$ बढ़ जाता है। यह वृद्धि त्रिभुज के क्षेत्रफल में होने वाली वृद्धि के बराबर है।

नोट: अब वर्ग एवं समचतुर्भुज के लिए अलग से गणना करने की कोई जरूरत नहीं है। इससे भी वही परिणाम मिलेगा।

आइए वृत्त के संदर्भ में विचार करें

मान लिया कि किसी वृत्त की त्रिज्या r मीटर है।

$\therefore$ इसका क्षेत्रफल $A = \pi r^2$

त्रिज्या में x% की वृद्धि होने पर त्रिज्या $= \frac{r(100+x)}{100}$

$\therefore$ नया क्षेत्रफल $A_1 = \pi\left[\frac{r(100+x)}{100}\right]^2$

yoursmahboob

$$= \pi r^2\left[\frac{(100+x)}{100}\right]^2 = \left[\frac{100+x}{100}\right]^2 A$$

$\therefore$ क्षेत्रफल में प्रतिशत वृद्धि $= \frac{A_1 - A}{A} \times 100$

$$= \left[\left(\frac{100+x}{100}\right)^2 - 1\right]100 = \frac{x(x+200)}{100} = 2x + \frac{x^2}{100}$$

इस प्रकार, यह पता चलता है कि उपर्युक्त सूत्र वृत्त पर भी लागू होता है।

निष्कर्ष: अतः निष्कर्ष यह कहा जा सकता है कि उपर्युक्त सूत्र सभी प्रकार की द्विविमीय आकृतियों पर लागू होता है।

एक उदाहरण लीजिए। यदि किसी आयत की भुजाएँ 10 प्रतिशत बढ़ा दी जाएँ तो क्षेत्रफल में कितने प्रतिशत की वृद्धि होगी?

हल: अभीष्ट उत्तर $= 2\times10 + \frac{(10)^2}{100} = 20 + 1 = 21\%$

नोट: 1. यदि भुजाएँ 10% घटा दी जाएँ तो क्षेत्रफल पर क्या प्रभाव पड़ेगा? (स्वयं प्रयास करें।)

2. यदि किसी त्रिविमीय वस्तु की भुजाएँ x% बढ़ा दी जाएँ तो उसके आयतन में कितनी वृद्धि होगी? (स्वयं प्रयास करें।)

प्रमेय: किसी परीक्षा में x% छात्र अंग्रेजी में असफल हो जाते हैं एवं y% गणित में असफल हो जाते हैं। यदि z% छात्र दोनों विषयों में असफल होते हों तो दोनों विषयों में उत्तीर्ण होने वाले छात्रों का प्रतिशत $= 100 - (x + y - z)$

प्रमाण: केवल अंग्रेजी में असफल होने वाले छात्रों का प्रतिशत $= (x - z)\%$

केवल गणित में असफल होने वाले छात्रों का प्रतिशत $= (y - z)\%$

दोनों विषयों में असफल होने वाले छात्रों का प्रतिशत $= z\%$ (दिया हुआ है)

$\therefore$ दोनों विषयों में उत्तीर्ण होनेवाले छात्रों का प्रतिशत $= 100 - [(x - z) + (y - z) + z]$

$= 100 - (x + y - z)$

उदा. 62: किसी परीक्षा में 40% छात्र गणित में असफल हो जाते हैं, 30% अंग्रेजी में असफल हो जाते हैं तथा 10% दोनों में असफल हो जाते हैं। दोनों विषयों में उत्तीर्ण होने वाले छात्रों का प्रतिशत बताएँ।

हल: उपर्युक्त प्रमेय के अनुसार,

अभीष्ट $\% = 100 - (40 + 30 - 10) = 40\%$

नोट: हमलोगों को इस बात की जानकारी होनी चाहिए कि निम्नलिखित समुच्चय पद्धति को पूर्ण करता है।

100% − केवल अंग्रेजी में असफल होने वाले छात्रों का प्रतिशत

+ केवल गणित में असफल होने वाले छात्रों का प्रतिशत

− दोनों विषयों में असफल होने वाले छात्रों का प्रतिशत

− दोनों विषयों में सफल होने वाले छात्रों का प्रतिशत

yourshahboob

उदा. 63: एक व्यक्ति अपनी आय का 75% खर्च करता है। उसकी आय में 20% की वृद्धि होती है तथा साथ ही उसके खर्च में भी 10% की वृद्धि होती है। उसके बचत में प्रतिशत वृद्धि ज्ञात करें।

हल : ***विस्तार विधि* (Detail Method) :**

माना कि उसकी मासिक आय = 100 रु

इस प्रकार, वह 75 रु. खर्च करता है एवं 25 रु. बचाता है।

उसकी बढ़ी हुई आय = 100 + 100 का 20% = 120 रु.

उसका बढ़ा हुआ खर्च = 75 + 75 का 10% = 82.50 रु.

∴ उसकी नयी बचत = 120 − 82.50 = 37.50 रु.

∴ उसकी बचत में प्रतिशत वृद्धि = $\frac{37.50-25}{25}\times 100 = 50\%$

***द्रुत विधि* (Quicker Method) :**

बचत में प्रतिशत वृद्धि = $\frac{20\times 100-10\times 75}{100-75} = \frac{1250}{25} = 50\%$

उदा. 64: नमक एवं पानी के एक घोल में नमक का भार 15% है. इसका 30 कि. ग्रा. पानी वाष्पीकृत हो जाता है एवं अब घोल में 20% नमक है. नमक की मूल मात्रा ज्ञात करें।

हल: माना कि प्रारंभ में x कि. ग्रा. घोल था।

नमक की मात्रा = x का 15% = $\frac{15x}{100} = \frac{3x}{20}$ कि. ग्रा

अब, वाष्पीकरण के बाद केवल (x - 30) कि. ग्रा. मिश्रण में $\frac{3x}{20}$ कि. ग्रा. नमक है।

या, (x − 30) का 20% = $\frac{3x}{20}$;

या, $\frac{x-30}{5} = \frac{3x}{20}$ या, 15x = 20x − 600

∴ $x = \frac{600}{5} = 120$ कि. ग्रा.

***द्रुत विधि* (Quicker Method) :**

घोल की मूल मात्रा = वाष्पीकृत पानी की मात्रा $\left(\frac{\text{नमक की अंतिम प्रतिशत मात्रा}}{\text{नमक की प्रतिशत मात्रा में अंतर}}\right)$

$= 30\left(\frac{20}{20-15}\right) = 120$ कि. ग्रा.

yoursyalboob

उदा. 65: एक पुस्तकालय में 20% किताबें हिंदी में हैं, बचे हुए का 50% अंग्रेजी में हैं तथा बचे हुए का 30% फ्रेंच में हैं। शेष 6300 किताबें क्षेत्रीय भाषाओं में हैं। पुस्तकालय में किताबों की कुल कितनी संख्या है?

हल : मान लिया कि पुस्तकालय में कुल x किताबें हैं।

तो, हिंदी में किताबों की संख्या = x का 20% = $\frac{x}{5}$

बचे हुए का 50% = $\left(x-\frac{x}{5}\right)$ का 50% = $\frac{4x}{5}$ का 50% = $\frac{2x}{5}$ अंग्रेजी में हैं

अब, बचे हुए का 30%,

अर्थात् $\left\{x-\left(\frac{x}{5}+\frac{2x}{5}\right)\right\}$ का 30% = $\frac{2x}{5}$ का 30% = $\frac{3x}{25}$ किताबें फ्रेंच में हैं।

अब, $x-\left(\frac{x}{5}+\frac{2x}{5}+\frac{3x}{25}\right) = 6300$

या, $\frac{7x}{25} = 6300$

$\therefore\ x = \frac{6300\times 25}{7} = 22500$

द्रुत विधि (Quicker Method) :

किताबों की कुल संख्या = $6300\left(\frac{100}{100-20}\right)\left(\frac{100}{100-50}\right)\left(\frac{100}{100-30}\right)$

$= \frac{6300\times 100\times 100\times 100}{80\times 50\times 70} = 22500$

उदा. 66: दूध और पानी के 40 लिटर मिश्रण में 10% पानी है। नए मिश्रण में पानी की मात्रा को 20% करने के लिए कितना पानी मिलाना पड़ेगा?

हल: पानी की मात्रा = 40% का 10% = 4 लिटर

अब, मान लिया कि x लिटर पानी मिलाया जाता है।

तो, $4 + x = (40+x)$ का 20%

या, $4 + x = \frac{40+x}{5}$

या, $20 + 5x = 40 + x$

$\therefore\ x = \frac{20}{4} = 5$ लिटर

yoursmahboob

द्रुत विधि (Quicker Method) :

मिलाया गया पानी की मात्रा = $\frac{40(20-10)}{(100-20)}$ = 5 लिटर

उदा. 67: एक उत्पादक एक वस्तु पर 25% मुनाफा कमाता है, एक थोक विक्रेता 20% मुनाफा कमाता है एवं खुदरा विक्रेता 28% मुनाफा कमाता है। यदि खुदरा विक्रेता इसे 48 रु. में बेचता है तो उस वस्तु का उत्पादन मूल्य ज्ञात करें.

हल: चित्र के नियम से,

उत्पादन मूल्य = $48\left(\frac{100}{100+28}\right)\left(\frac{100}{100+20}\right)\left(\frac{100}{100+25}\right)$

$= 48\left(\frac{100}{128}\right)\left(\frac{100}{120}\right)\left(\frac{100}{125}\right) = 25$ रु.

उदा. 68: 9 लिटर की 50% अम्लीय द्रव को 30% अम्लीय द्रव बनाने हेतु पानी की कितनी मात्रा मिलानी चाहिए?

हल : ***विस्तार विधि* (Detail Method) :**

9 लिटर में अम्ल की मात्रा = 9 का 50% = 4.5 लिटर

माना कि x लिटर पानी मिलाया जाता है।

अब, (9 + x) लिटर तनु द्रव (diluted liquid) में 4.5 लिटर अम्ल है

प्रश्नानुसार,

(9 + x) का 30% = 4.5

या, $\frac{3}{10}(9+x) = 4.5$ या, $27 + 3x = 45$

या, $3x = 18$

$\therefore x = \frac{18}{3} = 6$ लिटर

द्रुत विधि (Quicker Method) :

मिलाए जाने वाले पानी की मात्रा = $\frac{9(50-30)}{30}$ = 6 लिटर

उदा. 69: किसी परीक्षा में विद्यालय 'A' से सफल विद्यार्थियों का प्रतिशत, परीक्षा में बैठने वाले कुल विद्यार्थियों का 70% है। विद्यालय 'B' से परीक्षा में बैठने वाले विद्यार्थियों की संख्या विद्यालय 'A' से परीक्षा में बैठने वाले विद्यार्थियों की संख्या से 20% अधिक है; एवं विद्यालय 'B' से कुल सफल विद्यार्थियों की संख्या, विद्यालय 'A' से कुल सफल विद्यार्थियों की संख्या से 50% अधिक है; विद्यालय 'B' से परीक्षा में सफल विद्यार्थियों का प्रतिशत परीक्षा में बैठने वाले कुल विद्यार्थियों का कितना है?

1) 30% 2) 70% 3) 87.5% 4) 78.5% 5) इनमें से कोई नहीं

yoursmahboob

हल : **विस्तार विधि (Detail Method) :**

माना कि विद्यालय 'A' से 100 विद्यार्थी परीक्षा में बैठते हैं

तो, प्रश्नानुसार,

विद्यालय	परीक्षा में बैठने वालों की संख्या	सफल होने वालों की संख्या
A →	100	70
B →	120	70 + 70 का 50% = 105

$\therefore$ अभीष्ट प्रतिशत $= \frac{105}{120} \times 100 = 87.5\%$

द्रुत विधि (Quicker Method) :

$$\text{अभीष्ट } \% = \frac{70 \times (100 + 50)\%}{100 \times (100 + 20)\%} \times 100$$

$$= \frac{70 \times 150}{100 \times 120} \times 100$$

$$= 87.5\%$$

उदा. 70: बालू एवं लोहे के 1 कि. ग्रा. मिश्रण में 20% लोहा है। लोहे की मात्रा को 10% करने के लिए मिश्रण में कितनी मात्रा में बालू मिलाना होगा?

1) 1 कि. ग्रा. 2) 200 ग्रा. 3) 800 ग्रा. 4) 1.8 कि. ग्रा.

5) इनमें से कोई नहीं

हल: 1 कि. ग्रा. मिश्रण में लोहा = 1000 ग्रा. का 20% = 200 ग्रा.

एवं बालू = 800 ग्रा.

माना कि x ग्रा. बालू मिश्रण में मिलाया जाता है।

तो, कुल मिश्रण = (1000 + x) ग्रा.

अब, लोहे का प्रतिशत $= \frac{200}{(1000+x)} \times 100 = 10$ (दिया हुआ है)

या, $1000 + x = 2000$

$\therefore$ $x = 1000$ ग्रा. = 1 कि. ग्रा.

द्रुत विधि (Quicker Method):

A एवं B के एक मिश्रण में, जब वस्तु B की खास मात्रा वस्तु A की प्रतिशत मात्रा को परिवर्तित करने के लिए मिलाया जाता है तो मिलाए जाने वाली वस्तु B की मात्रा

$$= \left[\frac{\text{A का पहले का प्रतिशत मान}}{\text{A का परिवर्तित प्रतिशत मान}} \times \text{मिश्रण की मात्रा}\right] - \text{मिश्रण की मात्रा}$$

yoursmahboob

∴ उपर्युक्त प्रश्न में, मिलाए जाने वाले बालू की

अभीष्ट मात्रा = $\frac{20}{10} \times 1 - 1 - 2 - 1 = 1$ कि. ग्रा.

उदा. 71: दो पिंड राम एवं श्याम के भारों का अनुपात 4 : 5 है। राम का भार 10% बढ़ जाता है तथा राम एवं श्याम का कुल भार 82.8 कि. ग्रा. हो जाता है और इस प्रकार राम एवं श्याम के कुल भार में 15% की वृद्धि होती है। श्याम के भार में कितने प्रतिशत की वृद्धि होती है?

हल : माना कि राम एवं श्याम का भार क्रमशः 4x एवं 5x है।

अब, प्रश्नानुसार,

$\frac{4x \times 110}{100}$ + श्याम का नया भार = 82.8 .....(i)

एवं $\frac{(4x + 5x =)9x \times 115}{100}$ = 82.8 .....(ii)

(ii) से, x = 8

(i) में, x का मान रखने पर

श्याम का नया भार = (82.8 − 35.2=) 47.6

∴ श्याम के भार में प्रतिशत वृद्धि = $\left(\frac{47.6 - 40}{40} \times 100\right)$ = 19%

द्रुत विधि (Quicker Method) :

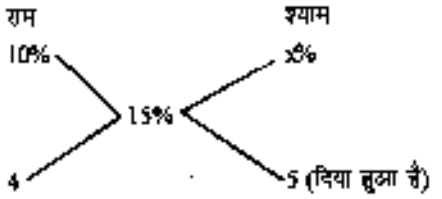
यदि श्याम के भार में x प्रतिशत की वृद्धि होती है तो एक निम्नलिखित संबंध प्राप्त होता है।

4(100 + 10) + 5(100 + x) = (4 + 5)[100 + 15] ..... (*)

या, 440 + 5(100 + x) = 1035

या, 100 + x = 119 ∴ x = 19

मिश्रण विधि (Method of Alligation) :



या, $\frac{x - 15}{15 - 10} = \frac{4}{5}$

या, x − 15 = 4

∴ x = 19

yoursmahboob

औसत
(Average)

मोटे तौर पर औसत या अंकगणितीय मध्य n पृथक् आँकड़ों के योगफल को n से विभाजित करने से प्राप्त राशि है।

उदाहरण के लिए, यदि कोई सोमवार, मंगलवार एवं बुधवार को क्रमशः 40, 50 एवं 60 रु. कमाता है तो तीन दिनों की उसकी औसत कमाई = $\frac{40+50+60}{3} = 50$ रु.

इसलिए इस अध्याय में निम्नलिखित दो सूत्रों का व्यापक प्रयोग हुआ है।

औसत = $\frac{\text{आँकड़ों का योगफल}}{\text{आँकड़े की संख्या}}$ एवं

कुल राशि = औसत × आँकड़े की संख्या

उदा. 1: किसी कक्षा के 30 छात्रों की औसत आयु 14 वर्ष है। यदि इसमें वर्ग अध्यापक की आयु भी शामिल कर ली जाए तो औसत उम्र 15 वर्ष हो जाती है तो वर्ग-अध्यापक की आयु ज्ञात करें।

हल: 30 छात्रों की कुल आयु = 14 × 30 = 420 वर्ष

वर्ग-अध्यापक को मिलाकर कुल आयु = 15 × 31 = 465 वर्ष

∴ वर्ग अध्यापक की आयु = (465 − 420) वर्ष = 45 वर्ष

सूत्र:

नये सदस्य (entrant) की आयु = नया औसत + सदस्यों की पुरानी संख्या × औसत में वृद्धि

= 15 + 30 (15 − 14) = 45 वर्ष

उदा. 2: चार व्यक्तियों का औसत वजन 3 किलोग्राम बढ़ जाता है यदि 120 किलोग्राम वजन वाले व्यक्ति की जगह किसी और व्यक्ति को शामिल कर लिया जाता है। इस नए व्यक्ति का वजन बताएँ।

हल: **द्रुत विधि:** यदि औसत में 3 किलोग्राम की वृद्धि होती है तो कुल वजन में 3 × 4 = 12 किलोग्राम की वृद्धि होगी।

वजन में यह वृद्धि नए व्यक्ति के प्रवेश से हुई है।

∴ नए आदमी का वजन = 120 + 12 = 132 किलोग्राम

सूत्र:

नए व्यक्ति का वजन = हटाए गए व्यक्ति का वजन + व्यक्तियों की संख्या × औसत में वृद्धि

= 120 + 4 × 3 = 132 किलोग्राम

उदा. 3: किसी परीक्षा में 120 छात्रों के प्राप्तांकों का औसत 35 है। यदि उत्तीर्ण छात्रों का औसत अंक 39 हो एवं अनुत्तीर्ण छात्रों का औसत अंक 15 हो तो उत्तीर्ण होनेवाले छात्रों की संख्या ज्ञात करें।

yoursmahboob

हल: मान लिया कि उत्तीर्ण छात्रों की संख्या – x

कुल प्राप्तांक – $120 \times 35 = 39x - (120 - x) \times 15$

या, $4200 - 39x + 1800 - 15x$

या, $24x = 2400$

$\therefore x = 100$

$\therefore$ उत्तीर्ण छात्रों की संख्या – 100

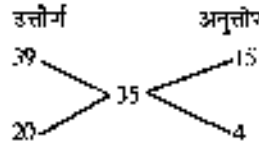
सूत्र:

$$\text{उत्तीर्ण छात्रों की संख्या} = \frac{\text{कुल परीक्षार्थी} \left(\text{कुल औसत} - \text{अनुत्तीर्ण छात्रों का औसत} \right)}{\text{उत्तीर्ण छात्रों का औसत} - \text{अनुत्तीर्ण छात्रों का औसत}}$$

$$\text{अनुत्तीर्ण छात्रों की संख्या} = \frac{\text{कुल परीक्षार्थी} \left(\text{उत्तीर्ण छात्रों का औसत} - \text{कुल औसत} \right)}{\text{उत्तीर्ण छात्रों का औसत} - \text{अनुत्तीर्ण छात्रों का औसत}}$$

$$\therefore \text{उत्तीर्ण छात्रों की संख्या} = \frac{120(35 - 15)}{39 - 15} = 100$$

***मिश्रण विधि से* (By Method of Alligation):**



$\therefore$ उत्तीर्ण परीक्षार्थियों की संख्या : अनुत्तीर्ण परीक्षार्थियों की संख्या

$= 20 : 4 = 5 : 1$

$$\therefore \text{उत्तीर्ण परीक्षार्थियों की संख्या} = \frac{120}{5+1} \times 5 = 100$$

उदा. 4: 11 नतीजों का औसत 50 है। यदि पहले छः नतीजों का औसत 49 हो और अंतिम छः नतीजों का औसत 52 हो तो छठा नतीजा बताएँ।

हल: 11 नतीजों का कुल योग – $11 \times 50 = 550$

पहले छः नतीजों का कुल योग $= 6 \times 49 = 294$

अंतिम छः नतीजों का कुल योग – $6 \times 52 = 312$

छठा नतीजा दोनों में उभयनिष्ठ है।

$\therefore$ छठा नतीजा $= 294 + 312 - 550 = 56$

सूत्र:

छठा नतीजा $= 50 + 6\{(52 - 50) + (49 - 50)\}$

$= 50 + 6\{2 - 1\} = 56$

उदा. 5: 8 व्यक्तियों की किसी समिति की औसत उम्र 2 वर्ष बढ़ जाती है यदि 35 वर्ष एवं 45 वर्ष की आयु वाले दो पुरुषों को हटाकर दो महिलाओं को रख दिया जाए। उन दो महिलाओं की औसत उम्र ज्ञात करें।

yoursmahboob

हल: उदा.-2 में प्रयुक्त सूत्र से,

दोनों महिलाओं की आयु का कुल योग $= 2 \times 8 + (35 + 15)$

$= 16 + 80 = 96$ वर्ष

$\therefore$ दोनों महिलाओं की औसत आयु $= \frac{96}{2} = 48$ वर्ष

उदा. 6: 6 सदस्यों वाले किसी परिवार की औसत आयु 22 वर्ष है। यदि सबसे छोटे सदस्य की आयु 7 वर्ष हो तो इस सदस्य के जन्म के समय परिवार की औसत आयु क्या थी?

हल: सभी सदस्यों की आयु का योगफल $= (6 \times 22) = 132$ वर्ष

7 वर्ष पूर्व आयु का कुल योगफल $= [132 - (6 \times 7)] = 90$ वर्ष

लेकिन उस समय परिवार में केवल 5 सदस्य थे

इसलिए उस समय औसत $= 90 \div 5 = 18$ वर्ष

उदा. 7: किसी व्यक्ति ने 50 रु. वाली 13 कमीजें, 60 रु. वाली 15 पैंटें एवं 65 रु. प्रति जोड़ा के हिसाब से 12 जोड़े जूते खरीदे। प्रत्येक वस्तु की औसत कीमत बताएँ।

हल: ***सूत्र विधि:***

$$\text{औसत} = \frac{13 \times 50 + 15 \times 60 + 12 \times 65}{13 + 15 + 12} = 58.25 \text{ रु}$$

उदा. 8: दो मैचों में किसी बल्लेबाज की औसत रन संख्या 27 है एवं तीन अन्य मैचों में यह संख्या 32 है। इन पाँचों मैचों में बल्लेबाज की औसत रन संख्या क्या रही?

हल: ***सूत्र विधि:***

$$5 \text{ मैचों का औसत} = \frac{2 \times 27 + 3 \times 32}{2 + 3} = \frac{54 + 96}{5} = 30$$

उदा. 9: 11 परिणामों का औसत 30 है, पहले 5 का औसत 25 है एवं अंतिम 5 का औसत 28 है। छठे परिणाम का मान बताएँ?

हल: ***सूत्र विधि:***

छठी संख्या = 11 परिणामों का योगफल – (पहले पाँचों परिणामों का योगफल + अंतिम पाँचों परिणामों का योगफल)

$= 11 \times 30 - (5 \times 25 + 5 \times 28) = 330 - 265 = 65$

नोट: उदा. 4 एवं उदा.-9 अलग-अलग हैं। उदा. 4 में छठा नतीजा दोनों समूहों में उभयनिष्ठ है, जबकि उदा. 9 में छठे नतीजे को दोनों समूहों में से छाँटकर अलग कर दिया गया है।

उदा. 10: किसी कक्षा में 20 छात्र हैं। यदि इनमें से 18 वर्षीय एक छात्र हटाकर किसी और छात्र को शामिल कर लिया जाता है तो औसत आयु 2 महीने घट जाती है। नए छात्र की उम्र बताएँ।

हल: यह उदा.-2 से मिलता-जुलता सवाल है। अंतर केवल इतना है कि उदा.-2 में आदमी बदल देने से औसत बढ़ जाता है, जबकि यहाँ औसत घट जाता है। इस प्रकार, आप सूत्र में भी अंतर देख सकते हैं।

yoursmaboob

सूत्र:

नए व्यक्ति की उम्र

= हटाए गए व्यक्ति की उम्र − (व्यक्तियों की संख्या × औसत उम्र में कमी)

$= 18 - 20 \times \frac{2}{12}$

$= 18 - \frac{10}{3} = \frac{44}{3}$

$= 14\frac{2}{3}$ वर्ष = 14 वर्ष 8 महीने

उदा. 11: कोई बल्लेबाज अपनी 17वीं पारी में 85 रन बनाता है तथा इस प्रक्रिया में उसके औसत में 3 की वृद्धि होती है। 17 पारियों के बाद उसके रनों का औसत कितना है?

हल: मान लिया कि 16वीं पारी के बाद औसत = x

प्रश्नानुसार,

$16x + 85 = 17(x + 3)$ = 17वीं पारी के बाद कुल रन संख्या

$\therefore\ x = 85 - 51 = 34$

$\therefore$ 17 पारियों के बाद औसत $= x + 3 = 34 + 3 = 37$

सूत्र:

16 पारियों के बाद औसत $= 85 - 3 \times 17 = 34$

17 पारियों के बाद औसत $= 85 + 3(17 - 1) = 37$

उदा. 12: किसी क्रिकेट खिलाड़ी ने 10 पारी पूरे कर लिए हैं तथा उसके रनों का औसत 21.5 है। अगली पारी में वह कितना रन बनाए ताकि रनों का औसत बढ़कर 24 हो जाए।

हल: 10 पारियों में कुल रन-संख्या $= 21.5 \times 10 = 215$

मान लिया कि 11वीं पारी में उसे x रन चाहिए।

तब 11 पारियों का औसत $= \frac{215 + x}{11} = 24$

या, $x = 264 - 215 = 49$

सूत्र:

अभीष्ट रन संख्या $= 11 \times 24 - 21.5 \times 10 = 49$

नोट: उपर्युक्त सूत्र इस सिद्धांत पर आधारित है कि अंतर अंतिम पारी की रन-संख्या के संदर्भ में गिना जाता है।

गति से संबद्ध औसत

प्रमेय: यदि कोई व्यक्ति किसी निश्चित दूरी को x किलोमीटर प्रति घंटे की रफ्तार से तथा उतनी ही दूरी को y किलोमीटर प्रति घंटे की रफ्तार से तय करे तो पूरी यात्रा के दौरान औसत चाल $= \frac{2xy}{x + y}$ किलोमीटर प्रति घंटा।

yoursmartboob

या,

यदि आधी दूरी x किलोमीटर प्रति घंटे की रफ्तार से तय की जाए एवं शेष आधी दूरी y किलोमीटर प्रति घंटे की रफ्तार से तय करे तो यात्रा के दौरान औसत चाल $= \frac{2xy}{x+y}$ किलोमीटर/घंटा।

या,

यदि कोई व्यक्ति किसी स्थान तक x किलोमीटर प्रति घंटा की रफ्तार से जाता हो तथा y किलोमीटर प्रति घंटा की रफ्तार से वापस लौट आता हो तो यात्रा के दौरान औसत चाल $= \frac{2x}{x+y}$ किलोमीटर प्रति घंटा।

नोट: उपर्युक्त तीनों स्थितियों में यात्रा के दोनों चरणों में तय की गई दूरियाँ समान हैं। इसलिए अंतिम दोनों स्थितियों को पहली स्थिति का खास स्थिति माना जा सकता है। यही वजह है कि तीनों से हम एक ही परिणाम पर पहुँचते हैं।

प्रमेय: यदि कोई व्यक्ति तीन समान दूरियों को क्रमशः x किलोमीटर प्रति घंटा, y किलोमीटर प्रति घंटा एवं z किलोमीटर प्रति घंटा की चाल से तय करे तो यात्रा के दौरान औसत चाल $= \frac{3xyz}{xy+yz+xz}$ किलोमीटर प्रति घंटा।

प्रमाण: मान लिया कि तीन समान दूरियाँ A कि.मी. हैं।

x किलोमीटर प्रति घंटा की चाल से लिया गया समय $= \frac{A}{x}$ घंटे

y किलोमीटर प्रति घंटा की चाल से लिया गया समय $= \frac{A}{y}$ घंटे

z किलोमीटर प्रति घंटा की चाल से लिया गया समय $= \frac{A}{z}$ घंटे

$\therefore$ कुल दूरी $\left(\frac{A}{x}+\frac{A}{y}+\frac{A}{z}\right)$ घंटे में तय की गई।

$\therefore$ यात्रा के दौरान औसत चाल $= \frac{3A}{\frac{A}{x}+\frac{A}{y}+\frac{A}{z}} = \frac{3xyzA}{Ayz+Axz+Axy}$

$= \frac{3xyz}{xy+yz+xz}$ किलोमीटर/घंटा

yourexamboob

उदा. 13: एक रेलगाड़ी A से B तक की यात्रा 20 किलोमीटर प्रति घंटे की चाल से एवं B से A तक की यात्रा 30 किलोमीटर प्रति घंटे की चाल से तय करती है। यात्रा के दौरान रेलगाड़ी की औसत चाल ज्ञात करें।

हल: सूत्र:

$$\text{औसत चाल} = \frac{2\times 20\times 30}{20+30} = 24 \text{ कि.मी./घंटा}$$

उदा. 14: कोई व्यक्ति अपने कुल यात्रा मार्ग को तीन समान हिस्सों में विभाजित कर उन्हें क्रमशः 40, 30 एवं 15 किलोमीटर प्रति घंटे की रफ्तार से तय करने का निश्चय करता है। यात्रा के दौरान उसकी औसत चाल क्या है?

हल: प्रमेय से:

$$\text{औसत चाल} = \frac{3\times 40\times 30\times 15}{40\times 30+30\times 15+40\times 15} = \frac{3\times 40\times 30\times 15}{2250}$$

$$= 24 \text{ किलोमीटर प्रति घंटा}$$

उदा. 15: यात्रा का एक-तिहाई अंश 25 किलोमीटर प्रति घंटे की रफ्तार से तय किया जाता है, एक-चौथाई अंश 30 किलोमीटर प्रति घंटे की रफ्तार से एवं शेष दूरी को 50 किलोमीटर प्रति घंटे की रफ्तार से तय किया जाता है। यात्रा के दौरान औसत चाल क्या है?

हल: मान लिया कि मार्ग की कुल लंबाई = x किलोमीटर।

तब $\frac{x}{3}$ किलोमीटर 25 किलोमीटर प्रति घंटे की रफ्तार से, $\frac{x}{4}$ किलोमीटर की दूरी 30 किलोमीटर प्रति घंटे की रफ्तार से, तथा शेष दूरी $\left(x-\frac{x}{3}-\frac{x}{4}=\right)\frac{5}{12}x$ किलोमीटर 50 किलोमीटर प्रति घंटे की रफ्तार से तय की जाती है।

x किलोमीटर की दूरी तय करने में लगा कुल समय

$$= \frac{x}{3\times 25}+\frac{x}{4\times 30}+\frac{5x}{12\times 50} = \frac{18x}{600} \text{ घंटे} = \frac{3x}{100} \text{ घंटे}$$

$$\therefore \text{औसत चाल} = \frac{x}{\frac{18x}{600}} = \frac{100}{3} = 33\frac{1}{3} \text{ कि.मी./घंटा}$$

नोट: इस उदाहरण में यात्रा के तीनों हिस्से समान नहीं हैं। इसलिए हमलोगों ने प्रमेय का इस्तेमाल नहीं किया।

उदा. 16: एक दफ्तर के सभी कर्मचारियों (Staff) का औसत वेतन 120 रु. प्रति महीना है। पदाधिकारियों एवं गैर-पदाधिकारियों (Officers and non-officers) का औसत वेतन क्रमशः 460 रु. एवं 110 रु. है। यदि दफ्तर में पदाधिकारियों की संख्या 15 हो तो गैर-पदाधिकारियों की संख्या ज्ञात करें।

yoursmahboob

हल : माना कि अभीष्ट गैर पदाधिकारियों की संख्या = x

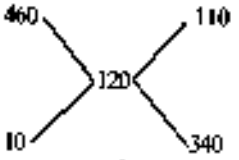
तो, $110x + 460 \times 15 = 120(15 + x)$

या, $120x - 110x = 460 \times 15 - 120 \times 15 = 15(460 - 120)$

या, $10x = 15 \times 340 \quad \therefore x = 15 \times 34 = 510$

द्रुत विधि (Quicker Method) : मिश्रण (Alligation) विधि :

पदाधिकारी गैर पदाधिकारी



इसलिए, पदाधिकारी : गैर पदाधिकारी = 10 : 340 = 1 : 34

$\therefore$ गैर-पदाधिकारियों की संख्या $= 15 \times \frac{34}{1} = 510$

अथवा

सीधे सूत्र से :

गैर पदाधिकारियों की संख्या =

$$\text{पदाधिकारियों की संख्या} \times \left[\frac{\text{पदाधिकारियों का औसत वेतन} - \text{सारे कर्मचारियों का औसत वेतन}}{\text{सारे कर्मचारियों का औसत वेतन} - \text{गैर-पदाधिकारियों का औसत वेतन}}\right]$$

$$= 15\left(\frac{460-120}{120-110}\right) = 510$$

उदा. 12: एक छात्रावास में 35 विद्यार्थी हैं। यदि विद्यार्थियों की संख्या में 7 की वृद्धि हो जाती है तो भोजन का खर्च 42 रु. प्रति दिन के हिसाब से बढ़ जाता है। जबकि प्रति व्यक्ति औसत खर्च में 1 रु. की कमी आती है। भोजन का मूल खर्च (original expenditure) ज्ञात करें।

हल : माना कि औसत खर्च x रु. है। तो कुल खर्च $= 35x$ रु.

जब 7 और विद्यार्थी छात्रावास में शामिल होते हैं तो भोजन का खर्च $= 35x + 42$

अब, औसत खर्च $= \frac{35x+42}{35+7} = \frac{35x+42}{42}$

प्रश्नानुसार,

$$\frac{35x+42}{42} = x - 1$$

या, $35x + 42 = 42x - 42$

या, $7x = 84 \quad \therefore x = 12$

इस प्रकार, भोजन का मूल खर्च $= 35 \times 12 = 420$ रु.

सूत्र: यदि औसत में कमी $= x$

खर्च में वृद्धि $= y$

yoursmahboob

विद्यार्थियों की संख्या में वृद्धि = Z एवं
विद्यार्थियों की संख्या (मूलतः) – N, तो

मूल खर्च (original expenditure) – $N\left[\frac{x(N+Z)+y}{Z}\right]$

इस स्थिति में, $35\left[\frac{1(35+7)+42}{7}\right] = 35\times12 = 420$ रु.

नोट : इस सूत्र का इस्तेमाल इस प्रकार के उदाहरण की विभिन्न स्थितियों में किया जा सकता है। इसे कोशिश करें।

महत्वपूर्ण तथ्य

1. प्रथम n प्राकृत संख्याओं (natural numbers) का औसत $=\frac{n+1}{2}$

2. n लगातार संख्याओं का औसत (जहाँ n एक विषम संख्या है) हमेशा बीच वाली संख्या (middle number) होती है। संख्याएँ निम्नलिखित हो सकती हैं:

   a) क्रमागत संख्याएँ, अर्थात् 1, 2, 3, 4, 5
   उपर्युक्त पाँच क्रमागत संख्याओं का औसत मध्य संख्या अर्थात् 3 है।

   सत्यापन: $\frac{1+2+3+4+5}{5}=\frac{15}{5}=3$

   b) क्रमागत विषम संख्याएँ, अर्थात् 1, 3, 5, 7, 9
   औसत – मध्य संख्या = 5

   सत्यापन: $\frac{1+3+5+7+9}{5}=\frac{25}{5}=5$

   c) क्रमागत सम संख्याएँ, अर्थात् 2, 4, 6, 8, 10
   औसत = मध्य संख्या = 6

   सत्यापन: औसत $=\frac{2+4+6+8+10}{5}=\frac{30}{5}=6$

3. n लगातार संख्याओं का औसत (जहाँ n = सम संख्या) दो मध्य संख्याओं के औसत के बराबर होता है। संख्याएँ निम्नलिखित हो सकती हैं:

   a) क्रमागत संख्याएँ, अर्थात् 1, 2, 3, 4, 5, 6

   औसत – दो मध्य संख्याओं का औसत $=\frac{3+4}{2}=3.5$

   सत्यापन: औसत $=\frac{1+2+3+4+5+6}{6}=\frac{21}{6}=3.5$

   b) क्रमागत विषम संख्याएँ, अर्थात् 1, 3, 5, 7, 9, 11

yoursmahboob

औसत $= \frac{5+7}{2} = 6$

सत्यापन: औसत $= \frac{1+3+5+7+9+11}{6} = \frac{36}{6} = 6$

c) क्रमागत सम संख्याएँ, अर्थात् 2, 4, 6, 8, 10, 12

औसत $= \frac{6+8}{2} = 7$

सत्यापन: औसत $= \frac{2+4+6+8+10+12}{6} = \frac{42}{6} = 7$

नोट: उपर्युक्त सभी शृंखला में दो मध्य संख्याएँ हैं। इसलिए अभीष्ट औसत को ज्ञात निम्नलिखित विधि द्वारा किया जा सकता है।

I. क्रमागत संख्याओं की स्थिति में:

औसत = छोटा मध्य पद + 1 या बड़ा मध्य पद - 0.5

II. क्रमागत विषम एवं क्रमागत सम संख्याओं की स्थिति में:

औसत = छोटा मध्य पद + 1 या बड़ा मध्य पद - 1

4. 1 से n तक के विषम संख्याओं का औसत $= \left(\frac{\text{अंतिम विषम संख्या} + 1}{2}\right)$;

जहाँ n = विषम संख्या

उदाहरण के लिए, 1 से 35 तक के विषम संख्याओं का औसत $= \frac{35+1}{2} = 18$

5. 1 से n तक के सम संख्याओं का औसत $= \left(\frac{\text{अंतिम सम संख्या} + 2}{2}\right)$;

जहाँ n = सम संख्या

उदाहरण के लिए, 1 से 50 तक के सम संख्याओं का औसत $= \frac{50+2}{2} = 26$

6. n तक के सभी प्राकृत संख्याओं (natural numbers) के वर्ग का औसत

$$= \left[\frac{(n+1)(2n+1)}{6}\right]$$

उदाहरण के लिए, 7 तक के सभी प्राकृत संख्याओं के वर्ग का औसत

$$= \frac{(7+1)(2\times7+1)}{6} = \frac{8\times15}{6} = 20$$

सत्यापन: अभीष्ट औसत $= \frac{1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2+7^2}{7} = \frac{140}{7} = 20$

yoursmahboob

7. n तक के सभी प्राकृत संख्याओं के घन का औसत $= \left[\frac{n(n+1)^2}{4}\right]$

उदाहरण के लिए, 7 तक के सभी प्राकृत संख्याओं के घन का औसत

$$= \frac{7(7+1)^2}{4} = \frac{7\times8\times8}{4} = 112$$

सत्यापन: अभीष्ट औसत $= \frac{1^3+2^3+3^3+4^3+5^3+6^3+7^3}{7} = \frac{784}{7} = 112$

8. प्रथम n क्रमागत सम संख्याओं (consecutive even numbers) का औसत $(n+1)$ होता है।

9. प्रथम n क्रमागत विषम संख्याओं (consecutive odd numbers) का औसत (n) होता है।

10. प्रथम n क्रमागत सम संख्याओं के वर्ग का औसत $= \left[\frac{2(n+1)(2n+1)}{3}\right]$

उदाहरण के लिए प्रथम 4 सम संख्याओं के वर्ग का औसत $= \frac{2(4+1)(2\times4+1)}{3} = 30$

सत्यापन: प्रथम 4 सम संख्याएँ = 2, 4, 6, 8

सम संख्याओं का वर्ग $= 2^2, 4^2, 6^2, 8^2$

अभीष्ट औसत $= \frac{2^2+4^2+6^2+8^2}{4} = \frac{120}{4} = 30$

11. n तक के सभी क्रमागत सम संख्याओं के वर्ग का औसत $= \frac{(n+1)(n+2)}{3}$;

जहाँ n एक सम संख्या है।

उदाहरण के लिए, 8 तक के सभी सम संख्याओं के वर्ग का औसत $= \frac{(8+1)(8+2)}{3} = 30$

12. n तक के सभी क्रमागत विषम संख्याओं के वर्ग का औसत $= \frac{n(n+2)}{3}$; जहाँ n = विषम संख्या। उदाहरण के लिए, 8 तक के सभी विषम संख्याओं के वर्ग का औसत निकालना है। यहाँ 8 एक सम संख्या है इसलिए हम सर्वप्रथम 8 से तुरंत पहले की विषम संख्या ज्ञात करते हैं जो 7 है।

∴ यहाँ n = 7। अब हम उपर्युक्त सूत्र का इस्तेमाल करते हैं।

अभीष्ट औसत $= \frac{7(7+2)}{3} = 21$

सत्यापन: अभीष्ट विषम संख्याएँ = 1, 3, 5 एवं 7

yoursmahboob

विषम संख्याओं का वर्ग = $1^2, 3^2, 5^2, 7^2$

अभीष्ट औसत $= \frac{1^2+3^2+5^2+7^2}{4} = \frac{84}{4} = 21$

13. यदि n क्रमगत विषम संख्याओं का औसत 'x' हो तो सबसे-छोटी एवं सबसे बड़ी संख्याओं का अंतर $2(n-1)$ होता है। हम देखते हैं कि उपर्युक्त सूत्र 'x' से स्वतंत्र है। इसका अर्थ है कि उपर्युक्त सूत्र 'x' के किसी भी मान के लिए मान्य है।

अभ्यास प्रश्न

1. किसी परीक्षा में 60 विद्यार्थियों का एक दल का औसत प्राप्तांक 55 है तथा 40 विद्यार्थियों के एक दूसरे दल का औसत प्राप्तांक 45 है। कुल मिलाकर औसत प्राप्तांक कितना है?
   1) 52 2) 40 3) 51 4) 56 5) इनमें से कोई नहीं
2. किसी विद्यार्थी को 4 विषयों में औसत 75 अंक प्राप्त होते हैं। यदि उसे 5वें विषय में कुल 80 अंक प्राप्त होते हों तो नया औसत क्या है?
   1) 80 2) 76 3) 92 4) 95 5) इनमें से कोई नहीं
3. प्रथम 61 प्राकृत संख्याओं (natural numbers) का औसत क्या है?
   1) 30 2) 30.5 3) 31 4) 32 5) इनमें से कोई नहीं
4. किसी परीक्षा में प्राप्तांकों का औसत 50 पाया गया। गणना में शामिल त्रुटियों को हटाने के उपरान्त 100 परीक्षार्थियों के प्राप्तांक 90 से घटाकर 60 करने पड़े। इससे प्राप्तांकों का औसत घटकर 45 हो गया। परीक्षा में शामिल होने वाले विद्यार्थियों की कुल संख्या क्या है?
   1) 300 2) 600 3) 200 4) 150 5) इनमें से कोई नहीं
5. 16 व्यक्तियों के एक दल की औसत आयु 28 वर्ष 3 महीने है। 58 वर्षीय दो वृद्धों ने दल को छोड़ दिया। शेष व्यक्तियों की आयु का औसत क्या है?
   1) 26 2) 24 3) 22 4) 20 5) इनमें से कोई नहीं
6. 50 गेंदों का औसत वजन 5 ग्राम है। यदि थैले का वजन भी शामिल कर लिया जाए तो औसत वजन में 0.05 ग्राम की वृद्धि हो जाती है। थैले का वजन कितना है?
   1) 5.05 ग्राम 2) 6.05 ग्राम 3) 7.05 ग्राम 4) 7.55 ग्राम 5) इनमें से कोई नहीं
7. 10 विद्यार्थियों के एक दल की औसत आयु 15 वर्ष है। यदि 5 और व्यक्ति दल में शामिल कर लिए जाएँ तो औसत आयु में एक वर्ष की वृद्धि हो जाती है। नए छात्र की आयु ज्ञात करें।
   1) 18 वर्ष 2) 17 वर्ष 3) 16 वर्ष 4) 12 वर्ष 5) इनमें से कोई नहीं
8. 8-व्यक्तियों के औसत वजन में 2.5 किलोग्राम की वृद्धि हो जाती है यदि 56 किलोग्राम के किसी व्यक्ति को निकालकर कोई अन्य व्यक्ति शामिल कर लिया जाए। नए व्यक्ति का वजन ज्ञात करें।
   1) 73 किलो 2) 72 किलो 3) 75 किलो 4) 80 किलो 5) इनमें से कोई नहीं
9. A, B एवं C का औसत वजन 84 किलोग्राम है। यदि D भी दल में शामिल हो जाए तो दल का औसत वजन 80 किलोग्राम हो जाता है। यदि कोई व्यक्ति E, जिसका वजन D से 3 किलोग्राम अधिक है, A को जगह रख दिया जाए, तो B, C, D एवं E के वजन का औसत 79 किलोग्राम हो जाता है। A का वजन ज्ञात करें।

yoursmahboob

1) 64 किलोग्राम 2) 72 किलोग्राम 3) 75 किलोग्राम
4) 80 किलोग्राम 5) इनमें से कोई नहीं

10. 11 परिणामों का औसत 50 है। यदि पहले 6 परिणामों का औसत 49 हो तथा अंतिम 6 परिणामों का औसत 52 हो तो छठा परिणाम ज्ञात करें।

1) 50 2) 52 3) 56 4) 60 5) इनमें से कोई नहीं

11. कोई व्यक्ति 60 किलोमीटर प्रति घंटे की रफ्तार से गाड़ी चलाकर दफ्तर पहुँचता है और फिर उसी मार्ग से 30 किलोमीटर प्रति घंटे की रफ्तार से गाड़ी चलाकर वापस लौटता है उसकी औसत चाल ज्ञात करें।

1) 50 किलोमीटर/घंटा 2) 45 किलोमीटर/घंटा 3) 40 किलोमीटर/घंटा
4) 55 किलोमीटर/घंटा 5) इनमें से कोई नहीं

12. पाँच क्रमागत सम संख्याएँ (consecutive even numbers) a, b, c, d एवं e का औसत ज्ञात करें।

13. कोई व्यक्ति एक-तिहाई यात्रा 60 कि.मी. प्रति घंटे की रफ्तार से चल रही रेलगाड़ी से तय करता है, अगली एक तिहाई यात्रा 30 कि.मी. प्रति घंटे की रफ्तार से चल रही बस से एवं शेष यात्रा 10 कि.मी. प्रति घंटे की रफ्तार से चल रही साइकिल से तय करता है। संपूर्ण यात्रा के दौरान उसकी औसत चाल क्या है?

1) 30 कि.मी./घंटा 2) $33\frac{1}{3}$ कि.मी./घंटा 3) 20 कि.मी./घंटा
4) 50 कि.मी./घंटा 5) इनमें से कोई नहीं

14. एक कॉलेज में पहले सप्ताह के पहले तीन दिनों की औसत उपस्थिति 325 है तथा पहले चार दिनों की औसत उपस्थिति 320 है. चौथे दिन कितने छात्र उपस्थित थे?

1) 305 2) 350 3) 530 4) 503

15. एक कार v_1 कि. मी. प्रति घंटे की रफ्तार से t_1 घंटा चलती है तथा v_2 कि. मी. प्रति घंटे की रफ्तार से t_2 घंटा चलती है। कार की औसत चाल पूरी यात्रा के दौरान क्या है?

1) $\frac{t_1+t_2}{v_1t_1+v_2t_2}$ कि. मी./घंटा 2) $\frac{v_1t_1+v_2t_2}{t_1+t_2}$ कि. मी./घंटा

3) $\frac{v_1t_2+v_2t_1}{v_1+v_2}$ कि. मी./घंटा 4) $\frac{v_1+v_2}{v_1t_1+v_2t_2}$ कि. मी./घंटा

16. एक कार v_1 कि. मी. प्रति घंटा की रफ्तार से x कि. मी. चलता है। तथा v_2 कि. मी. प्रति घंटा की रफ्तार से y कि. मी. चलता है। कार की औसत चाल पूरी यात्रा के लिए ज्ञात करें

1) $\frac{v_1v_2(x+y)}{xv_2+yv_1}$ कि. मी./घंटा 2) $\frac{xv_2+yv_1}{v_1v_2(x+y)}$ कि. मी./घंटा

3) $\frac{xy(v_1+v_2)}{xv_1+yv_2}$ कि. मी./घंटा 4) $\frac{xv_2+yv_2}{xy(v_1+v_2)}$ कि. मी./घंटा

yourmahboob

17. एक हवाई जहाज किसी वर्गाकार क्षेत्र के चारों दिशाओं के ऊपर 200, 400, 600 एवं 800 कि. मी. प्रति घंटा की रफ्तार से चलता है। तो पूरी यात्रा के लिए हवाई जहाज की औसत गति ज्ञात करें।

1) 600 कि. मी./घंटा 2) 400 कि. मी./घंटा
3) 500 कि. मी./घंटा 4) 384 कि. मी./घंटा

18. तीन लड़कों की औसत उम्र 15 वर्ष है। उनके उम्र 3 : 5 : 7 के अनुपात में हैं। उनमें से सबसे बड़े लड़के की उम्र क्या है?

1) 7 वर्ष 2) 14 वर्ष 3) 20 वर्ष 4) 21 वर्ष

19. किसी शहर की जनसंख्या पहले, दूसरे एवं तीसरे वर्ष क्रमशः 20%, 25%, एवं 44% की वृद्धि होती है। तीन वर्षों में शहर की जनसंख्या की औसत वृद्धि दर क्या है?

1) 36.87% 2) 37.68% 3) 38.67% 4) इनमें से कोई नहीं

20. एक निवेशक अपनी एक चौथाई पूँजी पर 3% आमदनी प्राप्त करता है, अपनी दो तिहाई पूँजी पर 5% आमदनी प्राप्त करता है, तथा शेष पूँजी पर 11% आमदनी प्राप्त करता है। उसकी कुल पूँजी पर औसत आमदनी की दर क्या है?

1) 5% 2) 10% 3) 6.5% 4) 10.5%

21. तीन दी हुई संख्याओं में से पहली संख्या दूसरी संख्या की दुगुनी तथा तीसरी संख्या की तीन गुनी है। यदि प्रदत्त संख्याओं का औसत 88 हो, तो पहली एवं तीसरी संख्या का अंतर ज्ञात करें।

1) 48 2) 72 3) 96 4) 32

22. 8 पठनांकों (reading) का औसत 24.3 है। जिसमें पहले दो पठनांकों का औसत 18.5 है तथा अगले तीन पठनांकों का औसत 21.2 है। यदि छठा पठनांक सातवें पठनांक से तीन कम तथा आठवें पठनांक से 8 कम हो तो छठा पठनांक क्या है?

1) 24.8 2) 26.5 3) 27.6 4) 29.4

23. एक पति एवं पत्नी, जब उन्होंने 5 वर्ष पहले शादी की थी, की औसत आयु 23 वर्ष थी। पति, पत्नी एवं बच्चा, जो कि इस बीच पैदा हुआ था, की वर्तमान औसत आयु 20 वर्ष है। बच्चे की उम्र ज्ञात करें।

1) 9 महीना 2) 1 वर्ष 3) 3 वर्ष 4) 4 वर्ष

24. 5 वर्ष पहले A, B, C, एवं D की औसत उम्र 45 वर्ष थी। अभी E उन लोगों में शामिल हो जाता है तो उन पाँचों की औसत उम्र 49 वर्ष है। E की उम्र ज्ञात करें।

1) 25 वर्ष 2) 40 वर्ष 3) 45 वर्ष 4) 64 वर्ष

25. 5 वर्ष पहले, राम और श्याम की औसत उम्र 20 वर्ष थी। अभी राम, श्याम एवं मोहन की औसत उम्र 30 वर्ष है। 10 वर्ष बाद मोहन की उम्र क्या होगी?

1) 45 वर्ष 2) 50 वर्ष 3) 49 वर्ष 4) 60 वर्ष

26. 40 छात्रों की औसत ऊँचाई 163 से.मी. है। एक दिन खास दिन, तीन छात्र A, B, एवं C अनुपस्थित हो जाते हैं तथा शेष 37 छात्रों की औसत ऊँचाई 162 से. मी. हो जाती है। यदि A एवं B की ऊँचाई बराबर है तथा C की ऊँचाई A की ऊँचाई से 2 से. मी. कम हो तो A की ऊँचाई ज्ञात करें।

yoursmahboob

1) 176 से. मी. 2) 166 से. मी.
3) 180 से. मी. 4) 186 से. मी.

27. तीन संख्याओं में, पहली दूसरी की दुगुनी है तथा तीसरी की आधी है। यदि तीनों संख्याओं का औसत 56 है तो तीनों संख्याएँ क्रम से हैं :
1) 48, 96, 24 2) 48, 24, 96
3) 96, 24, 48 4) 96, 48, 24

28. तीन संख्याओं में, दूसरी संख्या पहली संख्या की दुगुनी है एवं तीसरी संख्या की तीन गुनी है। यदि तीनों संख्याओं का औसत 44 हो तो सबसे बड़ी संख्या ज्ञात करें
1) 24 2) 36 3) 72 4) 108

29. तीन संख्याओं का योगफल 98 है। यदि पहली एवं दूसरी संख्या का अनुपात 2 : 3 एवं दूसरी एवं तीसरी संख्या का अनुपात 5 : 8 हो तो दूसरी संख्या का मान ज्ञात करें।
1) 30 2) 20 3) 58 4) 48

30. तीन आदमियों A, B एवं C का औसत भार 84 कि. ग्रा. है। एक दूसरा आदमी D इस समूह में शामिल हो जाता है और अब औसत भार 80 कि. ग्रा. हो जाता है। यदि एक और आदमी E जिसका भार D के भार से 3 कि. ग्रा. ज्यादा है A की जगह पर समूह में आता है तो B, C, D एवं E का औसत भार 79 कि. ग्रा. हो जाता है। A का भार ज्ञात करें।
1) 70 कि. ग्रा. 2) 72 कि. ग्रा.
3) 75 कि. ग्रा. 4) 80 कि. ग्रा.

31. 5 वर्ष पहले A, B, C एवं D की औसत आयु 45 वर्ष थी। X को शामिल करके पाँचों की वर्तमान औसत आयु 49 वर्ष है। X की वर्तमान आयु क्या है?
1) 64 वर्ष 2) 48 वर्ष 3) 45 वर्ष 4) 40 वर्ष

32. A एवं B की औसत उम्र 20 वर्ष है। यदि C, A की जगह पर आता तो औसत 19 होता तथा यदि C, B की जगह पर आता तो औसत 21 होता। A, B एवं C की उम्र क्या है?
1) 22, 18, 20 2) 18, 22, 20
3) 22, 20, 18 4) 18, 20, 22

33. सोमवार, मंगलवार एवं बुधवार का औसत ताप 75° था। मंगलवार, बुधवार एवं गुरुवार का औसत ताप 77° था। यदि गुरुवार का ताप 76° था तो सोमवार का ताप ज्ञात कीजिए।

34. दस संख्याओं का औसत 15.34 है। पहली पाँच संख्याओं का औसत 14.35 है तथा अन्तिम छः संख्याओं का औसत 15.43 है। पाँचवीं संख्या अशुद्ध है। शेष संख्याओं का औसत ज्ञात कीजिए।

35. एक छात्रावास में 50 छात्र थे। 10 छात्रों के और आ जाने से भोजन का व्यय 70 रु. बढ़ गया परन्तु प्रति छात्र औसत व्यय 1 रु. कम हो गया। छात्रावास के पहले 50 छात्रों का व्यय ज्ञात कीजिए।

36. क्रिकेट के एक मैच में 6 खिलाड़ियों के रनों का कुल औसत था। सातवें खिलाड़ी ने 112 रन बनाए और उनके रनों का औसत 10 बढ़ गया। पहले के खिलाड़ियों के रनों का औसत क्या था? उनके कुल रनों की संख्या क्या थी?

yoursmahboob

37. 6 लड़कों में से एक 20 किलोग्राम भार वाले लड़के को निकाल कर उसके स्थान पर एक नए लड़के को रख लेने से सबका औसत भार 5 किलोग्राम बढ़ गया। नए लड़के का भार क्या है?

38. चार पुरुषों A, B, C, तथा D का औसत भार 67 किलोग्राम है। पाँचवें पुरुष E के आ जाने से औसत भार 2 किलोग्राम घट जाता है। A के स्थान पर एक अन्य पुरुष F, जिसका भार E के भार से 4 किलोग्राम अधिक है, आ जाता है। इससे औसत भार घटकर 64 किलोग्राम रह जाता है। A का भार ज्ञात कीजिए।

39. एक परीक्षा में बैठने वाले विद्यार्थियों की संख्या के $\frac{2}{5}$ ने $\frac{3}{8}$, $\frac{1}{5}$ ने $\frac{1}{8}$, $\frac{3}{10}$ ने $\frac{1}{4}$ तथा शेष ने $\frac{5}{8}$ अंक प्राप्त किए। कुल विद्यार्थियों का औसत प्राप्तांक 125 रहा। परीक्षा के पूर्णांक ज्ञात कीजिए।

उत्तर

1. 3; दल की औसत आयु $= \frac{60\times55+40\times45}{60+40} = 51$

2. 2; $\frac{4\times75+80}{5} = 76$

3. 3; पहले 61 प्राकृत संख्याओं का योग $= \frac{61(61+1)}{2}$

$\therefore$ औसत $= \frac{61\times62}{2\times61} = 31$

सीधे सूत्र से:

पहले n प्राकृत संख्याओं का औसत $= \frac{n+1}{2}$

इसलिए इस स्थिति में औसत $= \frac{61+1}{2} = 31$

4. 2; मान लिया कि परीक्षार्थियों की कुल संख्या $= x$

$\therefore \frac{50x-100(90-60)}{x} = 45$

$\therefore x = 600$

5. 2; $\frac{16\times28\frac{1}{4}-2\times58}{14} = 24$

6. 4; $51\times5.05-50\times5=7.55$ ग्राम

yoursmahboob

सीधे सूत्र से:

थैलों का वजन = पुराना औसत + औसत में वृद्धि × (वस्तुओं की कुल संख्या)

$= 5 + 0.05(51)$

$= 5 + 2.55 = 7.55$ ग्राम

7. 1; 10 विद्यार्थियों की कुल आयु $= 15 \times 10 = 150$ वर्ष

15 विद्यार्थियों की कुल आयु $= 15 \times 16 = 240$ वर्ष

$\therefore$ नए छात्रों का औसत $= \frac{240-150}{5} = 18$ वर्ष

8. 5; $56 + 8 \times 2.5 = 76$ वर्ष

9. 3; $A + B + C = 3 \times 84 = 252$ किलोग्राम

$A + B + C + D = 4 \times 80 = 320$ किलोग्राम

$\therefore D = 320 - 252 = 68$ किलोग्राम

$\therefore E = 68 + 3 = 71$ किलोग्राम

अब, $\frac{320 - A + 71}{4} = 79$

$\therefore A = 75$ किलोग्राम

10. 33; $6 \times 49 + 6 \times 52 = 11 \times 50 = 294 + 312 = 550 = 56$

11. 3; सूत्र से:

औसत $= \frac{2 \times 60 \times 30}{60 + 30} = \frac{2 \times 60 \times 30}{90} = 40$ किलोमीटर/घंटा

12. क्रमागत सम संख्याओं या विषम संख्याओं का औसत उनका मध्य पद होता है। यहाँ प्रदत्त स्थिति में औसत = c

13. 3; औसत $= \frac{3 \times 60 \times 30 \times 10}{60 \times 30 + 60 \times 10 + 30 \times 10} = \frac{3 \times 60 \times 30 \times 10}{2700} = 20$ कि.मी./घंटा

14. 1; अभीष्ट उत्तर $= 320 \times 4 - 325 \times 3 = 305$

15. 2; t_1 घंटे में तय की गई दूरी $= t_1 v_1$ कि. मी.

t_2 घंटे में तय की गई दूरी $= t_2 v_2$ कि. मी.

कुल दूरी $= t_1 v_1 + t_2 v_2$

कुल समय $= t_1 + t_2$

$\therefore$ औसत चाल $= \frac{v_1 t_1 + t_2 v_2}{t_1 + t_2}$ कि. मी./घंटा

16. 3; पहली यात्रा में लिया गया समय $= \frac{x}{v_1}$ घंटा

दूसरी यात्रा में लिया गया समय $= \frac{y}{v_2}$ घंटा

yoursmahboob

कुल दूरी = $(x + y)$ कि. मी.

कुल समय = $\left(\frac{x}{v_1} + \frac{x}{v_2}\right)$ घंटा

$\therefore$ औसत चाल = $\frac{\text{दूरी}}{\text{समय}} = \frac{x+y}{\frac{x}{v_1}+\frac{y}{v_2}} = \frac{v_1 v_2 (x+y)}{xv_2 + yv_1}$ कि. मी.

17. 4; माना कि वर्ग की एक भुजा x कि. मी. लंबी है।

$\therefore$ कुल दूरी = $4x$ कि. मी.

कुल समय = $\frac{x}{200} + \frac{x}{400} + \frac{x}{600} + \frac{x}{800} = \frac{x}{96}$ घंटा

$\therefore$ औसत चाल = $\frac{4x \times 96}{x} = 384$ कि. मी./घंटा

18. 4; माना कि उनके उम्र $3x$, $5x$ एवं $7x$ हैं।

$\therefore$ कुल उम्र = $3x + 5x + 7x = 3 \times 15$

या, $15x = 45 \Rightarrow x = 3$

$\therefore$ सबसे बड़े की उम्र = $7x = 7 \times 3 = 21$ वर्ष

19. माना कि प्रारंभिक जनसंख्या 100 है।

पहले वर्ष के बाद जनसंख्या = $100 \times 1.20 = 120$

दूसरे वर्ष के बाद जनसंख्या = $120 \times 1.25 = 150$

तीसरे वर्ष के बाद जनसंख्या = $150 \times 1.44 = 216$

विशुद्ध वृद्धि = $216 - 100 = 116$

तीन वर्षों के दौरान विशुद्ध प्रतिशत वृद्धि = $\frac{116}{100} \times 100 = 116\%$

$\therefore$ विशुद्ध प्रतिशत वृद्धि प्रतिवर्ष = $\frac{116}{3}\% = 38.67\%$

20. 1; शेष पूँजी = $1 - \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{3}\right) = 1 - \frac{3+8}{12} = 1 - \frac{11}{12} = \frac{1}{12}$

कुल आमदनी = $3 \times \frac{1}{4} + 5 \times \frac{2}{3} + 11 \times \frac{1}{12} = \frac{9+40+11}{12} = \frac{60}{12} = 5$

$\therefore$ औसत प्रतिशत आमदनी = 5%

21. 3; माना कि पहली संख्या = x

$\therefore$ दूसरी = $\frac{x}{2}$ एवं तीसरी = $\frac{x}{3}$

yoursmahboob

$\therefore\ x+\frac{x}{2}+\frac{x}{3}=3\times 88$

या, $\frac{11x}{6}=264$

या, $x=\frac{264\times 6}{11}=144$

$\therefore$ पहली - तीसरी $=(144-\frac{1}{3}\times 144)=96$

22. 3; माना कि छठा पदनांक = x

$\therefore$ 7वाँ = (x + 3) एवं 8वाँ = (x + 8)

$\therefore\ 2\times 18.50+3\times 21.2+x+(x+3)+(x+8)=8\times 24.3$

या, $37+63.6+3x+11=194.4$

या, $x=27.6$

23. 4; पति एवं पत्नी की वर्तमान कुल आयु = (2 × 23 + 2 × 5) = 65 वर्ष

पति, पत्नी एवं बच्चे की वर्तमान कुल आयु = 3 × 20 = 60 वर्ष

$\therefore$ बच्चे की वर्तमान आयु = 60 − 56 = 4 वर्ष

24. 3; 5 वर्ष पहले, (A + B + C + D) − (45 × 4) = 180 वर्ष

अब, (A + B + C + D) = (180 + 4 × 5) = 200 वर्ष

अब, (A + B + C + D + E) = (5 × 49) = 245 वर्ष

$\therefore$ अभी E की उम्र = 245 - 200 = 45 वर्ष

25. 2; 5 वर्ष पहले राम एवं श्याम की कुल उम्र = 2 × 20 = 40 वर्ष

$\therefore$ अभी राम एवं श्याम की कुल उम्र = (40 + 5 + 5) = 50 वर्ष

अभी राम,श्याम एवं मोहन की कुल उम्र = 3 × 30 = 90 वर्ष

अभी मोहन की उम्र = (90 - 50) वर्ष = 40 वर्ष

10 वर्ष बाद मोहन की उम्र = 40 + 10 = 50 वर्ष

26. 1; माना कि A, B एवं C की लंबाई क्रमशः x से. मी., x से. मी. एवं (x − 2) से. मी. है।

तो, x + x + (x − 2) = 163 × 40 − 162 × 37

$\therefore$ x = 176 से. मी.

27. 2; माना कि संख्याएँ 2x, x एवं 4x हैं।

औसत $=\frac{2x+x+4x}{3}\Rightarrow\frac{7x}{3}=56$

$\therefore\ x=\frac{3\times 56}{7}=24$

$\therefore$ संख्याएँ क्रम से 48, 24, एवं 96 हैं।

yoursmahboob

28. 3; माना कि संख्याएँ $x, 2x$ एवं $\frac{2}{3}x$ हैं।

$$\text{औसत} = \frac{x+2x+\frac{2}{3}x}{3} \Rightarrow \frac{11}{9}x = 44$$

$$\therefore \quad x = \frac{44\times 9}{11} = 36$$

$\therefore$ संख्याएँ हैं : 36, 72 एवं 24

$\therefore$ सबसे बड़ी संख्या = 72

29. 1; माना कि संख्याएँ x, y एवं z हैं। तो,

$$x+y+z=98, \ \frac{x}{y}=\frac{2}{3} \text{ एवं } \frac{y}{z}=\frac{5}{8}$$

$$\therefore \quad x=\frac{2y}{3} \text{ एवं } z=\frac{8y}{5}$$

$$\therefore \quad \frac{2y}{3}+y+\frac{8y}{5}=98 \text{ या, } \frac{49y}{15}=98 \text{ या, } y=30$$

30. 3; D का भार = (80 × 4 - 84 × 3) कि. ग्रा. = 68 कि. ग्रा.

E का भार = (68 + 3) कि. ग्रा. = 71 कि. ग्रा.

(B + C + D + E) का भार = (79 × 4) = 316 कि. ग्रा.

$\therefore$ (B + C) का भार = [316 − (68 + 71)] कि. ग्रा. = 177 कि. ग्रा.

$\therefore$ A का भार = [(84 × 3) − 177] कि. ग्रा. = 75 कि. ग्रा.

31. 3; 5 वर्ष पहले, A, B, C, एवं D की कुल उम्र = (45 × 4) वर्ष

= 180 वर्ष

A, B, C, D एवं X की कुल वर्तमान उम्र = (49 × 5) वर्ष = 245 वर्ष

A, B, C, एवं D की वर्तमान उम्र = (180 + 5 × 4) वर्ष = 200 वर्ष

$\therefore$ X की वर्तमान उम्र = 45 वर्ष

32. 1; माना कि A, B एवं C की उम्र क्रमशः a, b एवं c वर्ष है।

$\therefore$ $+a+b=2\times 20=40$

$+b+c=2\times 19=38$

$+c+a=2\times 21=42$

$\therefore$ $a+b+c=2\times 60$ [उपर्युक्त तीनों को जोड़ने पर]

$-b+c = 38$

$\therefore$ $a = 22$

$-a+b = -40$

$\therefore$ $b = -18$

एवं $c = 20$

yoursmahboob

∴ A की उम्र = 22 वर्ष

B की उम्र = 18 वर्ष

C की उम्र = 20 वर्ष

33. चूँकि सोमवार, मंगलवार एवं बुधवार के ताप का योग = 75 × 3 = 225°

मंगलवार, बुधवार एवं गुरुवार के ताप का योग = 77 × 3 = 231°

तथा गुरुवार का ताप = 76°

∴ मंगलवार एवं बुधवार के ताप का योग = 231 − 76 = 155°

∴ सोमवार का ताप = 225 − 155 = 70°

34. चूँकि 10 संख्याओं का योग = 15.34 × 10 = 153.40

तथा पहले 5 संख्याओं का योग = 14.35 × 5 = 71.75

∴ अंतिम 5 संख्याओं का योग = 153.40 − 71.75 = 81.65

∴ अंतिम 6 संख्याओं का योग = 15.43 × 6 = 92.58

∴ पहले 4 संख्याओं का योग = 153.400 − 92.58 = 60.82

∴ पाँचवीं संख्या को छोड़कर शेष 9 संख्याओं का योग = 81.65 + 60.82 = 142.47

∴ शेष 9 संख्याओं का औसत = $\frac{142.47}{9} = 15.83$

35. चूँकि नए छात्रों के आने से औसत व्यय 1 रु. कम हो जाता है

∴ 50 छात्रों के पहले व्यय में बचत = 50 रु.

किन्तु व्यय में बढ़ोतरी = 70 रु.

∴ नए छात्रों का व्यय = 70 − 50 = 120 रु.

नए छात्रों का औसत व्यय = $\frac{120}{10}$ = 12 रु.

∴ पुराने छात्रों का औसत व्यय = 12 + 1 = 13 रु.

∴ पुराने छात्रों का व्यय = 50 × 13 = 650 रु.

36. माना कि पहले के 6 खिलाड़ियों के रनों का औसत x था।

∴ उनके कुल रनों की संख्या = 6x

∴ 7 खिलाड़ियों के रनों की संख्या = 6x + 112

तथा उनका औसत = $\frac{6x+112}{7}$

∴ $\frac{6x+112}{7} = x + 10$

या, $6x + 112 = 7x + 70$

या, $7x - 6x = 112 - 70$

या, $x = 42$

∴ पहले खिलाड़ियों के रनों का औसत = 42 रन

yoursmahboob

∴ तथा उनके रनों की संख्या = $6x = 6 \times 42 = 252$ रन

अथवा,

सातवें खिलाड़ी के आने से पहले 6 खिलाड़ियों के रनों में,

10 रन का औसत बढ़ जाने से, वृद्धि = $6 \times 10 = 60$ रन

∴ सातवें खिलाड़ी के आने से औसत रन = $112 - 60 = 52$ रन

∴ पहले के खिलाड़ियों का औसत = $52 - 10 = 42$ रन

तथा रनों की संख्या = $42 \times 6 = 252$ रन

37. माना कि नए लड़के का भार x कि. ग्रा. है।

∴ भार में वृद्धि = $x - 20$ कि. ग्रा.

∴ भार में औसत वृद्धि = $\frac{x-20}{6} = 5$

या, $x - 20 = 30$

∴ $x = 20 + 30 = 50$ कि. ग्रा.

अथवा,

5 किलोग्राम औसत भार बढ़ जाने से, 6 लड़कों में

कुल भार की वृद्धि = $6 \times 5 = 30$ कि. ग्रा.

नए लड़के का भार = $30 + 20 = 50$ कि. ग्रा.

38. A, B, C, D के भार का योग = $67 \times 4 = 268$ कि. ग्रा.

चूँकि A, B, C, D, का औसत भार = $67 - 2 = 65$ कि. ग्रा.

∴ A, B, C, D, E के भार का योग = $65 \times 5 = 325$ कि. ग्रा.

∴ E का भार $325 - 268 = 57$ कि. ग्रा.

∴ F का भार = $57 + 4 = 61$ कि. ग्रा.

अब, F, B, C, D, E का औसत भार = 64 कि. ग्रा.

∴ F, B, C, D, E के भार का योग = $64 \times 5 = 320$ कि. ग्रा.

∴ B, C, D के भार का योग = $320 - 57 - 61 = 202$ कि. ग्रा.

∴ A का भार $268 - 202 = 66$ कि. ग्रा.

39. शेष विद्यार्थी = $1 - \left[\frac{2}{5} + \frac{1}{5} + \frac{3}{10}\right] = 1 - \frac{9}{10} = \frac{1}{10}$

कुल प्राप्तांक = पूर्णांक का $\left[\frac{2}{5} \times \frac{3}{8} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{8} + \frac{3}{10} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{10} \times \frac{5}{8}\right]$

= पूर्णांक का $\left[\frac{3}{20} + \frac{1}{40} + \frac{3}{40} + \frac{5}{80}\right]$

∴ पूर्णांक का $\frac{25}{80}$ = पूर्णांक का $\frac{5}{16}$

yoursmahboob

$\therefore$ औसत प्राप्तांक $= \dfrac{\text{कुल प्राप्तांक}}{\text{कुल छात्र}} = \dfrac{\text{पूर्णांक का } \frac{5}{16}}{1}$. पूर्णांक का $\dfrac{5}{16}$

चूँकि पूर्णांक का $\dfrac{5}{16} = 125$

$\therefore$ पूर्णांक $= \dfrac{125 \times 16}{5} = 25 \times 16 = 400$

yoursmahboob

उम्र पर आधारित प्रश्न

(Problem Based on Ages)

उम्र पर आधारित प्रश्न आज की परीक्षाओं के अनिवार्य अंग बन गए हैं। ऐसे प्रश्नों को हल करने के लिए एकरेखीय समीकरणों का ज्ञान जरूरी है। इस विधि के उपयोग के लिए कुछ आधारभूत संकल्पनाओं की जानकारी के साथ-साथ अभ्यास भी बहुत जरूरी है। कभी कभी सवाल में दिए गए विकल्पों को परखकर भी उत्तर का पता लगाया जा सकता है। लेकिन इस जाँच-और भूल (trial-and-error) विधि में समय बर्बाद होने का भय बना ही रहता है। इस अध्याय में कुछ ऐसे विधियों की चर्चा की गई है, जो न केवल आसान हैं बल्कि इनसे समय की बचत भी होती है। यद्यपि एक ही अध्याय में सभी तरह के सवालों को समेट पाना तो मुश्किल है, पर हमारा प्रयास आपकी कठिनाइयों को कम-से कम करने का है।

निम्नलिखित सवालों पर एक नजर डालिए

उदा. 1: 3 वर्ष पूर्व पिता की उम्र पुत्र के उम्र की 7 गुनी थी। इस समय पिता की उम्र पुत्र के उम्र की 5 गुनी है। पिता एवं पुत्र की वर्तमान आयु क्या है ?

उदा. 2: इस समय पिता की उम्र पुत्र के उम्र की 5 गुनी है। तीन वर्षों बाद पिता की उम्र पुत्र के उम्र की 4 गुनी होगी। पिता एवं पुत्र की वर्तमान आयु बताएँ।

उदा. 3: तीन वर्ष पूर्व पिता के उम्र पुत्र के उम्र की सात गुनी थी। तीन वर्षों बाद पिता की उम्र पुत्र के उम्र की चार गुनी होगी। इस समय पिता एवं पुत्र की आयु क्या है?

परंपरागत विधि से:

हल: 1. मान लिया कि पुत्र की वर्तमान आयु = x वर्ष

$\therefore$ पिता की वर्तमान आयु = $5x$ वर्ष

3 वर्ष पूर्व,

$7(x-3) = 5x - 3$

या, $7x - 21 = 5x - 3$

या, $2x = 18$

$\therefore x = 9$ वर्ष

$\therefore$ पुत्र की आयु = 9 वर्ष

एवं पिता की आयु = 45 वर्ष

हल: 2. मान लिया कि पुत्र की वर्तमान आयु = x वर्ष

$\therefore$ पिता की वर्तमान आयु = $5x$ वर्ष

तीन वर्ष बाद,

$4(x+3) = 5x + 3$

या, $4x - 12 = 5x + 3$

$\therefore x = 9$ वर्ष

$\therefore$ पुत्र की उम्र = 9 वर्ष

yoursmahboob

एवं पिता की उम्र – 45 वर्ष

हल: 3. मान लिया कि पुत्र की वर्तमान आयु – x वर्ष

एवं पिता की वर्तमान आयु – y वर्ष

3 वर्ष पूर्व, $7(x-3)=y-3$ या, $7x-y=18$ ——(1)

3 वर्ष बाद, $4(x+3)=y+3$ या, $4x-y=9$ ——(2)

(1) एवं (2) को सरल करने पर,

$x=9$ वर्ष एवं $y=45$ वर्ष

द्रुत विधि (Quicker Method):

हल: 1. पुत्र की आयु $=\dfrac{3\times(7-1)}{7-5}=9$ वर्ष

एवं पिता की आयु $=9\times5=45$ वर्ष

निश्चय ही आप उपर्युक्त विधि को देखकर भ्रम में पड़ गए होंगे, लेकिन इस विधि को न केवल समझना आसान है, बल्कि स्मरण रखना भी उतना ही आसान है। प्रश्न के निम्नलिखित स्वरूप को देखिए:

प्र. *t_1 वर्ष पूर्व पिता की उम्र पुत्र के उम्र की x गुनी थी। यदि इस समय पिता की उम्र पुत्र के उम्र की y गुनी हो तो पिता एवं पुत्र की वर्तमान आयु क्या है?*

$$\boxed{\text{पुत्र की आयु}=\frac{t_1(x-1)}{x-y}}$$

हल : 2. पुत्र की आयु $=\dfrac{(4-1)\times3}{5-4}=9$ वर्ष

एवं पिता की उम्र – $9\times5=45$ वर्ष

इसे और अधिक स्पष्ट करने के लिए निम्नलिखित स्वरूप को देखें:

प्र. *पिता की वर्तमान आयु पुत्र के आयु की y गुनी है। t_2 वर्ष बाद पिता की उम्र पुत्र के उम्र की z गुनी हो जाएगी। पिता एवं पुत्र की वर्तमान आयु बताएँ।*

$$\boxed{\text{पुत्र की आयु}=\frac{(z-1)t_2}{y-z}}$$

हल : 3. पुत्र की आयु $=\dfrac{3(4-1)+3(7-1)}{7-4}=\dfrac{9+18}{3}=9$ वर्ष

इस सूत्र को स्पष्ट करने के लिए प्रश्न का निम्नलिखित प्रारूप देखें:

प्र. *t_1 वर्ष पूर्व पिता की उम्र पुत्र के उम्र की x गुनी थी। t_2 वर्ष बाद पिता की उम्र पुत्र के उम्र की z गुनी हो जाएगी। पिता एवं पुत्र की वर्तमान आयु क्या है?*

$$\boxed{\text{पुत्र की आयु}=\frac{t_2(z-1)+t_1(x-1)}{x-z}}$$

yoursmahboob

सारणी रूप में उपर्युक्त तीनों प्रारूपों को निम्नलिखित तरीके से सजाया जा सकता है:

	t_1 वर्षों पूर्व	वर्तमान में	t_2 वर्षों बाद
पिता की उम्र पुत्र के उम्र की तुलना में	x गुनी	y गुनी	z गुनी

पुत्र की आयु $= \dfrac{t_1(x-1)}{x-y}$ पुत्र की आयु $= \dfrac{(z-1)t_2}{y-z}$

पुत्र की आयु $= \dfrac{t_2(z-1)+t_1(x-1)}{x-z}$

उदा. 4: एक व्यक्ति की उम्र उसके पुत्र के उम्र की 4 गुनी है। 5 वर्ष पूर्व वह अपने पुत्र से आयु में 9 गुना बड़ा था। इस समय उस व्यक्ति की आयु क्या है?

हल: सारणी देखकर आप तय कर सकते हैं कि सूत्र संख्या – 1 का ही इस्तेमाल किया जाएगा।

$$\text{पुत्र की आयु} = \frac{5(9-1)}{(9-4)} = 8 \text{ वर्ष}$$

$\therefore$ पिता की आयु $= 4 \times 8 = 32$ वर्ष

नोट: चूँकि यहाँ 'पूर्व' एवं 'वर्तमान' उम्रों के बीच का संबंध दिया गया है। इसलिए सारणी के उन्हीं स्तंभों से सम्बद्ध सूत्र का इस्तेमाल किया गया। निश्चय ही यह संबंध सूत्र–1 से अभिव्यक्त होता है।

उदा. 5: 5 वर्ष बाद पिता की उम्र पुत्र के उम्र की तीन गुनी हो जाएगी, जबकि 5 वर्ष पूर्व वह अपने पुत्र से 7 गुना बड़ा था। पिता एवं पुत्र की वर्तमान उम्र क्या है?

हल: यहाँ सूत्र-3 का इस्तेमाल किया जाएगा:

$$\text{पुत्र की आयु} = \frac{5(7-1)+5(3-1)}{7-3} = 10 \text{ वर्ष}$$

पहला वाक्य के आधार पर निर्मित द्वितीय समीकरण से, यदि पिता की आयु F हो तो, $F+5=3(10+5)$

$\therefore F = 40$ वर्ष

उदा. 6: 10 वर्ष पूर्व सीता की माँ सीता से 4 गुनी बड़ी थी। 10 वर्ष बाद माँ अपने पुत्री से दुगुनी बड़ी होगी। सीता की वर्तमान आयु क्या है?

हल: इस स्थिति में भी सूत्र सं.-3 का ही इस्तेमाल किया जाएगा।

$$\text{पुत्री की आयु} = \frac{10(4-1)+10(2-1)}{4-2} = 20 \text{ वर्ष}$$

yourmahboob

उदा. 7: एक वर्ष पहले समीर एवं अशोक की आयु का अनुपात 4 : 3 था। एक वर्ष बाद उनकी आयु का अनुपात 5 : 4 होगा। इस समय उन दोनों की आयु का योगफल (वर्ष में) क्या है?

हल : एक साल पहले समीर की उम्र अशोक के उम्र की $\frac{4}{3}$ थी। एक साल बाद समीर की उम्र अशोक के उम्र की $\frac{5}{4}$ होगी।

$\therefore$ सूत्र-3 से, अशोक की उम्र, $A = \dfrac{1\left(\frac{4}{3}\cdot 1\right)+1\left(\frac{5}{4}-1\right)}{\frac{4}{3}-\frac{5}{4}} - \dfrac{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}{\frac{1}{12}} = 7$ वर्ष

अब, पहला संबंध से,

$\frac{S-1}{7-1} = \frac{4}{3}$

$\therefore S = 8+1 = 9$ वर्ष

कुल आयु $= A + S = 9 + 7 = 16$ वर्ष

यहाँ A – अशोक की वर्तमान आयु, एवं

S – समीर की वर्तमान आयु

उदा. 8: 10 वर्ष पूर्व A की उम्र B के उम्र की आधी थी। यदि उनके वर्तमान आयु का अनुपात 3 : 4 हो, तो उनकी वर्तमान आयु का योगफल बताएँ।

हल : 10 वर्ष पूर्व A की उम्र B के उम्र की आधी थी। इस समय A की उम्र B के उम्र की $\frac{3}{4}$ है।

$\therefore$ सूत्र - 1 से, B की आयु $= \dfrac{10\left(\frac{1}{2}-1\right)}{\frac{1}{2}-\frac{3}{4}} = 20$ वर्ष

$\therefore$ A की उम्र $= 20$ का $\frac{3}{4} = 15$ वर्ष

उदा. 9: माँ और बेटी की आयु का योगफल 50 वर्ष है। 5 वर्ष पूर्व माँ की उम्र बेटी के उम्र की 7 गुनी थी। माँ एवं बेटी की वर्तमान आयु क्या है?

हल: मान लिया कि बेटी की उम्र $= x$ वर्ष

$\therefore$ माँ की आयु $= (50 - x)$ वर्ष

5 वर्ष पूर्व $7(x - 5) = 50 - x - 5$

yoursmahboob

या $8x = 50 - 5 + 35 - 80$

$\therefore x = 10$

$\therefore$ पुत्री की आयु = 10 वर्ष एवं

माँ की आयु = 40 वर्ष

द्रुत विधि (Quicker Method):

$$\text{बेटी की आयु} = \frac{\text{कुल आयु} + (\text{पूर्व के वर्षों की संख्या})\left[(\text{बार (times)}) - 1\right]}{(\text{बार}) + 1}$$

$$= \frac{50 + (7-1)}{7+1} = 10 \text{ वर्ष}$$

$\therefore$ पुत्री की आयु = 10 वर्ष

माँ की आयु = 40 वर्ष

उदा. 10: पिता एवं पुत्र के आयु का योगफल 56 वर्ष है। 4 वर्ष बाद, पिता की आयु पुत्र के आयु की तीन गुनी होगी। पुत्र की आयु क्या है ?

हल: मान लिया कि पुत्र की आयु x वर्ष है।

पिता की उम्र = $(56 - x)$ वर्ष

4 वर्ष बाद, $3(x + 4) = 56 - x + 4$

या, $4x = 56 + 4 - 12 = 48$

$\therefore x = 12$ वर्ष

इस प्रकार पुत्र की आयु = 12 वर्ष

द्रुत विधि (Quicker Method):

$$\text{पुत्र की आयु} = \frac{\text{कुल आयु} + (\text{बाद के वर्षों की संख्या})\left[(\text{बार (times)}) - 1\right]}{(\text{बार}) + 1}$$

$$= \frac{56 - 4(3-1)}{3+1} = \frac{48}{4} = 12 \text{ वर्ष}$$

नोट: क्या आपको सूत्र लिखे से संपन्न उपर्युक्त दोनों विधियों के बीच कोई समरूपता दिखी ? केवल उनके अंशों के चिह्न में फर्क है। जब प्रश्न में 'पूर्व' की चर्चा हो तो चिह्न धनात्मक होता है और जब 'बाद' की चर्चा हो तो चिह्न ऋणात्मक होता है।

उदा. 11: पिता एवं पुत्र के वर्तमान आयु का योगफल 56 वर्ष है। 4 वर्ष बाद पुत्र की आयु पिता के आयु की $\frac{1}{3}$ होगी। पिता एवं पुत्र के वर्तमान आयु क्या है?

हल: पुत्र की आयु = पिता की आयु का $\frac{1}{3}$

$\Rightarrow$ पिता की उम्र पुत्र के उम्र की तीन गुनी है।

अब उदा. 10 में प्रयुक्त सूत्र का इस्तेमाल करें। (स्वयं हल करें)

yourshaboob

महत्वपूर्ण नोट: उपर्युक्त प्रश्न को 'गुणा (times)' के स्वरूप में परिवर्तन लाए बिना भी हल किया जा सकता है। प्रश्न के मौलिक रूप में, पिता की उम्र निम्नलिखित तरीके से निकाली जा सकती है :

$$\text{पिता की उम्र} = \frac{56-4\left(\frac{1}{3}-1\right)}{\left(\frac{1}{3}-1\right)} = \frac{56-\frac{8}{3}}{\frac{4}{3}} = \frac{176}{4}$$

$= 44$ वर्ष

इसी प्रकार पुत्र की उम्र का भी पता लगाया जा सकता है। इससे जाहिर है कि उदाहरण 1 से लेकर 11 तक में दूसरी आयु को अनुपात उलटकर (inverting the ratio) आसानी से पाया जा सकता है। उदाहरणार्थ, 4 गुना की जगह $\frac{1}{4}$, $\frac{4}{3}$ की जगह $\frac{3}{4}$ आदि का इस्तेमाल किया जा सकता है। उपर्युक्त सभी उदाहरणों के अनुपात को उलटकर हल करने की कोशिश करें।

उदा. 12: पिता एवं पुत्र की आयु का अनुपात 4 : 1 है एवं उनके उम्र का गुणनफल 196 है। 5 वर्ष बाद उनकी आयु का अनुपात क्या होगा ?

हल: मान लिया कि समानुपातिक अनुपात x है,

प्रश्नानुसार, $4x \times x = 196$

या, $4x^2 = 196$

या, $x = 7$

इस प्रकार, पिता की आयु = 28 वर्ष

एवं पुत्र की आयु = 7 वर्ष

5 वर्ष बाद पिता की उम्र = 33 वर्ष

एवं पुत्र की उम्र = 12 वर्ष

$\therefore$ अनुपात = 33 : 12 = 11 : 4

उदा. 13: रीता एवं उनके माँ की उम्र का अनुपात 3 : 11 है। उनकी आयु का अंतर 24 वर्ष है। 3 वर्ष बाद उनकी आयु का अनुपात क्या होगा ?

हल: अनुपात का अंतर = 11 − 3 = 8

अब, 8 = 24

$\therefore 1 = 3$

अर्थात् अनुपात में 1 का मान 3 वर्ष के समतुल्य है

इस प्रकार रीता की उम्र = 3 × 3 = 9 वर्ष

माँ की उम्र = 11 × 3 = 33 वर्ष

$\therefore$ तीन वर्ष बाद आयु का अनुपात = 12 : 36 = 1 : 3

yoursmahboob

उदा. 14: वर्तमान में पिता एवं पुत्र की आयु का अनुपात 6 : 1 है। 5 वर्ष के बाद यह अनुपात बदलकर 7 : 2 हो जाएगा। पुत्र की वर्तमान आयु क्या है ?

हल: पिता : पुत्र

वर्तमान आयु – 6 : 1

5 वर्षों बाद – 7 : 2

$\therefore$ पुत्र की आयु $= 1 \times \dfrac{5(7-2)}{(6\times2-7\times1)} = 5$ वर्ष

पिता की उम्र $= 6 \times \dfrac{5(7-2)}{(6\times2-7\times1)} = 30$ वर्ष

इससे कौन-सा सूत्र प्राप्त हुआ ?

पिता : पुत्र

वर्तमान आयु – $x : y$

T वर्ष बाद – $a : b$

तो पुत्र की आयु $= y \times \dfrac{T(a-b)}{\text{वज्र-गुणनफल (cross-product) का अंतर}}$

एवं पिता की आयु $= x \times \dfrac{T(a-b)}{\text{वज्र-गुणनफल (cross-product) का अंतर}}$

उदा. 15: पिता एवं पुत्र के वर्तमान आयु का अनुपात 3 : 1 है। 4 वर्ष पूर्व यह अनुपात 4 : 1 था। पिता एवं पुत्र की वर्तमान आयु बताएँ।

हल : पिता : पुत्र

वर्तमान आयु – 3 : 1

4 वर्ष पूर्व – 4 : 1

पुत्र की आयु $= 1 \times \dfrac{4(4-1)}{4\times1-3\times1} = 12$ वर्ष

पिता की आयु $= 3 \times \dfrac{4(4-1)}{4\times1-3\times1} = 36$ वर्ष

इस प्रकार निम्नलिखित सूत्र प्राप्त होता है:

पिता : पुत्र

वर्तमान आयु – $x : y$

T वर्ष बाद – $a : b$

पुत्र की आयु $= y \times \dfrac{T(a-b)}{\text{वज्र-गुणनफल (cross-product) का अंतर}}$

एवं पिता की आयु $= x \times \dfrac{T(a-b)}{\text{वज्र-गुणनफल (cross-product) का अंतर}}$

yourmahboob

नोट: 1. वज्र-गुणनफल (cross-product) का अंतर निकालने के क्रम में हमेशा धनात्मक चिह्न का ही इस्तेमाल करें।

2. उपर्युक्त दोनों सूत्र एक जैसे मालूम पड़ते हैं। अंतर केवल हरों में दृष्टिगोचर होता है। पर 'वज्र गुणनफलों का अंतर' उपबन्ध का इस्तेमाल सुविधा के लिए किया गया है। इसलिए केवल एक सूत्र के सहारे आप दोनों प्रश्नों को हल कर सकते हैं.

3. उपर्युक्त दोनों प्रश्न (प्रश्न सं. 14 एवं 15), दो आरंभिक प्रश्नों (प्रश्न सं. 1 एवं 2) के समान है। क्या आपने यह बात समझ ली ? यदि आप 'अनुपात' को 'आर (times)' में बदल दें, तो भी आप उसी नतीजे पर पहुँचेंगे। क्रम आपके पास दो सरल विधियाँ हैं। आप जिस किसी विधि को याद रख सकें, उसी का इस्तेमाल करें।

इस प्रकार आप प्रश्न 14 को प्रश्न 2 की तरह हल कर सकते हैं साथ ही, प्रश्न सं. 2 को प्रश्न सं. 14 की तरह हल किया जा सकता है। प्रश्न 15 को प्रश्न 1 की तरह एवं प्रश्न सं. 1 को प्रश्न सं. 15 की तरह हल किया जा सकता है।

4. हमारा सुझाव है कि आप दोनों विधियों का अध्ययन करें एवं जो अच्छा जँचे, उसका अभ्यास करें।

उदा. 16: एक व्यक्ति की वर्तमान उम्र उसके 10 वर्ष पूर्व की उम्र का 125% है, एवं 10 वर्ष बाद की उम्र का $83\frac{1}{3}\%$ है। उसकी वर्तमान उम्र क्या है?

हल: ***विस्तार विधि* (Detail Method):**

माना कि वर्तमान उम्र = x वर्ष

तो, $(x-10)$ का $125\% = x$; एवं $(x+10)$ का $83\frac{1}{3}\% = x$

$\therefore$ $(x-10)$ का $125\% = (x+10)$ का $83\frac{1}{3}\%$

या, $\frac{5}{4}(x-10) = \frac{5}{6}(x+10)$

या, $\frac{5}{4}x - \frac{5}{6}x = \frac{50}{6} + \frac{50}{4}$

या, $\frac{5x}{12} = \frac{250}{12}$ $\therefore$ $x = 50$ वर्ष

***सूत्र विधि* (Direct Method):**

उपर्युक्त हल की मदद से हम एक सूत्र प्राप्त कर सकते हैं जो कि निम्नलिखित है:

$$\text{वर्तमान उम्र} = \frac{125 \times \text{पूर्व के वर्षों की संख्या} + 83\frac{1}{3} \times \text{बाद के वर्षों की संख्या}}{125 - 83\frac{1}{3}}$$

yoursmahboob

$$= \frac{125\times10+83\frac{1}{3}\times10}{125-83\frac{1}{3}} = \frac{10\left(\frac{375+250}{3}\right)}{\frac{375-250}{3}} = \frac{10\times625}{125} = 50 \text{ वर्ष}$$

अभ्यास प्रश्न

1. गीता एवं उसकी माँ के उम्र का अनुपात 1 : 5 है। 7 वर्ष बाद यह अनुपात बदलकर 3 : 8 हो जाएगा। गीता एवं उसकी माँ की वर्तमान आयु क्या है ?

(उत्तर : 5 वर्ष, 25 वर्ष)

2. A एवं B की अनुपात 3 : 11 है। तीन वर्षों बाद अनुपात बदलकर 1 : 3 हो जाएगा। A एवं B की वर्तमान आयु क्या है ?

(उत्तर : 9 वर्ष, 33 वर्ष)

3. मोहन एवं मीरा की आयु का अनुपात 3 : 4 है; चार वर्ष पूर्व यह अनुपात 5 : 7 था। मोहन एवं मीरा की वर्तमान आयु क्या है ?

(उत्तर : 24 वर्ष, 32 वर्ष)

yoursmahboob

लाभ एवं हानि

(Profit and Loss)

इस अध्याय में, 'भिन्न के नियम' (Rule of Fraction) का प्रयोग बार-बार किया जाएगा। इस नियम को अच्छी तरह समझ लें, क्योंकि इसके बिना किसी भी प्रश्न को हल करना मुश्किल होगा।

भिन्न का नियम (The Rule of Fraction)

यदि अभीष्ट मान (required value) प्रदत्त मान से बड़ा है तो प्रदत्त मान में ऐसे भिन्न से गुणा करना होगा जो 1 से बड़ा हो। यदि अभीष्ट मान प्रदत्त मान से कम हो तो प्रदत्त मान में ऐसे भिन्न से गुणा करना होगा, जिसका मान 1 से कम हो।

(1) यदि x% लाभ हो तो गणना में प्रयुक्त राशियाँ 100 एवं $(100 + x)$ होंगी।

(2) यदि y% हानि हो तो गणना में प्रयुक्त राशियाँ 100 एवं $(100 - y)$ होंगी।

(3) यदि अभीष्ट मान, प्रदत्त मान से अधिक हो तो गुणक भिन्न $\frac{100+x}{100}$ या $\frac{100}{100-y}$ होगा (क्योंकि दोनों का मान 1 से अधिक है।)

(4) यदि अभीष्ट मान, प्रदत्त मान से कम हो तो गुणक भिन्न $\frac{100}{100+x}$ या $\frac{100-y}{100}$ होगा (दोनों का मान 1 से कम है)।

लाभ = *विक्रय मूल्य* (Selling Price या SP) – *क्रय मूल्य* (Cost Price या CP)

हानि = *क्रय मूल्य* (Cost Price) – *विक्रय मूल्य* (Selling Price)

प्रतिशत लाभ या हानि निकालना

लाभ या हानि की गणना क्रय मूल्य के संदर्भ में की जाती है।

$$\text{प्रतिशत लाभ या हानि} = \frac{\text{हानि या लाभ}}{\text{क्रय मूल्य}} \times 100$$

उदा. 1: एक व्यक्ति 25 रु. में खिलौने खरीदकर 30 रु. में बेच देता है। उसे कितना प्रतिशत लाभ हुआ ?

हल : 25 रु. पर 5 रु. का मुनाफा

$\therefore$ 100 रु. पर $\frac{5}{25} \times 100 = 20$ रु. का मुनाफा

$\therefore$ प्रतिशत लाभ = 20 %

सूत्र विधि: $\% \text{ लाभ} = \frac{\text{लाभ}}{\text{क्रय मूल्य}} \times 100 = \frac{5}{25} \times 100 = 20\%$

yourmahboob

उदा. 2: एक बच्चा 25 रु. में एक कलम खरीदकर उसे 20 रु. में बेच देता है। उसे कितने प्रतिशत की हानि हुई ?

हल : 25 रु. पर 5 रु. की हानि

$\therefore$ 100 रु. पर $\frac{5}{25}\times 100$ रु. की हानि = 20 रु.की हानि

$\therefore$ प्रतिशत हानि = 20 %

सूत्र विधि: % हानि $= \frac{\text{हानि}}{\text{क्रय मूल्य}}\times 100 = \frac{5}{25}\times 100 = 20\%$

उदा. 3: कोई व्यक्ति 10 रु. में 11 संतरा खरीदकर 11 रु. में 10 संतरा बेचता है। उसे कितना लाभ या हानि होता है ?

हल : मान लिया कि वह व्यक्ति 11 × 10 = 110 संतरे खरीदता है।

110 संतरे का क्रय मूल्य $= \frac{10}{11}\times 110 = 100$ रु.

110 संतरे का विक्रय मूल्य $= \frac{11}{10}\times 110 = 121$ रु.

$\therefore$ लाभ = (121 − 100 =) 21 रु.

$\therefore$ % लाभ $= \frac{\text{लाभ}}{\text{क्रय मूल्य}}\times 100 = \frac{21}{100}\times 100 = 21\%$

तुल विधि(Quicker Method) : प्रश्न में प्रयुक्त वक्तव्य को निम्नलिखित रूप में समझकर लिखें:

क्रय करता है : 11 संतरा 10 रु. में

बेचता है : 10 संतरा 11 रु. में

$\therefore$ प्रतिशत लाभ या हानि $= \frac{11\times 11 - 10\times 10}{10\times 10}\times 100 = 21\%$

$\because$ चिह्न धनात्मक है, इसलिए 21% लाभ हुआ।

नोट: संरचनात्मक समायोजन (structural adjustment) का उपर्युक्त प्रारूप स्मरण रखना चाहिए। पहली पंक्ति में क्रय की चर्चा की गई है। एवं दूसरी पंक्ति में विक्रय की चर्चा की गई है। एक बार आप केवल इस प्रारूप से परिचित भर हो लीजिए, फिर आप केवल आँकड़ों से ही काम चला लेंगे। शब्दों को लिखने की कोई जरूरत भी शायद हो नहीं।

उदा. 4: एक व्यक्ति 9 रु. में 8 कलम खरीदकर 8 रु. में 9 कलम बेच देता है। उसे कितने प्रतिशत की लाभ या हानि हुई ?

हल: मान लिया कि वह (8×9 =) 72 कलम खरीदता है।

72 कलम का क्रय मूल्य $= \frac{9}{8}\times 72 = 81$ रु.

yoursmahboob

72 कलम का विक्रय मूल्य $= \frac{8}{9} \times 72 = 64$ रु.

हानि = (81 − 64 =) 17 रु.

% हानि $= \frac{\text{हानि}}{\text{क्रय मूल्य}} \times 100 = \frac{17}{81} \times 100 = 20.98\%$

द्रुत विधि (Quicker Method):

खरीदता है 8 कलम 9 रु. में

बेचता है 9 कलम 8 रु. में

$\therefore$ % लाभ या हानि $= \frac{8 \times 8 - 9 \times 9}{9 \times 9} \times 100$

$= \frac{-1700}{81} = -20.98\%$

$\therefore$ चिह्न ऋणात्मक है, इसलिए 20.98% की हानि हुई।

उदा. 5: कोई बच्चा 16 रु. में 9 संतरा खरीदकर 20 रु. में 11 के भाव से बेचता है। उसे कितने प्रतिशत का लाभ या हानि हुई ?

हल: मान लिया कि लड़का (11 × 9) = 99 संतरे खरीदता है।

$\therefore$ 99 संतरे का क्रय मूल्य $= \frac{16}{9} \times 99 = 176$ रु.

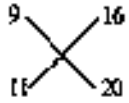
99 संतरे का विक्रय मूल्य $= \frac{20}{11} \times 99 = 180$ रु.

$\therefore$ 176 रु. पर (180 − 176 =) 4 रु. का लाभ

$\therefore$ 100 रु. पर $\frac{4}{176} \times 100 = 2\frac{3}{11}$ रु.

$\therefore$ प्रतिशत लाभ $= = 2\frac{3}{11}\%$

द्रुत विधि (Quicker Method):



% लाभ या हानि $= \frac{9 \times 20 - 16 \times 11}{16 \times 11} \times 100 = 2\frac{3}{11}\%$

$\therefore$ चिह्न धनात्मक है, इसलिए $2\frac{3}{11}\%$ का लाभ हुआ।

yoursmartbooks

बेईमान व्यापारी जब खोटे बटखरे का इस्तेमाल करता हो

उदा. 6: कोई बेईमान व्यापारी समान को क्रय मूल्य पर बेचने का दावा करता है, लेकिन वह 1 किलोग्राम के बटखरे की जगह 960 ग्राम के बटखरे का इस्तेमाल करता है। उसे कितना प्रतिशत मुनाफा होता है ?

हल: मान लिया कि वह व्यापारी 1 रु. प्रति किलोग्राम की दर से सामान खरीदता है। उसे 1 रु. में बेच भी देता है। पर 1 रु. में बेचा गया समान वजन में 960 ग्राम ही है।

इस प्रकार 0.96 रु. का सामान 1 रु. में बेचता है।

0.96 रु. में (1.00 – 0.96) रु. = 0.04 रु. का लाभ

$\therefore$ 100 रु. में $\frac{0.04}{0.96} \times 100 = 4\frac{1}{6}$ रु.

$\therefore$ प्रतिशत लाभ $= 4\frac{1}{6}\%$

सूत्र विधि (Direct Formula) :

$$\% \text{ लाभ} = \frac{\text{त्रुटि}}{\text{सही नाप} - \text{त्रुटि}} \times 100$$

$$\text{या } \% \text{ लाभ} = \frac{\text{सही वजन} - \text{खोटा वजन}}{\text{खोटा वजन}} \times 100$$

$$= \frac{40}{1000 - 40} \times 100 = 4\frac{1}{6}\%$$

उदा. 7: कोई बेईमान व्यापारी वस्तु को क्रय मूल्य पर बेचने का दावा करता है, पर वह एक किलो ग्राम के बटखरे की जगह 950 ग्राम के बटखरे का इस्तेमाल करता है। उसे कितना प्रतिशत मुनाफा हुआ ?

हल : **सूत्र विधि:** $\% \text{ लाभ} = \frac{\text{त्रुटि}}{\text{सही नाप} - \text{त्रुटि}} \times 100 = \frac{50}{950} \times 100 = 5.26\%$

उदा. 8: एक दुकानदार 10% लाभ लेकर चावल बेचता है एवं वह जिस बटखरे का प्रयोग करता है उसका भार 20% कम है। कुल प्रतिशत लाभ ज्ञात करें।

हल : **विस्तार विधि (Detail Method):**

मान लिया कि वह x रु. प्रति कि. ग्रा. के हिसाब से खरीदता है।

तो वह $\frac{110x}{100}$ रु. प्रति $\frac{80}{100}$ कि. ग्रा. के हिसाब से बेचता है।

या, $\left(\frac{110x}{100} \times \frac{100}{80}\right)$ रु. प्रति कि. ग्रा.

yoursmahboob

अब, % लाभ $= \dfrac{\frac{11x}{8} - x}{x} \times 100 = \dfrac{300}{8} = 37.5\%$

द्रुत विधि (Quicker Method) :

कुल प्रतिशत लाभ $= \dfrac{\text{प्रतिशत लाभ} + \text{पार में प्रतिशत कमी}}{100 - \text{पार में प्रतिशत कमी}}$

$= \dfrac{10+20}{100-20} \times 100 = \dfrac{30 \times 100}{80} = 37.5\%$

उदा. 9. एक बेईमान दुकानदार वस्तु को क्रयमूल्य पर $6\frac{1}{4}$% हानि सहकर बेचता है। लेकिन वह 16 ग्राम की जगह 14 ग्राम का बटखरा प्रयोग करता है। प्रतिशत लाभ या हानि क्या है?

हल : **विस्तार विधि (Detail Method) :**

माना कि क्रय मूल्य x रु. प्रति कि. ग्रा. है।

तो, वह वस्तु को $x\left(\dfrac{100 - \frac{25}{4}}{100}\right)$ रु. $= \dfrac{15x}{16}$ रु. प्रति कि. ग्रा. के हिसाब से बेचता है।

अब, माना कि वह y कि. ग्रा. वस्तु खरीदता है

तो, उसका कुल निवेश $= xy$ रु. एवं उसकी कुल आय $= \dfrac{15x}{16} \times y\left(\dfrac{16}{14}\right)$ रु.

$= \dfrac{15}{14}xy$ रु.

$\therefore$ प्रतिशत लाभ $= \dfrac{\frac{15}{14}xy - xy}{xy} \times 100 = \dfrac{50}{7} = 7\frac{1}{7}\%$

सूत्र विधि (Direct Formula) :

यदि कोई दुकानदार अपनी वस्तु को क्रय मूल्य पर x प्रतिशत की हानि सहकर बेचता है परन्तु वह z ग्राम की जगह y ग्राम का बटखरा प्रयोग करता है तो उसका प्रतिशत लाभ

या हानि $= (100 - x)\dfrac{z}{y} - 100$

(धनात्मक एवं ऋणात्मक चिह्न के अनुसार)

yoursmahboob

उपर्युक्त स्थिति में,

$$\% \text{ लाभ या हानि } = \left(100-6\frac{1}{4}\right)\left(\frac{16}{14}\right)-100$$

$$= \frac{375}{4}\times\frac{16}{14}-100$$

$$= \frac{1500-1400}{14} = \frac{100}{14} = \frac{50}{7} = 7\frac{1}{7}\%$$

चूँकि चिह्न धनात्मक है इसलिए $7\frac{1}{7}\%$ का लाभ होता है।

नोट : उपर्युक्त प्रश्न का दूसरा रूप उदा. 10 में देखें।

उदा. 10: एक बेईमान दुकानदार वस्तु को क्रयमूल्य पर $6\frac{1}{4}\%$ हानि सहकर बेचता है परन्तु वह जिस बटखरे का प्रयोग करता है उसका भार $12\frac{1}{2}\%$ कम है। उसका प्रतिशत लाभ या हानि ज्ञात करें।

हल: इस स्थिति में, हम सूत्र का प्रयोग करते हैं:

$$\text{प्रतिशत लाभ या हानि} = \left(\frac{100-6\frac{1}{4}}{100-12\frac{1}{2}}\right)\times 100-100$$

$$= \left(\frac{100-\frac{25}{4}}{100-\frac{25}{2}}\right)\times 100-100$$

$$= \frac{\frac{375}{4}}{\frac{175}{2}}\times 100-100 = \frac{15}{14}\times 100-100 = \frac{100}{14} = 7\frac{1}{7}\%$$

चूँकि चिह्न धनात्मक है, इसलिए $7\frac{1}{7}\%$ की लाभ होता है।

नोट: उदा.-9. एवं उदा.-10. दोनों एक ही प्रश्न है। उदा.-9 में वह 16 ग्राम की जगह 14 ग्राम का प्रयोग करता है। इसका मतलब है कि वह $\frac{16-14}{16}\times 100 = \frac{25}{2} = 12\frac{1}{2}\%$ कम

yourmahboob

भार प्रयोग करता है। इस प्रकार हम देखते हैं कि कोई भी सूत्र का प्रयोग दोनों स्थितियों में कर सकते हैं।

उदा. 11: एक विक्रेता 1 कि. ग्रा. के बटखरा की जगह 840 ग्राम का बटखरा प्रयोग करता है उसका वास्तविक प्रतिशत लाभ या हानि ज्ञात करें;

a) जब वह अपनी वस्तु को क्रय मूल्य पर 4% हानि सहकर बेचता है।

b) जब वह अपनी वस्तु को क्रय मूल्य पर 4% लाभ लेकर बेचता है।

हल : ***विस्तार विधि* (Detail Method) :**

मान लिया कि 1000 ग्रा. का क्रय मूल्य 100 रु. है।

$\therefore$ 840 ग्रा. का क्रय मूल्य $= \frac{100}{1000}(840) = 84$ रु.

a) के लिए, 840 ग्रा. का विक्रय मूल्य $= (100-4)$ रु. $= 96$ रु.

$\therefore$ लाभ = विक्रय मूल्य − क्रय मूल्य $= (96 - 84)$ रु. $= 12$ रु.

$\therefore$ प्रतिशत लाभ $= \frac{12 \times 100}{84} = \frac{100}{7} = 14\frac{2}{7}\%$

b) के लिए, 840 ग्रा. का विक्रय मूल्य $= (100-4)$ रु. $= 104$ रु.

$\therefore$ लाभ = विक्रय मूल्य − क्रय मूल्य

$= 104 - 84 = 20$ रु.

$\therefore$ % लाभ $= \frac{20 \times 100}{84} = 23\frac{17}{21}\%$

***द्रुत विधि* (Quicker Method) :**

इस प्रकार के प्रश्न के लिए एक सामान्य सूत्र है। दोनों स्थितियों को अलग-अलग देखें।

स्थिति-I: यदि विक्रेता अपने वस्तुओं को बेचने के लिए एक कि. ग्रा. (1000 ग्रा. की जगह 'x' ग्राम का बटखरा प्रयोग करता है और वह क्रय मूल्य पर x प्रतिशत की हानि सहता है तो वो $(100-x)\left(\frac{100}{x}\right)-100$ का प्रतिशत लाभ या हानि होती है। (धनात्मक एवं ऋणात्मक चिह्न के अनुसार)

स्थिति-II : यदि एक विक्रेता अपने वस्तुओं को बेचने के लिए 1 कि. ग्रा. (1000 ग्रा.) की जगह 'x' ग्रा. का बटखरा प्रयोग करता है और उसे क्रय मूल्य पर x प्रतिशत का लाभ होता है तो उसका वास्तविक प्रतिशत लाभ या हानि $(100+x)\left(\frac{100}{x}\right)-100$ होता है। (धनात्मक एवं ऋणात्मक चिह्न के अनुसार)

दोनों स्थितियों को मिलाने पर,

प्रतिशत लाभ या हानि $= (100 \pm x)\left(\frac{100}{x}\right)-100$

(धनात्मक या ऋणात्मक चिह्न के अनुसार)

yoursmahboob

उपर्युक्त स्थिति में, $x = 4$ एवं $X = 840$ ग्रा.
इसलिए,

a) % हानि या लाभ $= (100-4)\left(\frac{100}{840}\right)-100$

$$= \frac{96\times100}{840}-100 = \frac{800}{7}-100$$

$$= \frac{100}{7} = 14\frac{2}{7}\%$$

चूँकि चिह्न धनात्मक है, इसलिए $14\frac{2}{7}\%$ का लाभ होता है।

b) % लाभ $= (100-4)\left(\frac{1000}{840}\right)-100$

$$= \frac{104\times1000}{840}-100 = \frac{2600}{21}-100$$

$$= \frac{500}{21} = 23\frac{17}{21}\%$$

एक और उदाहरण

एक विक्रेता चावल बेचने के लिए 1 कि. ग्रा. की जगह 990 ग्रा. का बटखरा प्रयोग करता है। उसका वास्तविक प्रतिशत लाभ या हानि ज्ञात करें जब वह

a) क्रय मूल्य पर 10% हानि सहकर बेचता है

b) क्रय मूल्य पर 10% लाभ लेकर बेचता है।

उपर्युक्त सूत्र का प्रयोग करने पर,

a) % लाभ या हानि $= (100-10)\left(\frac{1000}{990}\right)-100$

$$= \frac{1000}{11}-100 = \frac{100}{11} = 9\frac{1}{11}\%$$

$\Rightarrow 9\frac{1}{11}\%$ की हानि

b) % लाभ $= (100+10)\left(\frac{1000}{990}\right)-100 = \frac{1000}{9}-100 = \frac{100}{9} = 11\frac{1}{9}\%$

yoursmartboob

विक्रय मूल्य निकालना (To Find the Selling Price)

उदा. 12: किसी व्यक्ति ने 250 रु. में एक साइकिल खरीदी। उसे वह कितने में बेचे कि 10% का लाभ हो?

हल: यदि क्र. मू. 100 रु. है तो विक्रय मूल्य 110 रु.

$\therefore$ यदि क्र. मू. 1 रु. है तो विक्रय मूल्य $= \frac{110}{100}$ रु.

$\therefore$ यदि क्र. मू. 250 रु. है तो विक्रय मूल्य $= \frac{110}{100} \times 250$ रु. $= 275$ रु.

दूसरी विधि (भिन्न के नियम से)

यदि उसने 10% मुनाफा लेकर साइकिल बेचना तय किया हो तो विक्रय मूल्य (अभीष्ट मूल्य) क्रय मूल्य (प्रदत्त मूल्य) से निश्चय ही अधिक होगा। इसलिए 250 रु. में ऐसे भिन्न से गुणा करना होगा, जिसका मान 1 से अधिक हो। चूँकि यहाँ मुनाफा हो रहा है, इसलिए

यहाँ प्रयुक्त आँकड़े 100 एवं (100 + 10) होंगे तथा प्रयुक्त भिन्न $\frac{110}{100}$ होगा।

इस प्रकार विक्रय मूल्य $= 250 \times \frac{110}{100} = 275$ रु.

अथवा,

चूँकि मुनाफा हो रहा है, इसलिए विक्रय मूल्य क्रय मूल्य से अधिक होना चाहिए।

$\therefore$ विक्रय मूल्य = क्रय मूल्य का $(100 + 10)\% = \frac{110}{100} \times 250 = 275$ रु.

उदा. 13: कोई व्यक्ति 560 रु. में एक साइकिल खरीदता है। इसे वह कितने में बेचे ताकि 10% की हानि हो।

हल: चूँकि यहाँ हानि हो रही है, इसलिए विक्रय मूल्य, क्रय मूल्य से कम होगा।

$\therefore$ विक्रय मूल्य = क्रय मूल्य का $(100 - 10)\% = \frac{90}{100} \times 560 = 504$ रु.

भिन्न के नियम से,

गणना की राशियाँ 100 एवं $(100 - 10) = 90$ हैं।

$\because$ अभीष्ट मान 1 से कम है।

$\therefore$ गुणक भिन्न $= \frac{90}{100}$

$\Rightarrow$ विक्रय मूल्य $= \frac{90}{100} \times 560 = 504$ रु.

नोट: एक बार आप प्रक्रिया समझ लें, फिर केवल गणना की राशियों को लिखने भर से काम चल जाएगा। इस तरह काफी समय की बचत होगी।

yoursmanboob

क्रय मूल्य निकालना (To Find The Cost Price)

उदा. 14: यदि किसी वस्तु को 390 रु. में बेचकर कोई व्यापारी 20% मुनाफा कमाता है तो उस वस्तु का क्रय मूल्य बताएँ।

हल: यदि विक्रय मूल्य 120 रु. हो तो क्रय मूल्य मान 100 रु. है।

$\therefore$ यदि विक्रय मूल्य 390 रु. है तो क्रय मूल्य $= \frac{100}{120} \times 390 = 325$ रु.

भिन्न के नियम से,

अभीष्ट मान प्रदत्त मान से कम है; इसलिए 390 रु. में $\left(\frac{100}{100+20}\right)$ से गुणा करना होगा :

$\therefore$ क्रय मूल्य $= \frac{100}{100+20} = 325$ रु.

उदा. 15: किसी वस्तु को 352.88 रु. में बेचकर 12% की हानि हुई तो क्रय मूल्य बताएँ।

हल: यहाँ क्रय मूल्य विक्रय मूल्य से अधिक होना चाहिए

$\therefore$ विक्रय मूल्य में $\frac{100}{100-12} = \frac{100}{88}$ से गुणा करना होगा। $\frac{100}{88}$ का मान 1 से अधिक है।

$\therefore$ क्रय मूल्य $= 352.88 \times \frac{100}{88} = 401$ रु.

यदि कोई वस्तु कई लगातार हाथों से गुजरे (Goods Passing Through Successive Hands)

उदा.16. : A किसी वस्तु को B के हाथों 20% मुनाफा लेकर बेच देता है तथा B, C से 25% मुनाफा लेकर उस वस्तु पुनः बेच देता है। यदि C को 225 रु. भुगतान करना पड़े तो A ने इसके लिए कितने रुपए का भुगतान किया था ?

हल: वस्तु दो बार बिकी और दोनों ही बार मुनाफा कमाया गया। इसलिए गणना के लिए प्रयुक्त राशियाँ 120, 125 एवं 100 हैं। A का क्रय मूल्य C के विक्रय मूल्य से कम होना स्वाभाविक है।

$\therefore$ अभीष्ट मूल्य $= 225 \times \frac{100}{120} \times \frac{100}{125} = 150$ रु.

नोट: चूँकि अभीष्ट मान प्रदत्त मान से कम होना चाहिए, इसलिए ऐसे भिन्न से गुणा किया गया, जिसका मान 1 से कम हो। यही वजह है कि 225 में $\frac{100}{120}$ एवं $\frac{100}{125}$ से गुणा किया गया।

उदा. 17: A किसी साइकिल को 30% मुनाफा लेकर B के हाथों बेच देता है। B उसे C को 20% की हानि पर बेच देता है। यदि C को 520 रु. भुगतान करना पड़ता हो तो A ने वह साइकिल कितने में खरीदी थी?

yourmahboob

हल: पूरे सौदे के दौरान 30% का लाभ होता है एवं 20% की हानि होती है। इसलिए गणना में प्रयुक्त राशियाँ हैं: 130, 80 एवं 100

B के लिए क्रय मूल्य $= 520 \times \frac{100}{80}$

तथा, A के लिए क्रय मूल्य $= 520 \times \frac{100}{80} \times \frac{100}{130} = 500$ रु.

उदा.-16 एवं उदा.-17 के लिए वैकल्पिक विधि :

(1) यदि क्रमशः रूप से $x\%$ एवं $y\%$ का मुनाफा होता हो तो परिणामी लाभ (प्रतिशत) $\left(x + y + \frac{xy}{100}\right)$ होगा।

इस प्रकार उदा.-16 के लिए परिणामी प्रतिशत लाभ $= 20 + 25 + \frac{20 \times 25}{100} = 50\%$

एवं क्रय मूल्य $= 225 \times \frac{100}{150} = 150$ रु.

(2) यदि कारोबार में $x\%$ का लाभ एवं $y\%$ की हानि होती है तो परिणामी प्रतिशत लाभ या हानि को $\left(x - y - \frac{xy}{100}\right)$ से अभिव्यक्त किया जाता है।

यदि चिह्न धनात्मक हो तो लाभ होता है, पर यदि चिह्न ऋणात्मक हो तो हानि होती है

इस प्रकार उदा. 17 के लिए परिणामी लाभ या हानि $= 30 - 20 - \frac{30 \times 20}{100} = 4\%$

लाभ, क्योंकि चिह्न धनात्मक है।

$\therefore$ अभीष्ट मूल्य $= \frac{520 \times 100}{104} = 500$ रु.

नोट: दूसरा सूत्र $\left(x - y - \frac{xy}{100}\right)$, पहले सूत्र $\left(x + y + \frac{xy}{100}\right)$ में y की जगह $-y$ रखने से प्राप्त होता है। क्या आप इसका कारण बता सकते हैं?

उदा. 18: घोड़े को 570 रु. में बेचने पर व्यापारी को 5% की हानि होती है। 5% का लाभ कमाने के लिए उसे किस मूल्य पर बेचना होगा ?

हल: क्रय मूल्य का $(100 - 5)\% = 570$

$\therefore$ क्रय मूल्य का $(100 + 5)\% = \frac{570}{95} \times 105 = 630$ रु.

यदि आप इस पद्धति के विस्तार में न जाना चाहें तो 'भिन्न-विधि' (Method of Fraction) का इस्तेमाल करें।

yoursmahboob

यहाँ गणना में प्रयुक्त राशियाँ होंगी:
(100 - 5), (100 + 5) एवं 100

घोड़े का क्रय मूल्य $= 570 \times \frac{100}{95}$

इसलिए विक्रय मूल्य $= 570 \times \frac{100}{95} \times \frac{105}{100} = 630$ रु.

उदा. 19: कोई मशीन 10% मुनाफा लेकर 5060 रु. में बेची जाती है। यदि इसे 4370 रु. में बेचा गया होता तो कितने प्रतिशत का लाभ या हानि होती?

हल: गणना के लिए राशियाँ हैं : 110 एवं 100

$\therefore$ क्रय मूल्य $= 5060 \times \frac{100}{110} = 4600$ रु.

दूसरा विक्रय मूल्य $= 4370$ रु.

$\therefore$ % हानि $= \frac{230 \times 100}{4600} = 5\%$

उदा. 20: मैंने 12% मुनाफा लेकर एक पुस्तक बेची। यदि इसे 18 रु. अधिक लेकर बेचा होता तो 18 प्रतिशत का मुनाफा होता। क्रय मूल्य निकालें।

हल: यहाँ,

लागत का 118% – लागत का 112% = 18 रु.

$\therefore$ लागत का 6% = 18 रु.

$\therefore$ लागत $= \frac{18 \times 100}{6} = 300$ रु.

***द्रुत विधि* (Quicker Method):**

यदि बीच के चरणों को नजरंदाज कर दिया जाए तो ऐसे प्रश्नों को सीधे सूत्र से भी हल कर सकते हैं।

लागत $= \frac{\text{अधिक लाभ} \times 100}{\text{प्रतिशत लाभ में अंतर}}$

$\therefore$ लागत $= \frac{18 \times 100}{18 - 12} = 300$ रु.

उदा. 21: किसी व्यक्ति ने 7% घाटा सहकर एक घोड़ा बेचा। यदि उसने 9% मुनाफा लेकर बेचा होता तो 64 रु. अधिक मिले होते। क्रय मूल्य क्या था ?

हल: लागत का 109% – लागत का 93% = 64 रु.

$\therefore$ लागत का 16% = 64 रु.

$\therefore$ लागत $= \frac{64 \times 100}{16} = 400$ रु.

yoursmahboob

सूत्र से,

$$\frac{64\times100}{9-(-7)}=\frac{64\times100}{16}=400 \text{ रु.}$$

नोट: चूँकि 7% हानि = (−7)% लाभ

उदा. 22: कोई व्यक्ति 10% मुनाफा लेकर एक वस्तु बेचता है। यदि उसने इस वस्तु को 10% कम मूल्य पर खरीदा होता एवं 3 रु. अधिक लेकर बेचा होता तो 25% मुनाफा होता। क्रय मूल्य बताएँ।

हल: मान लिया कि वास्तविक क्रय मूल्य = 100 रु.

∴ 10% मुनाफा पर वास्तविक विक्रय मूल्य = 110 रु.

यदि वस्तु 10% कम में खरीदी गई होती

तो क्रय मूल्य = 90 रु.

25% लाभ लिया जाए तो विक्रय मूल्य = $90\times\frac{125}{100}=112.5$ रु.

∴ विक्रय मूल्यों में अंतर = (112.5−110.0) रु. = 2.5 रु.

यदि अंतर 2.5 रु.का है तो क्रय मूल्य = 100 रु.

∴ यदि अंतर 3.0 रु. का है तो क्रय मूल्य = $\frac{100}{2.5}\times3=120$ रु.

भिन्न के नियम से,

मान लिया कि वस्तु का क्रय मूल्य = A रु.

∴ वास्तविक विक्रय मूल्य = $A\times\left(\frac{110}{100}\right)$

अनुमानित क्रय मूल्य = $A\left(\frac{90}{100}\right)$

अनुमानित विक्रय मूल्य = $A\left(\frac{90}{100}\right)\left(\frac{125}{100}\right)$

इस प्रकार हमें निम्नलिखित संबंध प्राप्त होता है,

$$A\left(\frac{110}{100}\right)+3=A\left(\frac{90}{100}\right)\left(\frac{125}{100}\right) \qquad (*)$$

या $A\left\{\frac{90\times125-110\times100}{100\times100}\right\}=3$

$$\therefore A=\frac{3\times100\times100}{90\times125-110\times100} \quad ---- (*)\ (*)$$

$$=\frac{3\times100\times100}{250}=120 \text{ रु.}$$

yourmahboob

नोट: उपर्युक्त उदाहरण में, (*) द्वारा निर्देशित संबंध स्पष्ट होना चाहिए। समीकरण के दोनों ओर वस्तु का अनुमानित विक्रय मूल्य (supposed selling price) लिखा है। इस रासीकरण की सहायता से हम (*)(*) में क्रय मूल्य निकालते हैं। यदि आप (*)(*)को स्मरण रखें तो कहीं अधिक समय बचा सकते हैं। पर चूँकि प्रश्न का प्रारूप लगातार बदलता रहता है, इसलिए सुझाव दिया जाता है कि (*) में दिया गया संबंध ज्ञात करने के बाद ही आगे बढ़ें।

उदा. 23: किसी व्यक्ति ने एक सामान खरीदकर उसे 10% हानि उठाकर बेच दिया। यदि इसे उसने 20% कम कीमत पर खरीदा होता एवं 55 रु. अधिक लेकर बेचा होता तो उसे 40% का लाभ होता। उस वस्तु का क्रय मूल्य बताएँ।

हल: यदि क्रय मूल्य A है तो अनुमानित विक्रय मूल्य – $A\left(\frac{90}{100}\right)+55=A\left(\frac{80}{100}\right)\left(\frac{140}{100}\right)$

या, $A\left[\frac{80\times140-100\times90}{100\times100}\right]=55$

$$\Rightarrow \quad A=\frac{55\times100\times100}{11200-9000}=\frac{55\times100\times100}{2200}=250 \text{ रु.}$$

नोट: यदि हम सीधे सूत्र का इस्तेमाल करना चाहें तो एक बात ध्यान में रखना होगा कि $x\%$ हानि एवं $y\%$ लाभ के लिए ध्यान की राशियाँ $(100-x)$ एवं $(100+y)$ होंगी।

उदा. 24: एक दुकानदार किसी सामान के 20% लाभ लेकर बेच देता है। यदि उसने इसे 20% कम मूल्य पर खरीदा होता एवं 75 रु. कम लेकर बेच देता, तो उसे 25% मुनाफा होता। क्रय मूल्य क्या है?

हल: मान लिया कि वास्तविक क्रय मूल्य – 100 रु.

20% मुनाफे पर वास्तविक विक्रय मूल्य – 120 रु.

20% घाटे पर अनुमानित क्रय मूल्य – 80 रु.

25% लाभ लेकर अनुमानित विक्रय मूल्य $=80\times\frac{125}{100}=100$ रु.

∴ विक्रय मूल्य में अंतर – (120 – 100) रु. = 20 रु.

यदि अंतर 20 रु. का है तो क्रय मूल्य – 100 रु.

∴ यदि अंतर 75 रु. का है तो क्रय मूल्य $=\frac{100}{20}\times75=375$ रु.

भिन्न के नियम से

मान लिया कि लागत मूल्य A है, तो

$$A\left(\frac{120}{100}\right)-75=A\left(\frac{80}{100}\right)\left(\frac{125}{100}\right)$$

yoursmahboob

या, $\left(\frac{120\times100-80\times125}{100\times100}\right)=75$

या, $A=\frac{75\times100\times100}{120\times100-80\times125}=\frac{75\times100\times100}{2000}=375$ रु.

उदा. 25: एक दुकानदार ने एक रेडियो को 2.5% हानि सहकर बेचा। यदि वह उसे 100 रु. अधिक में बेचा होता तो उसे 7.5% का लाभ होता। $12\frac{1}{2}$% लाभ प्राप्त करने के लिए उसे रेडियो को कितना में बेचना चाहिए?

हल : माना कि उसने रेडियो को x रु. में खरीदा था।

तो 2.5 प्रतिशत की हानि पर विक्रय मूल्य $=\left(\frac{100-2.5}{100}\right)x$ रु. $=\frac{97.5}{100}x$ रु.

एवं विक्रय मूल्य 7.5% के लाभ पर $=x\left(\frac{100+7.5}{100}\right)$ रु. $=\frac{107.5}{100}x$ रु.

प्रश्नानुसार, $\frac{107.5}{100}x-\frac{97.5}{100}x=100$ रु.

या, $10x=100\times100$ $\therefore$ $x=1000$ रु.

इसलिए 12.5% लाभ प्राप्त करने के लिए उसे

$$1000\left(\frac{100+12.5}{100}\right)=1125 \text{ रु. में बेचना चाहिए।}$$

द्रुत विधि (Quicker Method) :

विक्रय मूल्य $=\frac{\text{अधिक रुपए}\ (100+\%\ \text{अंतिम लाभ})}{\%\ \text{लाभ}+\%\ \text{हानि}}$

$$=\frac{100(112.5)}{7.5+2.5}=1125 \text{ रु.}$$

उदा. 26: एक वस्तु को 20% लाभ पर बेचा जाता है। यदि क्रय मूल्य एवं विक्रय मूल्य दोनों 100 रु. कम होता तो लाभ 4% और अधिक होता। क्रय मूल्य ज्ञात करें।

हल : माना लिया कि वस्तु का क्रय मूल्य x रु. है।

विक्रय मूल्य $=x\left(\frac{120}{100}\right)$ रु. है।

नया क्रय मूल्य $=(x-100)$ रु.

yoursmahboob

एवं नया विक्रय मूल्य – $x\left(\frac{120}{100}\right)-100$ रु.

नया लाभ – $\left[x\left(\frac{120}{100}-100\right)-(x-100)\right]$ रु.

$$= x\left(\frac{120}{100}-1\right)\Big] = \left(\frac{120}{100}\right)x \text{ रु.}$$

$$\therefore \quad \text{नया प्रतिशत लाभ} = \frac{x\left(\frac{20}{100}\right)}{x-100}\times 100 = \frac{20x}{x-100}\%$$

प्रश्नानुसार, $\frac{20x}{x-100} = 20+4 = 24$

या, $4x = 2400 \quad \therefore x = 600$

इस प्रकार, वस्तु का क्रय मूल्य – 600 रु.

***सूत्र विधि* (Direct formula) :**

जब क्रय मूल्य एवं विक्रय मूल्य को बराबर मात्रा 'A' से कम कर दिया जाए तो

$$\text{क्रय मूल्य} = \left[\frac{\text{आरम्भिक प्रतिशत लाभ + प्रतिशत लाभ में वृद्धि}}{\text{प्रतिशत लाभ में वृद्धि}}\right]\times A$$

इस स्थिति में, क्रय मूल्य – $\frac{(20+4)\times 100}{4}$ रु.

$= 600$ रु.

नोट : क्या होगा जब क्रय मूल्य एवं विक्रय मूल्य को अलग अलग मात्रा में कम किया जाता है? इस स्थिति के लिए हमारे पास एक सामान्य सूत्र है। निम्नलिखित प्रश्नों के स्वरूप को देखें :

"एक वस्तु P% के लाभ पर बेचा जाता है। यदि क्रय मूल्य में c रु. की कमी तथा विक्रय मूल्य में s रु. की कमी की जाती है तो प्रतिशत लाभ में P% की वृद्धि होती है। उस वस्तु का क्रय मूल्य ज्ञात करें।

$$\text{क्रय मूल्य} = \frac{c(P+p)-100(s-c)}{p}$$

उदा. 8: एक वस्तु को 20% लाभ पर बेचा जाता है। यदि इसके क्रय मूल्य एवं विक्रय मूल्य में क्रमशः 11 रु. एवं 5 रु. की कमी की जाती है तो प्रतिशत लाभ में 10% की वृद्धि होती है। क्रय मूल्य ज्ञात करें।

yoursmahboob

हल: उपर्युक्त सूत्र का प्रयोग करने पर,

$$\frac{10(20+10)-100(5-10)}{10}=\frac{800}{10}=80 \text{ रु.}$$

उदा. b: एक वस्तु को 25% लाभ पर बेचा जाता है यदि इसके क्रय मूल्य एवं विक्रय मूल्य में क्रमशः 20 रु. एवं 4 रु. की वृद्धि की जाती है तो प्रतिशत लाभ में 15% की कमी आती है। क्रय मूल्य ज्ञात करें।

हल: इस प्रश्न में भी उपर्युक्त सूत्र का प्रयोग किया जा सकता है यदि हम धनात्मक एवं ऋणात्मक चिह्नों को सही ढंग से प्रयुक्त कर सकें।

उदाहरण के लिए, इस स्थिति में,

क्रय मूल्य एवं विक्रय मूल्य में क्रमशः (−20) रु. एवं (−4) रु. की कमी आती है जबकि प्रतिशत लाभ में (−15)% की वृद्धि होती है।

अब, क्रय मूल्य $= \dfrac{-20(25-15)-100(-4-(-20))}{-15}$

$$=\frac{-200-1600}{-15}=\frac{-1800}{15}=\frac{1800}{15}=120 \text{ रु.}$$

इस प्रकार, हम देखते हैं कि उपर्युक्त प्रश्न कई तरह से, 'कमी' को 'वृद्धि' में एवं 'वृद्धि' को 'कमी' में परिवर्तित करके, पूछे जा सकते हैं। यदि आप उपर्युक्त सूत्र में प्रयुक्त चिह्नों को समझ लेते हैं, तो आप इस प्रकार के सभी प्रश्नों को बड़ी आसानी से हल कर सकते हैं।

उदा. 27: एक व्यक्ति अपने मेज को $12\frac{1}{2}\%$ के लाभ पर बेचता है एवं कुर्सी को $8\frac{1}{3}\%$ की हानि पर बेचता है। परंतु कुल मिलाकर उसे 25 रु. का लाभ होता है। दूसरी ओर जब वह मेज को $8\frac{1}{3}\%$ की हानि पर बेचता है तो उसे न तो लाभ होता है न ही हानि। मेज की कीमत ज्ञात करें।

हल: मान लिया कि मेज का क्रय मूल्य = T रु. एवं कुर्सी का क्रय मूल्य = C रु.

तो, T का $12\frac{1}{2}\% + C$ का $(-8\frac{1}{3}\%) = 25$

एवं T का $(-8\frac{1}{3}\%) + C$ का $12\frac{1}{2}\% = 0$

या, $\frac{25}{2}T - \frac{25}{3}C = 2500$ ..... (1)

$-\frac{25}{3}T + \frac{25}{2}C = 0$ ..... (2)

yoursmahboob

$\therefore \quad (1) \div 2 - (2) \div 3$

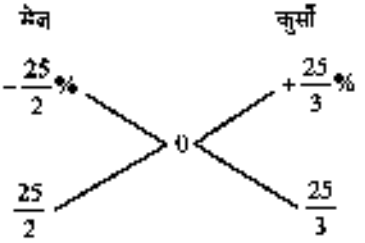
$$\Rightarrow \quad \frac{25}{4}T - \frac{25}{9}T = 1250$$

या, $T\left[\frac{225-100}{36}\right] = 1250 \quad \therefore \quad T = 360$

$\therefore$ मेज की कीमत = 360 रु.

***मिश्रण विधि* (Alligation Rule):**

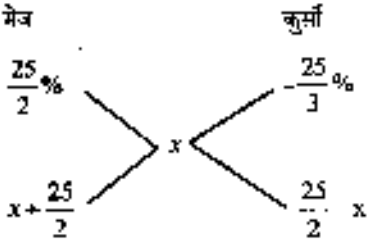
दूसरी स्थिति में :



$\therefore$ मेज एवं कुर्सी की कीमत का अनुपात $\frac{25}{2} : \frac{25}{3} = \frac{1}{2} : \frac{1}{3} = 3:2$

पहली स्थिति में,

माना कि कुल मिलाकर प्रतिशत लाभ x % है तो



$\therefore$ मेज एवं कुर्सी की कीमत का अनुपात $= \left(x+\frac{25}{3}\right) : \left(\frac{25}{2}-x\right) = 3:2$

या, $$\frac{x+\frac{25}{3}}{\frac{25}{2}-x} = \frac{3}{2}$$

या, $2x + \frac{50}{3} = \frac{75}{2} - 3x$

yoursmahboob

या, $5x - \frac{75}{2} - \frac{50}{3} = \frac{125}{6}$

$\therefore \quad 1x = \frac{125}{30} - \frac{25}{6}\%$

अब, $\frac{25}{6}\% = 25$ रु.

$\therefore$ 100% = 600 रु.

$\therefore$ मेज की कीमत $= \frac{600}{3+2} \times 3 = 360$ रु.

नोट : हम देखते हैं कि मिश्रण विधि अतिविस्तृत हो जाता है क्योंकि हम इसका प्रयोग सीधे नहीं कर सकते हैं। यदि लाभ का प्रतिशत मान पहली स्थिति में दिया गया होता तो मिश्रण विधि का प्रयोग थोड़ा आसान होता।

उदा. 28: एक वस्तु को 28% लाभ पर बेचा जाता है। यदि इसके क्रय मूल्य एवं विक्रय मूल्य में क्रमशः 50 रु. एवं 30 रु. की वृद्धि होती है तो प्रतिशत लाभ में $3\frac{1}{3}$% की कमी आती है। क्रय मूल्य ज्ञात करें

हल : माना कि क्रय मूल्य = x रु.

तो विक्रय मूल्य $= \frac{120}{100}x$ रु. $= \frac{6}{5}x$ रु.

अब, नया क्रय मूल्य $= (x + 50)$ रु.

एवं नया विक्रय मूल्य $= \left[\frac{120}{100}x + 30\right]$ रु.

$= \left[\frac{6}{5}x + 30\right]$ रु.

अब, नया प्रतिशत लाभ $= 28 - 3\frac{1}{3} = 16\frac{2}{3}\% = \frac{50}{3}\%$

इस प्रकार, $(x + 50)$ का $\left(100 + \frac{50}{3}\right)\% = \frac{6}{5}x + 30$

या, $\frac{350}{300}(x + 50) = \frac{6}{5}x + 30$

या, $\frac{7}{6}x + \frac{175}{3} = \frac{6}{5}x + 30$

yoursmahboob

या, $\left(\frac{6}{5}-\frac{7}{6}\right)x = \frac{175}{3} - 30$

या, $\frac{1}{30}x = \frac{85}{3}$ $\therefore$ x = 850 रु.

द्रुत विधि (Quicker Method) :

यदि हम सिर्फ परिवर्तन के बारे में सोचें तो, क्रय मूल्य का $3\frac{1}{3}\%$

= क्रय मूल्य में वृद्धि का $\left(100+16\frac{2}{3}\right)\%$ – विक्रय मूल्य में वृद्धि

या, $\frac{10}{300}$ × क्रय मूल्य = $\frac{350}{300}\times 50 - 30$

$\therefore$ क्रय मूल्य = $\frac{350-180}{6}\times\frac{300}{10}$ = 850 रु.

प्रमेय: यदि x वस्तुओं का क्रय मूल्य y वस्तुओं के विक्रय मूल्य के बराबर हो तो प्रतिशत लाभ = $\frac{x-y}{y}\times 100\%$

उदा. 29: 10 वस्तुओं का क्रय मूल्य 9 वस्तुओं के विक्रय मूल्य के बराबर है, प्रतिशत लाभ ज्ञात करें।

हल: मान लिए कि 1 वस्तु का क्रय मूल्य = 1 रु.

$\therefore$ 10 वस्तुओं का क्रय मूल्य = 10 रु.

9 वस्तुओं का विक्रय मूल्य = 10 रु.

$\therefore$ 10 वस्तुओं का विक्रय मूल्य = $\frac{10\times 10}{9} = \frac{100}{9}$ रु.

$\therefore$ 10 रु. पर मुनाफा = $\left(\frac{100}{9}-10\right) = \frac{10}{9}$ रु.

100 रु. पर मुनाफा = $\frac{100}{9} = 11\frac{1}{9}$ रु.

$\therefore$ %लाभ = $11\frac{1}{9}\%$

दूसरी विधि :

गणना की उलझन से बचने के लिए, मान लें कि कुल निवेश = 10×9 = 90 रु.

yoursmahboob

$\therefore$ 1 वस्तु का क्रय मूल्य $= \frac{90}{10} = 9$ रु.

1 वस्तु का विक्रय मूल्य $= \frac{90}{9} = 10$ रु.

$\therefore$ %लाभ $= \frac{10-9}{9} \times 100 = \frac{1}{9} \times 100 = 11\frac{1}{9}\%$

सूत्र से

%लाभ $= \frac{10-9}{9} \times 100 = 11\frac{1}{9}\%$

उदा. 30: मैंने 20 वस्तुओं के लिए जितनी रकम अदा की, उतने में 16 वस्तुएँ बेचता हूँ। मुझे कितना प्रतिशत लाभ हुआ ?

हल: मुझे 16 वस्तुओं की लागत पर 4 वस्तुओं का लाभ होता है।

$\therefore$ % लाभ $= \frac{4}{16} \times 100 = 25\%$

या,

मान लिया कि कुल विक्रय $= 16 \times 20 = 320$ रु.

क्रय मूल्य $= \frac{320}{20} = 16$ रु.

विक्रय मूल्य $= \frac{320}{16} = 20$ रु.

$\therefore$ %लाभ $= \frac{20-16}{16} \times 100 = 25\%$

सूत्र से

% लाभ $= \frac{20-16}{16} \times 100 = 25\%$

उदा. 31: एक थोक विक्रेता खुदरा विक्रेता को 27 कलम की कीमत लेकर 30 कलम बेचता है। खुदरा विक्रेता कलम के अंकित मूल्य पर बेचता है। खुदरा विक्रेता के द्वारा प्राप्त किया गया प्रतिशत लाभ ज्ञात करें।

हल: % लाभ $= \frac{100}{9} = 11\frac{1}{9}\%$

उदा. 32: 66 मीटर कपड़ा बेचकर कोई व्यक्ति 22 मीटर की लागत के बराबर लाभ प्राप्त करता है। उसे कितना प्रतिशत मुनाफा हुआ ?

yoursmahboob

हल: % लाभ $= \frac{22}{66} \times 100 = 33\frac{1}{3}\%$

पूरे कारोबार पर एक निश्चित (प्रतिशत) लाभ प्राप्त करना

उदा. 33: यदि 450 रु. में कुछ सामान खरीदकर उसका एक तिहाई 10% हानि सहकर बेच दिया जाए तो शेष सामान को कितने प्रतिशत लाभ पर बेचा जाए ताकि पूरे कारोबार पर कुल मिलाकर 20% का लाभ हो?

हल: $\frac{1}{3}$ सामान का क्रय मूल्य $= \frac{450}{3} = 150$ रु.

$\frac{1}{3}$ सामान का विक्रय मूल्य $= 150 \times \frac{90}{100} = 135$ रु

पर कुल विक्रय मूल्य $= 450 \times \frac{120}{100} = 540$ रु. होना चाहिए।

$\therefore$ शेष दो तिहाई सामानों का विक्रय मूल्य $(540 - 135) = 405$ रु. होना चाहिए

लेकिन, इस दो-तिहाई सामान का क्रय मूल्य $= 300$ रु.

$\therefore$ % लाभ $= \frac{105}{300} \times 100 = 35\%$

संक्षिप्त विधि (Short-cut Suggested Method):

यदि बीच के सभी चरणों को नजरंदाज कर दें तो हम निम्नलिखित निष्कर्ष पर पहुँचेंगे:

मान लिया कि अभीष्ट प्रतिशत $= x$

$(100 - 10)$ का $\frac{1}{3} + (100 - x)$ का $\frac{2}{3} =$ कुल का $(100 + 20)$

या, $\frac{90}{3} + \frac{2(100 + x)}{3} = 120$

या, $290 + 2x = 360$

$\therefore x = \frac{70}{2} = 35\%$

मिश्रण-विधि से (By Method of Alligation) :

मिश्रण-विधि से यह सवाल बड़ी आसानी से हल किया जा सकता है। इससे समय की भी बचत होगी। मिश्रण (Alligation) नामक अध्याय का उदा.–33 देखें।

उदा. 34: यदि 840 रु. में माल खरीदकर उसका एक चौथाई 20% हानि सहकर बेच दी जाए तो शेष माल को कितने प्रतिशत मुनाफा लेकर बेचा जाए ताकि पूरे कारोबार पर 20% का मुनाफा हो?

हल: मान लिया कि अभीष्ट प्रतिशत x है, तब

yoursmahboob

$$\frac{1}{4}(100-20)+\frac{3}{4}(100+x)=(100+20)$$

या, $20+75+\frac{3x}{4}=120$

या, $\frac{3x}{4}=25$

$\therefore x=\frac{100}{3}=33\frac{1}{3}\%$

मिश्रण विधि से : मिश्रण (Alligation) अध्याय का उदा.-34 देखें।

उदा. 35: एक व्यक्ति 5 घोड़े एवं 10 गायें 10,000 रु. में खरीदता है। वह घोड़ों को 15% लाभ पर तथा गायों को 10% हानि पर बेच देता है, इस प्रकार उसे 375 रु. का लाभ होता है। एक घोड़ा एवं एक गाय की कीमत अलग अलग ज्ञात करें।

हल : ***विस्तार विधि (Detail Method) :***

माना कि 1 घोड़े की कीमत x रु. है, तो

कुल विक्रय मूल्य $=5x\left(\frac{115}{100}\right)+\left(10000-5x\right)\left(\frac{90}{100}\right)=10375$

या, $575x+90\times10000-450x=10375\times100$

या, $125x=137500$

$\therefore x=\frac{137500}{125}=1100$ रु.

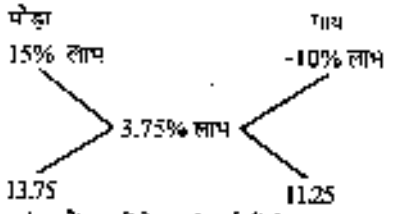
इसलिए, एक घोड़े की कीमत $=1100$ रु.

एवं एक गाय की कीमत $=\frac{10000-5\times1100}{10}=450$ रु.

मिश्रण विधि (Method of Alligation) :

कुल मिलाकर % लाभ $=\frac{375}{10000}\times100=3.75\%$

अब,



$\therefore$ घोड़ों एवं गायों पर निवेश की गई पूँजी का अनुपात $=11:9$

yoursmahboob

$\therefore$ 5 घोड़े का क्रय मूल्य $= \frac{10000}{11+9} \times 11 = 5500$ रु.

$\therefore$ 1 घोड़े का क्रय मूल्य $= 1100$ रु. एवं

एक गाय का क्रय मूल्य $= \frac{10000}{20} \times 9 + 10$

$= 450$ रु.

उदा. 36: एक प्रेषण (consignment) का दो तिहाई 6% लाभ पर बेचा गया एवं शेष को 3% की हानि पर बेचा गया। यदि कुल मिलाकर 540 रु. का लाभ हुआ तो प्रेषण का मूल्य ज्ञात करें।

हल: ***विस्तार विधि* (Detail Method) :**

माना कि प्रेषण का मूल्य x रु. था।

तो, $\frac{2}{3}x$ को 6% लाभ पर बेचा गया।

अर्थात् $\frac{2}{3}x\left(\frac{106}{100}\right)$ रु. में बेचा गया।

एवं $\frac{1}{3}$ भाग $\frac{x}{3}\left(\frac{97}{100}\right)$ रु. में बेचा गया।

अब, लाभ $= \left\{\frac{2}{3}x\left(\frac{106}{100}\right)+\frac{x}{3}\left(\frac{97}{100}\right)\right\} - x$

$= \frac{212x+97x}{300} - x$

$= \frac{309x-300x}{300} = \frac{9x}{300}$

चूँकि $\frac{9x}{300} = 540 \quad \therefore x = \left(\frac{540\times300}{9}\right)$ रु. $= 18000$ रु.

***द्रुत विधि* (Quicker Method) :**

प्रेषण का मूल्य $= \frac{\text{कुल लाभ}\times100}{\%\text{ लाभ}\times\frac{2}{3}-\%\text{ हानि}\times\frac{1}{3}}$

$= \frac{540\times100}{6\times\frac{2}{3}-3\times\frac{1}{3}} = 18000$ रु.

yoursmartbooks

नोट : उपर्युक्त सूत्र को निम्नलिखित सामान्य रूप में लिखा जा सकता है।

यदि x भाग m% लाभ पर बेचा जाता है, y भाग n% लाभ पर बेचा जाता है, z भाग p% लाभ पर बेचा जाता है एवं कुल मिलाकर P रु. का लाभ होता है तो कुल डेलिवरी (consignment) का मान = $\dfrac{P \times 100}{xm + ny + pz}$

उदा. 36 में हमने हर (denominator) में लाभ – (हानि) का प्रयोग किया है।

उदा. 37: एक व्यक्ति 480 रु. में दो घड़ियाँ खरीदता है। वह एक को 15% की हानि पर तथा दूसरी को 19% के लाभ पर बेचता है और वह पाता है कि प्रत्येक घड़ी बराबर दाम पर बेची गई। दोनों घड़ियों की कीमत ज्ञात करें।

हल : हम यहाँ पर विस्तार विधि का वर्णन नहीं करेंगे।

इसके संबंध में संकेत मात्र ही आपके के लिए काफी होगा। यदि पहली घड़ी का क्रय मूल्य x रु. है तो

$$x\left(\frac{100-15}{100}\right) = (480 - x)\left(\frac{100+19}{100}\right)$$

अब, इसे x के लिए हल करें एवं दोनों मूल्यों को प्राप्त करें।

सूत्र विधि (Direct Formula) :

हानि पर बेची गई घड़ी का क्रय मूल्य = $\dfrac{480 \times (100 + \%\text{ लाभ})}{(100-15)+(100-19)}$

$= \left(\dfrac{480 \times 119}{204} =\right)$ 280 रु.

∴ लाभ पर बेची गई घड़ी का क्रय मूल्य = (480 – 280) = 200 रु.

नोट : (1) लाभ पर बेची गई घड़ी का क्रय मूल्य = $\dfrac{480 \times (100 - \%\text{ हानि})}{(100-15)+(100-19)}$ = 200 रु.

(2) सूत्र को विस्तार विधि से ही प्राप्त किया गया है। इसे प्राप्त करने का खुद प्रयास करें।

उदा. 38: एक वस्तु का $\frac{1}{3}$ भाग 15% लाभ पर बेचा जाता है, $\frac{1}{4}$ भाग 20% लाभ पर बेचा जाता है एवं शेष 24% लाभ पर बेचा जाता है। यदि कुल 62 रु. का लाभ होता है, तो वस्तु का मूल्य ज्ञात करें।

हल : माना कि वस्तु का मूल्य x रु. था। तो $\frac{x}{3}$ 15% लाभ पर, $\frac{x}{4}$ 20% लाभ पर

तथा, $x - \left(\frac{x}{3} + \frac{x}{4}\right) = \frac{5x}{12}$ 24% लाभ पर बेचा जाता है।

yoursmahboob

अथ. लाभ $= \frac{x}{3}\left(\frac{15}{100}\right) + \frac{x}{4}\left(\frac{20}{100}\right) - \frac{5x}{12}\left(\frac{24}{100}\right) = 62$

या, $\frac{x}{20} + \frac{x}{20} - \frac{x}{10} = 62$

या, $\frac{4x}{20} = 62$

$\therefore\ x = \frac{62 \times 20}{4} = 310$ रु.

द्रुत विधि (Quicker Method) :

वस्तु का मूल्य $= \dfrac{62 \times 100}{\frac{1}{3} \times 15 + \frac{1}{4} \times 20 - \frac{5}{12} \times 24}$

$= \dfrac{62 \times 100}{5 + 5 + 10} = 310$ रु.

नोट : जब कुछ माल को हानि पर बेचा जाता है तो ऋणात्मक चिह्न का प्रयोग करें। उदाहरण के लिए, उदा.-39 देखें।

उदा. 39: एक प्रेषण (consignment) का $\frac{2}{3}$ भाग 6% लाभ पर बेचा जाता है। एवं शेष 3% हानि पर बेची जाती है यदि कुल मिलाकर 540 रु. का लाभ हुआ हो तो प्रेषण का मूल्य ज्ञात करें।

हल: प्रेषण का मूल्य $= \dfrac{540 \times 100}{\frac{2}{3} \times 6 + \frac{1}{3}(-3)} = \dfrac{540 \times 100}{4 - 1} = 18000$ रु.

उदा. 40: नन्दलाल 20 दर्जन लेखन पुस्तिका (Note-book) 48 रु. प्रति दर्जन के हिसाब से खरीदता है। वह 8 दर्जन 10% लाभ पर तथा शेष 12 दर्जन 20% लाभ पर बेच देता है। कारोबार में उसका प्रतिशत लाभ क्या है?

हल: 20 दर्जन लेखन-पुस्तिका का क्रय मूल्य $= (20 \times 48 =)\ 960$ रु.

8 दर्जन लेखन पुस्तिका का विक्रय मूल्य $= 8 \times 48 \left(\frac{110}{100}\right)$ रु.

12 दर्जन लेखन पुस्तिका का विक्रय मूल्य $= 12 \times 48 \left(\frac{120}{100}\right)$ रु.

yoursmahboob

$\therefore$ कुल विक्रय मूल्य $= \frac{2112}{5}$ रु. $+ \frac{3456}{5}$ रु. $= \frac{5568}{5}$ रु.

लाभ $= \left(\frac{5568}{5} - 960\right) = \frac{768}{5}$ रु.

$\therefore$ लाभ % $= \frac{568 \times 100}{5 \times 960} = 16\%$

***द्रुत विधि* (Quicker Method) :**

प्रतिशत लाभ $= \frac{\text{पहला भाग} \times \text{दूसरा भाग पर \% लाभ} + \text{दूसरा भाग} \times \text{दूसरा भाग पर \% लाभ}}{\text{ऐसे भागों का जोड़}}$

यहाँ, कुल = 20 दर्जन दो भागों में बेचा जाता है।

पहला भाग = 8 दर्जन एवं दूसरा भाग = 12 दर्जन

$\therefore$ % लाभ $= \frac{8 \times 10 + 12 \times 20}{20} = \frac{320}{20} = 16\%$

***भाव में गिरावट* (Reduction in Price)**

उदा. 41: चीनी के दाम में 10% की कमी होने पर कोई व्यक्ति 225 रु. में 25 किलोग्राम अधिक चीनी खरीद सकता है। भाव में कितने रुपए प्रति किलोग्राम की कमी आई। पहले चीनी का भाव क्या था?

हल: दाम में कमी होने के कारण 225 रु. पर 10% की बचत हुई।

225 रु. का 10% $= \frac{45}{2}$ रु.

$\frac{45}{2}$ रु. में 25 किलोग्राम चीनी मिलती है।

$\therefore$ गिरा हुआ मूल्य = 22.5 : 25

0.90 रु. प्रति किलोग्राम = 90 पैसे प्रति किलोग्राम

मूल दाम(Original Price) = 90 पैसे $\times \frac{100}{100-10} = 1$ रु. प्रति किलोग्राम

मिश्रण की बिक्री

उदा. 42: कोई दुकानदार 2 रु. प्रति किलोग्राम वाली 26 किलोग्राम चीनी 3.60 प्रति किलोग्राम वाली 30 किलोग्राम चीनी के साथ मिलाकर मिश्रण तैयार करता है। इस मिश्रण को वह 3 रु. प्रति किलोग्राम की दर से बेचता है। उसे कुल कितना लाभ हुआ? इसे प्रतिशत में व्यक्त करें।

हल: लाभ = (26 किलोग्राम + 30 किलोग्राम) × 3 रु./कि.ग्रा.

[26 कि. ग्रा. × 2 रु./कि. ग्रा. + 30 कि. ग्रा. × 3.60 रु./कि. ग्रा.]

yoursmahboob

$= 168$ रु. $(52 + 108)$ रु.

$= (168 - 160)$ रु. $= 8$ रु.

$\therefore$ % लाभ $= \frac{8}{160} \times 100 = 5\%$

प्रमेय: यदि कोई व्यक्ति x वस्तु प्रति रु. एवं y वस्तु प्रति रुपए के हिसाब से बराबर मात्रा में सामान खरीदकर उन्हें मिला देता है और इस मिश्रण को z वस्तु प्रति रु. के हिसाब से बेचता है तो प्रतिशत लाभ या हानि

$$= \left(\frac{2xy}{z(x+y)} - 1\right) \times 100$$

यदि उपर्युक्त व्यंजक का चिह्न धनात्मक हो तो लाभ होगा और यदि चिह्न ऋणात्मक हो तो हानि होगी।

प्रमाण: मान लिया कि वह व्यक्ति A वस्तुएँ खरीदता है:

x वस्तु प्रति रुपया के हिसाब से A वस्तुओं का क्रय मूल्य $= \frac{A}{x}$ रु.

y वस्तु प्रति रुपया के हिसाब से A वस्तुओं का क्रय मूल्य $= \frac{A}{y}$ रु.

कुल लागत $= \frac{A}{x} + \frac{A}{y}$

z वस्तु प्रति रुपया के हिसाब से $2A$ वस्तुओं का विक्रय मूल्य $= \frac{2A}{z}$

लाभ या हानि % $= \frac{\text{विक्रय मूल्य} - \text{क्रय मूल्य}}{\text{क्रय मूल्य}} \times 100$

(चिह्न के धनात्मक या ऋणात्मक होने के अनुसार)

$$= \frac{\frac{2A}{z} - \left(\frac{A}{x} + \frac{A}{y}\right)}{\frac{A}{x} + \frac{A}{y}} \times 100$$

$$= \frac{\frac{2A}{z} - A\left(\frac{x+y}{xy}\right)}{A\left(\frac{x+y}{xy}\right)} \times 100 = \left[\frac{2xy}{z(x+y)} - 1\right] \times 100$$

yourmanhoob

उदा. 43: एक व्यक्ति 3 रु. प्रति आम के हिसाब से कुछ आम खरीदता है और उतने ही आम 4 रु. प्रति आम के हिसाब से भी खरीदता है। इन दोनों को मिलाकर वह 3 रु. प्रति आम के हिसाब से बेच देता है, उसे कितने प्रतिशत का लाभ या हानि हुई?

हल: **प्रमेय से,**

$$\therefore \%\text{लाभ या हानि} = \left[\frac{2\times3\times4}{3(3+4)}-1\right]\times100$$

$$\left[\frac{24}{21}-1\right]\times100 = \frac{100}{7} = 14\frac{2}{7}\%$$

$\because$ चिह्न धनात्मक है, इसलिए $14\frac{2}{7}\%$ का लाभ हुआ।

उदा. 44: कोई व्यक्ति 1 रु. में 25 टॉफी के हिसाब से कुछ टॉफी खरीदता है। इतनी ही टॉफी वह 1 रु. में 20 टॉफी के हिसाब से भी खरीदता है। इन दोनों को मिलाकर वह 2 रु. में 45 टॉफी के भाव से बेचता है। इस कारोबार में उसे कितने प्रतिशत का लाभ या हानि होती है ?

हल: मान लिया कि उस व्यक्ति ने 1 रु. में 25 के हिसाब से x टॉफी खरीदीं।

$$\text{मूलधन} = \frac{2x}{45}\times2-\left(\frac{x}{25}\times1+\frac{x}{20}\times1\right) = \frac{4x}{45}-\frac{9x}{100} = -\frac{x}{900}$$

ऋणात्मक चिह्न से पता चलता है कि हानि हुई।

$$\therefore \%\text{हानि} = \frac{\frac{x}{900}}{\frac{9x}{100}}\times100 = \frac{x}{900}\times\frac{100}{9x}\times100$$

$$= \frac{100}{81} = 1\frac{19}{81}\%$$

प्रमेय से:

$x = 25,\ y = 20$ एवं $z = \frac{45}{2} = 22.5$

$$\therefore \%\text{लाभ या हानि} = \left[\frac{2xy}{z(x+y)}-1\right]\times100$$

$$\left[\frac{2\times25\times20}{22.5(25+20)}-1\right]\times100 = \frac{1000-1012.5}{1012.5}\times100$$

yoursmahboob

$$= -\frac{12.5}{1012.5} \times 100 = -\frac{100}{81} = -1\frac{19}{18}\%$$

∵ चिह्न ऋणात्मक है, इसलिए $1\frac{19}{18}\%$ की हानि हुई।

उदा. 45: 1 रु. में 11 के हिसाब से कुछ संतरे खरीदे जाते हैं। इतने ही संतरे 1 रु. में 9 के हिसाब से भी खरीदे जाते हैं। यदि इन्हें 1 रु. में 10 के हिसाब से बेचा जाए तो कितने प्रतिशत का लाभ या हानि होगी ?

हल: प्रमेय से,

$$\%\text{लाभ या हानि} = \left[\frac{2\times11\times9}{10(11+9)} - 1\right]\times100 = \left[\frac{198}{200} - 1\right]\times100$$

$$= \frac{-2}{200}\times100 = (-1)$$

∵ चिह्न ऋणात्मक है, इसलिए 1% की हानि हुई।

नोट: 1. उपर्युक्त दोनों उदाहरणों से पता चलता है कि यदि $z = \frac{x+y}{2}$ हो तो निश्चित रूप से हानि ही होती है।

2. यदि $x = y = z$, तो न लाभ होता है न हानि। क्या आप इस तथ्य से सहमत हैं ?

उदा.-46: यदि 1 रु. में 25 टॉफी खरीदी जाती है तो रुपये में कितनी टॉफी बेचने से 25% का लाभ होगा?

हल: 25 टॉफी का विक्रय मूल्य = $1 \text{ रु.} \times \frac{125}{100} = \frac{5}{4}$ रु.

∴ $\frac{5}{4}$ रु. में 25 टॉफी बेची जाती है।

∴ 1 रु. में $\frac{25\times4}{5} = 20$ टॉफी बेची जाएगी

संक्षिप्त विधि (भिन्न-विधि : Method of Fraction):

∵ 25% मुनाफा होता है, इसलिए गणना में प्रयुक्त राशियाँ 125 एवं 100 हैं। मुनाफा कमाने के लिए यह जरूरी है कि 1 रु. में जितना खरीदा गया है, उससे कम बेचा जाए।

∴ गुणक भिन्न = $\frac{100}{125}$

∴ टॉफी की अपेक्षित संख्या = $25\times\frac{100}{125} = 20$

उदा. 47: कोई व्यक्ति 5850 रु. में 5 घोड़े एवं 7 बैल खरीदता है। वह घोड़े को 10% मुनाफा

yoursrahboob

लेकर बेच देता है एवं बैलों को 16% मुनाफा लेकर बेचता है। इस कारोबार में उसे कुल 711 रु. का मुनाफा होता है। एक घोड़े के लिए उसे कितने रुपये अदा करने पड़े थे?

हल: मान लिया कि वह व्यक्ति x रु. में एक घोड़ा खरीदता है।इसलिए समीकरण:

$5x$ का 10% + $(5850 - 5x)$ का 16% = 711

या, $\frac{5x}{10} + \frac{16}{100}(5850 - 5x) = 711$

या, $\frac{x}{2} + \frac{4}{25}(5850 - 5x) = 711$

या, $25x + 8(5850 - 5x) = 711 \times 50 = 35550$

या, $15x = 46800 - 35550 = 11250$

$\therefore \quad x = 750$ रु.

उदा. 46: एक व्यक्ति कुछ संतरे एक रु. में 5 के भाव से खरीदता है। वह उतने ही संतरे एक रु. में 4 के भाव से खरीदता है। वह दोनों प्रकार के संतरे को मिला देता है एवं 2 रु. में 9 संतरे के भाव से बेचता है। इस कारोबार में उसे 3 रु. की हानि होती है। कुल मिलाकर उसने कितने संतरे खरीदे?

हल : ***विस्तार विधि* (Detail Method) :**

माना कि वह प्रत्येक तरह का x संतरे खरीदता है।

तो उसका कुल निवेश $= \frac{x}{5} + \frac{x}{4} = \frac{9x}{20}$ रु.

कुल विक्रय मूल्य $= \frac{2x \times 2}{9}$ रु $= \frac{4x}{9}$ रु.

$\therefore$ कुल हानि $= \frac{9x}{20} - \frac{4x}{9} = \frac{81x - 80x}{180} = \frac{x}{180}$

तो $\frac{x}{180}$ रु. $= 3$ रु. $\quad \therefore \quad x = 180 \times 3 = 540$

इसलिए उसने कुल मिलाकर $2 \times 540 = 1080$ संतरे खरीदे।

***द्रुत विधि* (Quicker Method) :**

उपर्युक्त प्रश्न में,

यदि x संतरे प्रति रुपए एवं y संतरे प्रति रुपए की बराबर संख्या में मिलाए जाते हैं। एवं z संतरे प्रति रुपए के हिसाब से बेचा दिए जाते हैं, तो

$$\text{खरीदे गए संतरों की कुल संख्या} = \frac{\text{रुपए की हानि} \times 2xyz}{z(x+y) - 2xy}$$

$$= \frac{3 \times 2 \times 5 \times 4 \times 4.5}{4.5(5+4) - 2 \times 5 \times 4}$$

$$= \frac{120 \times 4.5}{40.5 - 40} = 1080 \text{ संख्या}$$

yoursmanboob

नकद भुगतान पर व्यापारियों द्वारा प्रदत्त बट्टा

उदा. 49: कोई व्यापारी अपने सामान का मूल्य 25% बढ़ा कर अंकित करता है एवं नकद भुगतान करने वाले को $12\frac{1}{2}$% बट्टा भी देता है। उसे कितना प्रतिशत मुनाफा होता है?

हल: मान लिया कि क्रय मूल्य = 100 रु.

अंकित मूल्य = 125 रु.

बट्टा = 125 रु. का $12\frac{1}{2}\% = 15\frac{5}{8}$ रु.

$\therefore$ घटा हुआ मूल्य $= \left(125 - 15\frac{5}{8}\right)$ रु $= 109\frac{3}{8}$ रु.

$\therefore$ %लाभ $= 109\frac{3}{8} - 100 = 9\frac{3}{8}\%$

प्रमेय: यदि कोई व्यापारी अपने माल का दाम x% बढ़ाकर अंकित करता है और नकद भुगतान पर y% बट्टा देता है तो उसे $\left(x - y - \frac{xy}{100}\right)\%$ का लाभ या हानि होगी। यदि $\left(x - y - \frac{xy}{100}\right)$ का चिह्न धनात्मक हुआ तो लाभ होगा अन्यथा हानि होगी।

यहाँ $x = 25\%$, $y = 12\frac{1}{2}\%$

$\therefore \left(x - y - \frac{xy}{100}\right)\% = \left(25 - 12\frac{1}{2} - \frac{25 \times 25}{200}\right)\% = 9\frac{3}{8}\%$ लाभ

नोट: इस प्रकार, यदि

x = क्रय मूल्य से बढ़ाकर अंकित किया गया प्रतिशत,

y = प्रतिशत बट्टा, एवं

z = प्रतिशत लाभ हो तो $z = x - y - \frac{xy}{100}$

उदा. 50: एक व्यापारी नकद भुगतान करने वाले को 5% की छूट देता है। उसे अपनी वस्तु का मूल्य क्रय मूल्य से कितना प्रतिशत बढ़ा कर अंकित करना चाहिए ताकि 10% का मुनाफा हो?

हल: यदि हम उपर्युक्त सूत्र का इस्तेमाल करें तो,

$10 = x - 5 - \frac{5x}{100}$

या $\frac{19x}{20} = 15$

yoursmahboob

$$\therefore x = \frac{15 \times 20}{19} = 15\frac{15}{19}\%$$

उदा. 51. एक व्यक्ति 1350 रु. में दो घोड़े खरीदता है। वह एक घोड़े को 6% हानि सहकर बेचता है एवं दूसरे को 7.5 प्रतिशत लाभ लेकर। प्रत्येक घोड़े की कीमत क्या थी ? यदि पूरे कारोबार में न तो उसे लाभ होना हो न हानि।

हल: एक घोड़े पर हानि = दूसरे घोड़े पर लाभ

$\therefore$ पहले घोड़े की कीमत का 6% = दूसरे घोड़े की कीमत का 7.5%

$$\therefore \frac{\text{पहले घोड़े की कीमत}}{\text{दूसरे घोड़े की कीमत}} = \frac{7.5\%}{6\%} = \frac{5}{4}$$

1350 रु. को 5 : 4 के अनुपात में विभाजित करने पर :

पहले घोड़े का क्रय मूल्य = 750 रु.

दूसरे घोड़े का क्रय मूल्य = 600 रु.

मिश्रण विधि से: मिश्रण (Alligation) अध्याय का उदा.-35 देखें।

सूत्र से:

पहले घोड़े का क्रय मूल्य

$$= \frac{\text{दोनों की कीमत} \times \text{दूसरे घोड़े की खरीद पर \%लाभ या \%हानि}}{\text{पहले की खरीद पर \%लाभ या \%हानि} \times \text{दूसरे की खरीद पर \%लाभ या \%हानि}}$$

दूसरे घोड़े का क्रय मूल्य

$$= \frac{\text{दोनों की लागत} \times \text{पहले घोड़े पर \%लाभ या \%हानि}}{\text{पहले घोड़े पर प्रतिशत लाभ या प्रतिशत हानि} \times \text{दूसरे घोड़े पर प्रतिशत लाभ या प्रतिशत हानि}}$$

उपर्युक्त प्रश्न के संदर्भ में,

$$\text{पहले घोड़े का क्रय मूल्य} = \frac{1350 \times 7.5}{6 + 7.5} = 750 \text{ रु.}$$

$$\text{दूसरे घोड़े का क्रय मूल्य} = \frac{1350 \times 6}{6 + 7.5} = 600 \text{ रु.}$$

भिन्न के नियम का विविध प्रयोग

उदा. 52: मंजु 25% मुनाफा लेकर कोई वस्तु अजु के हाथों बेच देती है। अजु इसे 10% लाभ लेकर सोनिया को एवं सोनिया 5% मुनाफा लेकर बॉबी को बेच देती है। यदि सोनिया ने इसे 231 रु. में बेचा हो तो मंजु ने उस वस्तु को कितने में खरीदा था ?

हल: सोनिया ने उस वस्तु को $231\left[\frac{100}{100+5}\right]$ रु. में खरीदा

yoursmahboob

अंशु ने इसे $231\left[\frac{100}{105}\right]\left[\frac{100}{100+10}\right]$ रु. में खरीदा

$\therefore$ मंजू ने इसे $231\left[\frac{100}{105}\right]\left[\frac{100}{110}\right]\left[\frac{100}{100+25}\right]$ रु. में खरीदा

$\therefore$ मंजू के लिए क्रय मूल्य = 160 रु.

उदा. 53: संतोष अपने वस्तुओं की कीमत 25% बढ़ाकर अंकित करता है। पर नकद भुगतान करने वालों को 12.5% की छूट भी देता है। यदि वह वस्तु को 875 रु. में बेचे तो क्रय मूल्य बताएँ।

हल: अंकित मूल्य $= 875\left[\frac{100}{100-12.5}\right]$ रु. $= 875 \times \frac{100}{87.5}$ रु.

$\therefore$ क्रय मूल्य $= 875\left[\frac{100}{87.5}\right]\left[\frac{100}{100+25}\right]$ रु. = 800 रु.

उदा. 54: यदि 1 रु. में 30 संतरे खरीदे जाएँ तो 25% मुनाफा कमाने के लिए 1 रु. में कितने संतरे बेचने होंगे ?

हल: निश्चय ही, यदि मुनाफा कमाना है तो उसे रुपए में 30 संतरे से कम बेचना चाहिए।

$\therefore$ संतरे की अभीष्ट संख्या $= 30\left[\frac{100}{100+25}\right] = 24$ संतरे

उदा. 55: यदि 1 रु. में 32 संतरे बेचने पर 40% की हानि होती है तो 20% मुनाफा कमाने के लिए हमें 1 रु. में कितने संतरे बेचने चाहिए ?

हल: उस व्यक्ति ने 1 रु. में 32 से कम संतरे खरीदे होंगे।

इसलिए उसने 1 रु. में $32\left[\frac{100-40}{100}\right] = 32 \times \left[\frac{60}{100}\right]$ संतरे खरीदे थे।

20% मुनाफा कमाने के लिए उसे रुपए में $\left[32 \times \frac{60}{100}\right]$ से कम संतरे बेचने चाहिए।

$\therefore$ संतरे की अभीष्ट संख्या $= 32\left[\frac{60}{100}\right]\left[\frac{100}{100+20}\right]$

$= 32\left[\frac{60}{100}\right]\left[\frac{100}{120}\right] = 16$ संतरे

उदा. 56: कोई व्यक्ति 3910 रु. प्रति जोड़ा के हिसाब से दो घोड़े बेचता है। इस क्रम में उसे एक घोड़े पर 15% का मुनाफा होता है तथा दूसरे पर 15% की हानि होती है। उसे कुल मिलाकर कितना लाभ या हानि हुई?

yoursmahboob

हल: प्रमेय के अनुसार, ऐसी स्थिति में हमेशा हानि ही होती है।

$$\text{प्रतिशत हानि} = -\frac{(15)^2}{100} = -2.25\%$$

इस प्रकार, हम देखते हैं कि

(100 – 2.25) रु. विक्रय मूल्य के लिए 2.25 रु. की हानि

∴ जब विक्रय मूल्य 3910 रु. हो तो

$$\text{हानि} = \frac{2.25}{97.75} \times 3910 = 90 \text{ रु.}$$

∴ दो घोड़े के संदर्भ में कुल हानि = 2 × 90 रु. = 180 रु.

उदा. 57: 19.50 रु. में किसी वस्तु को बेचने पर 30% का मुनाफा होता है। 40% मुनाफा कमाने के लिए उसे वस्तु का विक्रय मूल्य कितना बढ़ा देना चाहिए?

हल: क्रय मूल्य $= 19.50\left[\frac{100}{100+30}\right] = 19.50\left[\frac{100}{130}\right]$ रु.

$$\therefore \text{नया विक्रय मूल्य} = 19.50\left[\frac{100}{130}\right]\left[\frac{100+40}{100}\right] = 19.50\left[\frac{100}{130}\right]\left[\frac{140}{100}\right] \text{ रु.} = 21 \text{ रु.}$$

∴ विक्रय मूल्य में वृद्धि = 21 - 19.5 = 1.5 रु.

उदा. 58: एक व्यक्ति 150 रु. प्रति क्विंटल की दर से कुछ चावल खरीदता है। चावल का 10% बर्बाद हो जाता है। शेष को वह किस भाव से बेचे कि 20% का मुनाफा हो?

हल: '10% चावल बर्बाद हो जाता है' – इस उल्लेख को इस प्रकार समझें कि उसने 10% चावल रखकर चावल बेचा।

$$\therefore \text{प्रति क्विंटल क्रय मूल्य} = 150\left[\frac{100}{100-10}\right] \text{ रु.} = 150\left[\frac{100}{90}\right] \text{ रु.}$$

$$\therefore \text{विक्रय मूल्य} = 150\left[\frac{100}{90}\right]\left[\frac{100+20}{100}\right] \text{ रु.} = 150\left[\frac{120}{90}\right] \text{ रु.} = 200 \text{ रु.}$$

उदा. 59: किसी व्यक्ति ने 144 रु. में एक घड़ी खरीदी और क्रय मूल्य के बराबर प्रतिशत मुनाफा कमाया। घड़ी का क्रय मूल्य निकालें।

हल: मान लिया कि घड़ी का क्रय मूल्य = x रु.

तब, $x\left[\frac{100+x}{100}\right] = 144$

या, $x^2 + 100x - 14400 = 0$

या, $(x - 180)(x - 80) = 0$

$\therefore x = -180$ या 80

yoursmahboob

केवल धनात्मक मान ही हमारा उत्तर होना चाहिए।

∴ घड़ी की लागत – 80 रु.

नोट: यदि परीक्षा में ऐसे प्रश्न पूछे जाएं तो कम दिए गए विकल्पों को लेकर आगे बढ़ें।

उदा. 60: किसी वस्तु को एक खास कीमत पर बेचने से कितने प्रतिशत का मुनाफा होगा यदि उसी कीमत के $\frac{2}{3}$ पर बेचने से 20% की हानि होती है?

हल: विक्रय मूल्य का $\frac{2}{3}$ – क्रय मूल्य का (100 – 20)%

∴ विक्रय मूल्य = क्रय मूल्य का $\frac{80\times3}{2}$% = क्रय मूल्य का 120%

∴ प्रतिशत लाभ – 20%

उदा. 61: A एक कलम 20% मुनाफा लेकर, B को बेचता है, B इसे C को 10% लाभ लेकर बेचता है। C इसे D को 12.5% मुनाफा लेकर बेचता है; यदि D को 14.85 रु. भुगतान करना पड़ता है, तो A ने इसे कितने में खरीदा था?

हल: *मिश्र के नियम से*

A द्वारा भुगतान किया गया मूल्य – $14.85\left[\frac{100}{112.5}\right]\left[\frac{100}{110}\right]\left[\frac{100}{120}\right]$ रु. = 10 रु.

उदा. 62: सुरेश ने विक्रय मूल्य के $\frac{9}{10}$ रु. अदा कर एक घोड़ा खरीदा। उसने इसे विक्रय मूल्य का 8 प्रतिशत अधिक लेकर बेच दिया उसे कितने प्रतिशत का लाभ हुआ।

हल: क्रय मूल्य = $\frac{9}{10}$

विक्रय मूल्य – $\frac{108}{100} = \frac{27}{25}$

% लाभ = $\frac{\frac{27}{25}-\frac{9}{10}}{\frac{9}{10}}\times100 = \frac{270-225}{250\times9}\times10\times100 = 20$

∴ 20% मुनाफा हुआ।

उदा. 63: किसी रेडियो का अंकित मूल्य 480 रु. है। दुकानदार इस पर 10% छूट देने के बावजूद 8% मुनाफा कमाता है। यदि कोई छूट नहीं दिया जाए तो उसे कितने प्रतिशत का मुनाफा होगा ?

हल: विक्रय मूल्य – $480\left[\frac{100-10}{100}\right]$ – 432 रु.

yoursmahboob

क्रय मूल्य = 432 $\left[\frac{100}{100+8}\right]$ = 400 रु.

यदि कोई छूट न दिया जाए, तो विक्रय मूल्य = 480 रु.

$\therefore$ % लाभ = $\frac{480-400}{400} \times 100 = 20\%$

या

यदि आपको $z = x + y - \frac{xy}{100}$ समीकरण (सूत्र) याद है तो, यहाँ

z = % लाभ = 8%

x = % अधिक करके लिखा गया अंकित मूल्य

y = % छूट = 10%

$\therefore 8 = x - 10 - \frac{10x}{100}$

या, $\frac{9x}{10} = 18$

$\therefore x = 20\%$

इस प्रकार दुकानदार 20 प्रतिशत बढ़ाकर मूल्य अंकित करता है। यदि वह कोई छूट नहीं दे तो उसे इतने ही प्रतिशत का लाभ होगा।

$\therefore$ प्रतिशत लाभ = 20%

उदा. 64: किसी व्यापारी ने वास्तविक मूल्य पर 20% बट्टे (discount) के साथ एक घोड़ा खरीदा। उसने इसे वास्तविक मूल्य में 40% वृद्धि के साथ बेच दिया उसे कितने प्रतिशत का लाभ हुआ ?

हल: मान लिया कि वास्तविक क्रय मूल्य = 100 रु.

व्यापारी के लिए क्रय मूल्य = 100 − 100 का 20% = 80 रु.

व्यापारी का विक्रय मूल्य = 100 + 100 का 40% = 140 रु.

व्यापारी का मुनाफा (%) = $\frac{140-80}{80} \times 100 = 75\%$

यदि मध्यवर्ती चरणों को नजरंदाज कर दें तो हमें एक सूत्र प्राप्त होता है जिसके प्रयोग से हम इस प्रकार के प्रश्नों का हल कर सकते हैं।

$$= \frac{(100+40)-(100-20)}{(100-20)} \times 100 = 75\%$$

उपर्युक्त उदाहरण के अन्य रूप

उदा. 65: किसी व्यापारी ने वास्तविक मूल्य पर 20% बट्टे के साथ एक कार खरीदी। उसने वास्तविक

yoursmahboob

मूल्य से 40% अधिक दाम पर इसे बेच दिया। उसे वास्तविक मूल्य की तुलना में कितने प्रतिशत का लाभ हुआ ?

हल: मान लिया कि वास्तविक मूल्य = 100 रु

क्रय मूल्य $= 100\left[\frac{80}{100}\right] = 80$ रु.

विक्रय मूल्य = 80 + 80 का 40% = 112 रु.

$\therefore$ वास्तविक मूल्य पर प्रतिशत लाभ $= \frac{112 - 100}{100} \times 100 = 12\%$

अथवा

सूत्र से :

% मुनाफा $= 40 - 20 - \frac{40 \times 20}{100} = 12\%$

उदा. 66: यदि चावल 5.40 रु. प्रति किलो बेचा जाए तो 10% की हानि होती है। 20% मुनाफा कमाने के लिए उसे कितने रु. प्रति किलोग्राम के हिसाब से चावल बेचना होगा ?

हल: ***भिन्न के नियम से :***

विक्रय मूल्य $= 5.4\left[\frac{100}{100 - 10}\right]\left[\frac{100 + 20}{100}\right] = 5.4\left[\frac{120}{90}\right] = 7.2$ रु. प्रति कि. ग्रा.

उदा. 67: A 9000 रु. का एक घोड़ा B के हाथों 10 प्रतिशत हानि उठाकर बेच देता है। B उसी घोड़े पर 10 प्रतिशत मुनाफा लेकर पुनः A को बेच देता है। किसे लाभ होता है और किसे हानि? लाभ या हानि का मान भी प्राप्त करें।

हल: A घोड़ा बेचता है B को $9000\left[\frac{90}{100}\right] = 8100$ रु. में

फिर, B घोड़ा बेचता है A को $8100\left[\frac{110}{100}\right] = 8910$ रु. में

$\therefore$ A को हानि होती है (8910 − 8100) = 810 रु. क्यों
पूरे कारोबार में A ने केवल 9000 रु. की पूँजी लगाई है।

$\therefore$ A को प्रतिशत हानि $= \frac{810}{9000} \times 100 = 9\%$

B को 810 रु. का लाभ होता है, जबकि पूरे कारोबार में उसने मात्र 8100 रु. की पूँजी लगाई है

$\therefore$ B को प्रतिशत लाभ $= \frac{810}{8100} \times 100 = 10\%$

yoursmartboob

द्रुत विधि (सूत्र से):

ऐसी स्थिति से पहले खरीददार को हानि होती है और हानि का प्रतिशत

$\frac{\%\ \text{लाभ}\ (100 - \%\ \text{हानि})}{100}$ से ज्ञात किया जाता है।

उपर्युक्त प्रश्न में, A को प्रतिशत हानि $= \frac{10(100-10)}{100} = 9\%$

एवं हानि की राशि $= 9000\left(\frac{9}{100}\right) = 810$ रु.

उदा. 68: किसी व्यक्ति ने 500 रु. में 2 गायें खरीदीं। उसने पहले को 12% हानि सहकर बेचा एवं दूसरे को 8% लाभ लेकर। इस कारोबार में न तो उसे कोई लाभ होता है न ही हानि होती है। प्रत्येक गाय का विक्रय मूल्य बताएँ।

हल: यदि आप अपनी स्मरण शक्ति पर दबाव डालें तो पाएँगे कि,

पहले गाय का क्रय मूल्य $= \frac{500 \times 8}{12+8} = 200$ रु.

$\therefore$ पहले गाय का विक्रय मूल्य $= 200\left(\frac{100-12}{100}\right) = 176$ रु.

एवं दूसरे गाय का क्रय मूल्य $= \left(\frac{500 \times 12}{12+8}\right) = 300$ रु.

$\therefore$ दूसरे गाय का विक्रय मूल्य $= 300\left(\frac{108}{100}\right) = 324$ रु.

उदा. 69: कोई ग्वाला कुछ दूध खरीदता है। यदि वह इसे 5 रु. प्रति लिटर बेचता है तो 200 रु. की हानि होती है पर यदि वह इसे 6 रु. प्रति लिटर के भाव से बेचे तो 150 रु. का मुनाफा होता है। उसने कितना दूध खरीदा था?

हल: विक्रय मूल्य में अंतर $= (6 - 5)$ रु./लिटर $= 1$ रु./लिटर

यदि वह विक्रय मूल्य 1 रु. प्रति लिटर बढ़ा दे तो $(200 + 150) = 350$ रु. अधिक प्राप्त करता है।

$\therefore$ उसने $\frac{350\text{ रु.}}{1\text{ रु./लिटर}} = 350$ लिटर दूध खरीदा था।

द्रुत विधि (Quicker Method):

दूध की मात्रा $= \frac{\text{मूल्य का अंतर}}{\text{दर का अंतर}} = \frac{150 - (-200)}{6 - 5} = \frac{350}{1} = 350$ लिटर

उदा. 70: किसी वस्तु पर विक्रय मूल्य 275 रु. अंकित किया जाता है। दुकानदार इस अंकित मूल्य

yourmahboob

पर 5% की छूट देता है। दुकानदार को कुल 4.5% का लाभ होता है। दुकानदार को उस वस्तु के लिए कितना भुगतान करना पड़ा था ?

हल: हम जानते हैं कि यदि दुकानदार $x\%$ अधिक अंकित करे तो,

$$4.5 = x - 5 - \frac{5x}{100} \rightarrow x = 10\%$$

$$\therefore \text{ क्रय मूल्य} = 275\left(\frac{100}{100+10}\right) = 250 \text{ रु.}$$

उदा. 71: 9 किलोग्राम चावल का मूल्य उतना ही है जितना कि 4 किलोग्राम चीनी का। 14 किलोग्राम चीनी उतने ही में आता है, जितने में 1.5 कि. ग्रा. चाय। 2 किलोग्राम चाय की कीमत उतनी ही है जितनी 5 किलोग्राम कॉफी की। 11 किलोग्राम कॉफी की कीमत ज्ञात करें यदि 2.5 किलोग्राम चावल 12.50 रु. में मिलता हो।

हल: 2.5 किलोग्राम चावल की कीमत = 12.50 रु.

$$\therefore \text{ 9 किलोग्राम चावल की कीमत} = \frac{12.50}{2.5} \times 9 = 45 \text{ रु.}$$

9 किलोग्राम चावल की कीमत = 4 किलोग्राम चीनी की कीमत = 45 रु.

$$\therefore \text{ 14 किलोग्राम चीनी की कीमत} = \frac{45}{4} \times 14 = 1.5 \text{ किलोग्राम चाय की कीमत}$$

$$\therefore \text{ 2 किलोग्राम चाय की कीमत} = \frac{45 \times 14 \times 2}{4 \times 1.5} = 210 \text{ रु.}$$

= 5 किलोग्राम कॉफी की कीमत

$$\therefore \text{ 11 किलोग्राम कॉफी की कीमत} = \frac{210}{5} \times 11 = 462 \text{ रु.}$$

कॉलम विधि (By the Rule of Column)

इस तरह के प्रश्नों में उलझ जाना बड़ा स्वाभाविक है। इसलिए एक ऐसा तरीका इजाद किया गया है जिसे न केवल समझना आसान है बल्कि उसका अनुप्रयोग भी उतना ही सरल है।

जैसा कि नाम से ही स्पष्ट है, हम सूचनाओं को 'कॉलम' में सजा कर लिखते हैं। एक बार आप यदि कॉलम में सजाना सीख लेते हैं तो पलक झपकते ही आपकी समस्या हल हो जाएगी। सूचनाओं को कॉलम में सजाते वक्त निम्नलिखित दो बातों का ध्यान रखना चाहिए। (इस विधि को एक उदाहरण से समझना आसान रहेगा)।

एक उदाहरण लीजिए,

x किलोग्राम दूध की कीमत उतनी ही है जितनी y किलोग्राम चावल की,

z किलोग्राम चावल की कीमत उतनी ही है जितनी p किलोग्राम दाल की।

w किलोग्राम दाल की कीमत उतनी ही है जितनी r किलोग्राम गेहूँ की।

u किलोग्राम गेहूँ की कीमत उतनी ही है जितनी v किलोग्राम खाद्य तेल की।

yourmahboob

तो m किलोग्राम खाद्य तेल की कीमत बताएँ यदि n किलोग्राम दूध की कीमत A रु. हो।

उत्तर: I सूचनाओं को निम्नलिखित तरीके से समझें,

A रु. = n किलोग्राम दूध

x किलोग्राम दूध = y किलोग्राम चावल

z किलोग्राम चावल = p किलोग्राम दाल

w किलोग्राम दाल = t किलोग्राम गेहूँ

u किलोग्राम गेहूँ = v किलोग्राम खाद्य तेल

तो m किलोग्राम खाद्य तेल = ?

नोट: आँकड़ों को व्यवस्थित करते समय इस बात का ध्यान रखना चाहिए कि दाहिने कॉलम की पहली वस्तु, बायें कॉलम की दूसरी वस्तु होनी चाहिए। इसी तरह दाहिने कॉलम की दूसरी वस्तु बायें कॉलम की तीसरी वस्तु होनी चाहिए आदि। यही वजह है कि अंतिम सूचना (n किलोग्राम दूध की कीमत A रु. है) सबसे ऊपर लिखी गई है।

उत्तर: II प्रश्नवाचक चिह्न (?) पर ध्यान दें। इसे दाहिने कॉलम में लिखा गया है। इसलिए बाएँ कॉलम में लिखी गई राशियाँ अंश के रूप में परिणत होंगी एवं दाहिने कॉलम में लिखी गई राशियाँ हर के रूप में

$$? = \frac{A \times x \times z \times w \times u \times m}{n \times y \times p \times t \times v}$$

नोट: दूसरा ध्यान देने योग्य बात है प्रश्नवाचक चिह्न (?)। हमारा अंश एवं हर इस पर निर्भर है और इसलिए उत्तर भी इसी पर आधारित है।

मान लीजिए कि उपर्युक्त उदाहरण बदल दिया गया है। प्रश्न अंतिम वाक्य की जगह पर निम्नलिखित वाक्य हो। ***'n किलोग्राम दूध की कीमत निकालें यदि k किलोग्राम खाद्य-तेल की कीमत B रु. हो'।*** तब हमारा क्रम होगा (पहला बिन्दु को ध्यान में रखते हुए),

? = n किलोग्राम दूध

x कि. ग्रा. दूध = y कि. ग्रा. चावल

z कि. ग्रा. चावल = p कि. ग्रा. दाल

w कि. ग्रा. दाल = t कि. ग्रा. गेहूँ

u कि. ग्रा. गेहूँ = v कि.ग्रा. खाद्य तेल

m कि. ग्रा. खाद्य-तेल = B रु.

आपने देखा कि यहाँ प्रश्नवाचक चिह्न बायीं कॉलम में है इसलिए बायीं पक्ष अंश बनाएगा एवं बायीं पक्ष हर।

$$\therefore \text{अभीष्ट उत्तर} = ? = \frac{B \times v \times t \times p \times y \times n}{m \times u \times w \times z \times x}$$

yourmahboob

उम्मीद है कि आपने यह विधि समझ ली होगी। अब हमें उपर्युक्त उदाहरण पर लागू कीजिए :

हल (उदा.-71):

12.5 रु. — 2.5 किलोग्राम चावल
9 किलोग्राम चावल = 4 किलोग्राम चीनी
14 किलोग्राम चीनी — 1.5 किलोग्राम चाय
2 किलोग्राम चाय — 5 किलोग्राम कॉफी
11 किलोग्राम कॉफी — ?

$$? = \frac{12.5 \times 9 \times 14 \times 2 \times 11}{2.5 \times 4 \times 1.5 \times 5} = 462 \text{ रु.}$$

नोट: इसी प्रश्न को फिर से हल कीजिए यदि अंतिम वाक्य निम्नलिखित रूप में हो,
"2.5 किलोग्राम चावल की कीमत बताएँ यदि 11 किलोग्राम कॉफी की कीमत 462 रु. हो।"

उदा. 72: एक फल व्यापारी एक खास दर से आम बेचकर 25% का मुनाफा कमाता है। यदि वह प्रत्येक आम पर 1 रु. अधिक ले तो उसे 50% का मुनाफा होता है। बताएँ कि उसने शुरू में प्रति आम किस भाव से बेचे? प्रति आम क्रय मूल्य भी बताएँ।

हल: मान लिया कि एक आम का क्रय मूल्य = x रु.

$$\text{प्रथम विक्रय मूल्य} = x\left(\frac{100+25}{100}\right) \text{ रु.} = \frac{5x}{4} \text{ रु.}$$

यदि वह प्रति आम 1 रु. अधिक लेने से 50% मुनाफा कमाता है तो

$$\frac{5x}{4} + 1 = x\left(\frac{100+50}{100}\right) = \frac{3x}{2}$$

या, $\frac{3x}{2} - \frac{5x}{4} = 1$

$\therefore x = 4$ रु.

$\therefore$ प्रति आम क्रय मूल्य = 4 रु.

एवं प्रथम विक्रय मूल्य = $4\left(\frac{125}{100}\right) = 5$ रु.

द्रुत विधि (सूत्र से)

$$\text{क्रय मूल्य} = \frac{100 \times \text{अधिक वसूली}}{\text{मुनाफे का प्रतिशत अंतर}}$$

$$\text{एवं विक्रय मूल्य} = \frac{\text{अधिक वसूली } (100 - \text{\% पहला हानि})}{\text{मुनाफे का प्रतिशत अंतर}}$$

yoursmahboob

इस स्थिति में

क्रय मूल्य $= \frac{100 \times 1}{50 - 25} = 4$ रु.

विक्रय मूल्य $= \frac{1 \times 125}{50 - 25} = 5$ रु.

उदा. 73: एक फल व्यापारी किसी खास कीमत पर वस्तु को बेचकर 20% मुनाफा कमाता है। यदि वह प्रत्येक वस्तु पर 3 रु. अधिक लेने लगे तो 50% का लाभ होगा। उस वस्तु का क्रय मूल्य एवं प्रथम विक्रय मूल्य ज्ञात करें।

हल: सूत्र से

क्रय मूल्य $= \frac{100 \times 3}{50 - 20} = 10$ रु.

प्रथम विक्रय मूल्य $= \frac{3 \times (120)}{20} = 12$ रु.

उदा. 74: एक वेतनभोगी कर्मचारी प्रति वर्ष अपने आय का 10% बचाता है। यदि उसका वेतन 25% बढ़ जाए और वह तब भी 10% बचत करने की अपनी आदत बरकरार रखे तो उसकी बचत में कितने प्रतिशत की वृद्धि हुई ?

हल: यह बेहिचक कहा जा सकता है कि उसकी बचत में उतने ही प्रतिशत की वृद्धि होगी, जितने प्रतिशत की वृद्धि उसके वेतन में होती है

∴ अभीष्ट प्रतिशत = 25%

पर यदि उसके बचत की आदत (प्रतिशत) बदल जाए तो क्या होगा ? निम्नलिखित उदाहरण देखिए.

उदा. 75: एक व्यक्ति अपनी आय का 10% बचाता है। यदि उसकी आय 20% बढ़ जाए और वह 15% बचत करने लगे तो उसकी बचत में कितने प्रतिशत की वृद्धि हुई ?

हल: ***द्रुत विधि से (सूत्र से):***

बचत में प्रतिशत वृद्धि $= \frac{(100 + 20)15 - 10 \times 100}{10} = 80\%$

नोट: यदि वह 10% बचत की अपनी पुरानी आदत बरकरार रखता है तो

बचत में प्रतिशत वृद्धि $= \frac{120 \times 10 - 10 \times 100}{10} = 20\%$

यह उतना ही है, जितना कि आय में % वृद्धि

प्रमेय: यदि दो वस्तुओं में से प्रत्येक को समान भाव पर बेची जाए तथा इस प्रक्रिया में पहले पर P% का लाभ हो तथा दूसरे पर L% की हानि हो तो कुल प्रतिशत लाभ या हानि

$$= \frac{100(P - L) - 2PL}{(100 + P) + (100 - L)}$$

यदि चिह्न धनात्मक हो तो लाभ होगा, अन्यथा हानि होगी।

yoursmahboob

प्रमाण: मान लिया कि वस्तु A रु. में बेची जाती है।

पहली वस्तु पर P% का मुनाफा कमाता है, इसलिए पहली वस्तु का क्रय मूल्य

$$= A\left(\frac{100}{100+P}\right) \text{ रु.}$$

दूसरी वस्तु पर L% की हानि होती है तो दूसरी वस्तु का क्रय मूल्य $= A\left(\frac{100}{100-L}\right)$

$\therefore$ कुल क्रय मूल्य $= A\left(\frac{100}{100+P}\right) + A\left(\frac{100}{100-L}\right)$

$$= A\left(\frac{100(100-L)+100(100+P)}{(100+P)(100-L)}\right)$$

$$= \frac{100A[(100-L)+(100+P)]}{(100+P)(100-L)}$$

$\therefore$ कुल विक्रय मूल्य $= 2A$

$\therefore$ %लाभ या हानि $= \frac{\text{विक्रय मूल्य} - \text{क्रय मूल्य}}{\text{क्रय मूल्य}} \times 100$

$$= \frac{2A - \frac{100A[(100-L)+(100+P)]}{(100+P)(100-L)}}{\frac{100A[(100-L)+(100+P)]}{(100+P)(100-L)}} \times 100$$

$$= \frac{2(100+P)(100-L) - 100[(100-L)+(100+P)]}{100[(100-L)+(100+P)]} \times 100$$

$$= \frac{2\times100^2 + 200P - 200L - 2PL - 2\times100^2 + 100L - 100P}{(100+P)+(100-L)}$$

$$= \frac{100P - 100L - 2PL}{(100+P)+(100-L)} = \frac{100(P-L) - 2PL}{(100+P)+(100-L)}$$

नोट: विशेष स्थिति में जब $P = L$ हो तो,

$$\frac{100\times0 - 2P^2}{200} = -\frac{P^2}{100}$$

चूँकि चिह्न ऋणात्मक है, इसलिए हमेशा हानि ही होगी।

yoursmahboob

$$\text{हानि} = \frac{(\%\text{लाभ})^2}{100}$$

उदा. 76: दो घोड़ों में से प्रत्येक 720 रु. में बेचा जाता है। पहले घोड़े को 25% मुनाफे पर बेचा जाता है एवं दूसरे को बेचने से 25% की हानि होती है। इस कारोबार में कुल कितने प्रतिशत का लाभ या हानि हुई ?

हल: दो घोड़े का कुल विक्रय मूल्य = 2 × 720 = 1440 रु.

$\therefore$ पहले घोड़े का क्रय मूल्य = $720 \times \frac{100}{125} = 576$ रु.

दूसरे घोड़े का क्रय मूल्य = $720 \times \frac{100}{75} = 960$ रु.

दो घोड़े का कुल क्रय मूल्य = (576 + 960 =) 1536 रु.

$\therefore$ हानि = (1536 − 1440) रु. = 96 रु.

$\therefore$ % हानि = $\frac{96 \times 100}{1536} = 6.25\%$

सूत्र से (प्रमेय एवं नोट पर ध्यान दें) :

ऐसे प्रश्नों में जहाँ विक्रय मूल्य दिया गया हो तथा लाभ एवं हानि का प्रतिशत समान हो तो कुछ मिलाकर हानि ही होती है।

$\therefore$ %हानि = $\frac{(25)^2}{100} = \frac{625}{100} = 6.25\%$

नोट: उपर्युक्त उदाहरण एक विशेष स्थिति है, जहाँ लाभ एवं हानि का प्रतिशत समान है। पर यदि लाभ एवं हानि का प्रतिशत अलग-अलग हो, तो आप क्या करेंगे? निम्नलिखित उदाहरण देखिए।

उदा. 77: दो कारों में से प्रत्येक को बराबर मूल्य पर बेचा जाता है। पहले पर 10% का मुनाफा एवं दूसरे पर 7% की हानि होती है। कुल मिलाकर प्रतिशत हानि या लाभ ज्ञात करें।

हल: **प्रमेय से,**

$$\frac{100(10-7) - 2 \times 10 \times 7}{200 + 10 - 7} = \frac{160}{203}\% \text{ लाभ}$$

क्योंकि चिह्न धनात्मक है।

नोट: आपने इस बात पर ध्यान दिया होगा कि उदा. 76, उदा. 77 की एक विशेष स्थिति है।

उदा. 78: एक व्यक्ति 1710 रु. में दो घोड़े बेचता है। पहले का क्रय मूल्य दूसरे के विक्रय मूल्य के बराबर है। यदि पहला 10% की हानि पर तथा दूसरा 25% लाभ पर बेचा जाता है तो कुल लाभ या हानि (रुपए में) ज्ञात करें।

हल : मान लिया कि पहले घोड़े का क्रय मूल्य 100 रु. है। इन मानों को सारणी बनाकर प्रदर्शित करते हैं।

yoursmabboob

	पहला घोड़ा	दूसरा घोड़ा	कुल
क्रय मूल्य	100	$100\left(\frac{100}{125}\right) = 80$	180
विक्रय मूल्य	$100\left(\frac{90}{100}\right) = 90$	100	190

$\therefore$ क्रय मूल्य : विक्रय मूल्य = 180 : 190 = 18 : 19

$\therefore$ लाभ $= \frac{19-18}{19} \times 1710 = 90$ रु.

नोट: हमारी सलाह है कि आप इस प्रकार के प्रश्नों को ऊपर की तरह सारणी बनाकर व्यवस्थित कर लें। इससे आप बिना शंका के बहुत जल्द उत्तर तक पहुँच सकते हैं।

सूत्र विधि (Direct Formula) :

यदि आप को इस प्रश्न के लिए सूत्र की आवश्यकता है तो निम्नलिखित पर ध्यान दें :

$$\text{लाभ} = \frac{(100-10) - 100\left(\frac{100}{100+25}\right)}{100+(100-10)} \times 1710$$

$$= \frac{90-80}{190} \times 1710 = 90 \text{ रु.}$$

नोट: उपर्युक्त सूत्र में, 10% हानि को (100 – 10) से निरूपित किया जाता है एवं 25% लाभ को (100 + 25) से निरूपित किया जाता है। यदि हमें मान ऋणात्मक प्राप्त होता है तो इसका मतलब है "हानि होती है।"

उदा. 79: एक दुकानदार 400 रु. में एक मेज को बेचकर 25% का लाभ कमाता है। वह एक दूसरा मेज 10% की हानि पर बेचता है और कुल मिलाकर उसे न तो लाभ होता है और न ही हानि। दूसरे मेज का क्रय क्या है?

हल : पहले मेज पर लाभ $= 400\left(\frac{25}{125}\right) = 80$ रु.

$\therefore$ उसे दूसरे मेज पर 80 रु. की हानि होनी है।

(क्योंकि कुल मिलाकर उसे न तो लाभ होता है न ही हानि होती है।)

$\therefore$ दूसरे मेज का क्रय मूल्य $= \frac{80}{10} \times 100 = 800$ रु.

सूत्र विधि (Direct Formula) :

इस स्थिति में, जब न तो लाभ होता है न ही हानि, एवं पहले का विक्रय मूल्य दिया हुआ है, तो

yoursmahboob

दूसरे का क्रय मूल्य $= 400\left(\frac{100}{125}\right)\left(\frac{25}{10}\right) = 800$ रु.

उदा. 80: राकेश अपने प्रतिशत लाभ की गणना विक्रय मूल्य पर करता है जबकि रमेश अपने प्रतिशत लाभ की गणना क्रय मूल्य पर करता है। वे पाते हैं कि उनके लाभों का अंतर 100 रु. है। यदि दोनों का विक्रय मूल्य बराबर हो एवं दोनों 25% लाभ प्राप्त करते हों तो उनके विक्रय मूल्य ज्ञात करें।

हल : मान लेता कि दोनों का विक्रय मूल्य x रु. है।

अब, राकेश का क्रय मूल्य $= x\left(\frac{100-25}{100}\right) = \frac{3}{4}x$

एवं रमेश का क्रय मूल्य $= x\left(\frac{100}{100+25}\right) = \frac{4}{5}x$

राकेश का लाभ $= x - \frac{3}{4}x = \frac{x}{4}$

रमेश का लाभ $= x - \frac{4}{5}x = \frac{x}{5}$

अब, उनके लाभों का अंतर $= \frac{x}{4} - \frac{x}{5} = 100$ रु. (दिया हुआ है)

या, $\frac{x}{20} = 100 \quad \therefore x = 2000$ रु.

इस प्रकार, विक्रय मूल्य $= 2000$ रु.

द्रुत विधि (Quicker Method) :

$$\text{विक्रय मूल्य} = \frac{\text{लाभ में अंतर} \times 100 \times (100+25)}{(25)^2}$$

$$= \frac{100 \times 100 \times 125}{25 \times 25} = 2000 \text{ रु.}$$

नोट: क्या होगा यदि प्रतिशत लाभ अलग-अलग हो? इस स्थिति में निम्नलिखित सूत्र का अनुप्रयोग करें :

यदि राकेश को x% लाभ एवं रमेश को y% लाभ होता है, तो

$$\text{विक्रय मूल्य} = \frac{\text{लाभ में अंतर} \times 100 \times (100+y)}{(100)^2 - (100+y)(100-x)}$$

कृपया ध्यान दें कि जब प्रतिशत लाभ की गणना क्रय मूल्य पर की जाती है तो हम $(100 + y)$ का प्रयोग करते हैं एवं जब प्रतिशत लाभ की गणना विक्रय मूल्य पर की जाती है

yoursmanbooo

तो हम (100 – x) का प्रयोग करते हैं।

यदि हम x – y – 25 उपर्युक्त सूत्र में रखते हैं तो हमें पहले आलेख प्राप्त होता है।

उदा. 81: यदि एक वस्तु के अंकित मूल्य पर 10% की छूट दी जाती है तो दुकानदार को 20% का लाभ होता है। यदि वह उसी वस्तु पर 20% की छूट देता है तो उसका प्रतिशत लाभ ज्ञात करें।

हल : ***विस्तार विधि* (Detail Method) :**

माना कि अंकित मूल्य = 100 रु.

10% छूट पर विक्रय मूल्य = (100 – 10) रु. = 90 रु.

चूँकि वह 20% लाभ कमाता है, उसका क्रय मूल्य

$$= 90\left(\frac{100}{120}\right) = 75 \text{ रु}$$

अब, 20% की छूट पर, विक्रय मूल्य = (100 – 20) रु. = 80 रु.

$$\therefore \text{ उसका प्रतिशत लाभ} = \frac{80-75}{75}\times 100 = \frac{500}{75} = \frac{20}{3} = 6\frac{2}{3}\%$$

***द्रुत विधि* (Quicker Method) :**

अभीष्ट प्रतिशत लाभ = (100 + पहला प्रतिशत लाभ) ×

$$\left[\frac{100-\text{दूसरा प्रतिशत बट्टा}}{100-\text{पहला प्रतिशत बट्टा}}\right]-100$$

$$= (100+20)\left[\frac{100-20}{100-10}\right]-100$$

$$= 120\left(\frac{80}{90}\right)-100 = \frac{320}{3}-100 = \frac{20}{3} = 6\frac{2}{3}\%$$

उदा. 82: एक किसान 760 रु. में एक गाय एवं एक बछड़ा बेचता है और उसे गाय पर 10% का लाभ एवं बछड़ा पर उसे 25% का लाभ होता है। यदि वह गाय एवं बछड़ा को 767.50 रु. में बेचा होता तो उसे गाय पर 25% का लाभ एवं बछड़ा पर 10% का लाभ होता तो गाय एवं बछड़ा का अलग अलग क्रय मूल्य ज्ञात करें

हल : ***द्रुत विधि* (Quicker Method) :**

(i) गाय की कीमत के लिए

	गाय	बछड़ा
1.	110% +	125% = 760
2.	125% +	110% = 767.5

$$\text{गाय की कीमत} = \frac{767.5\times 125\% - 760\times 110\%}{(125\%)^2-(110\%)^2}$$

yoursmahboob

$$= \frac{\frac{4}{5}\times 767.50 - \frac{11}{10}\times 760}{(1.25)^2-(1.1)^2} = \frac{959.375-836}{(1.25+1.1)(1.25-1.1)}$$

$$= \frac{123.375}{2.35\times 0.15} = 350 \text{ रु.}$$

(ii) बछड़े की कीमत के लिए

	गाय	बछड़ा
1. विक्रय मूल्य	110% = 125% = 760	
2. विक्रय मूल्य	125% + 110% = 767.5	

$$\text{बछड़ा की कीमत} = \frac{760\times 125\% - 767.5\times 110\%}{(125\%)^2-(110\%)^2} = \frac{950-844.25}{2.35\times 0.15} = 300 \text{ रु.}$$

उदा. 83: किसी वस्तु के अंकित मूल्य पर 10% की छूट देने के बाद उस पर 20% का लाभ होता है। यदि अंकित मूल्य पर 20% की छूट दी जाती है तो प्रतिशत लाभ ज्ञात करें.

हल: ***विस्तार विधि* (Detail Method) :**

मान कि वस्तु का क्रय मूल्य 100 रु. है।

पहली स्थिति में विक्रय मूल्य $= 100\left(\frac{120}{100}\right)$ रु. $= 120$ रु

इसलिए, अंकित मूल्य $= 120\left(\frac{100}{100-10}\right)$ रु. $= \frac{400}{3}$ रु.

अब, दूसरी स्थिति में विक्रय मूल्य $= \frac{400}{3}\left(\frac{100-20}{100}\right) = \frac{320}{3}$ रु.

इसलिए प्रतिशत लाभ $= \frac{320}{3} - 100$ ($\because$ क्रय मूल्य = 100)

$$= \frac{20}{3} = 6\frac{2}{3}\%$$

***द्रुत विधि* (Quicker Method) :** इस प्रकार की स्थितियों में,

$$\%\ \text{लाभ} = (100 + \%\ \text{लाभ})\left[\frac{100-\%\ \text{दूसरी बढ़ती}}{100-\%\ \text{पहली बढ़ती}}\right] - 100$$

$$= 120\times\frac{80}{90} - 100 = \frac{320}{3} - 100 = \frac{20}{3} = 6\frac{2}{3}\%$$

उदा. 84: एक वस्तु को किसी खास मूल्य पर बेचने से कितना प्रतिशत का लाभ होगा यदि उस वस्तु को पहले विक्रय मूल्य की आधी कीमत पर बेचने से $12\frac{1}{2}\%$ की हानि होती हो?

yoursmahboob

हल: ***विस्तार विधि* (Detail Method) :**

मान कि पहले का विक्रय मूल्य = x रु.

अब, बाद का विक्रय मूल्य = $\frac{x}{2}$ रु.

जब विक्रय मूल्य = $\frac{x}{2}$ रु. है तो $12\frac{1}{2}\%$ की हानि होती है।

$\therefore$ क्रय मूल्य = $\frac{x}{2}\left(\frac{100}{100-12.5}\right) = \frac{100x}{175} = \frac{4x}{7}$

जब, विक्रय मूल्य x रु. है तो % लाभ

$$= \frac{x-\frac{4x}{7}}{\frac{4x}{7}} \times 100 = \frac{7x-4x}{4x} \times 100$$

$$= \frac{3}{4} \times 100 = 75\%$$

***द्रुत विधि* (Quicker Method) :**

अभीष्ट % लाभ = 100 - 2 × % हानि

$$= 100 - 2 \times 12\frac{1}{2} = 100 - 25 = 75\%$$

उदा. 85: एक वस्तु को जिसी खास मूल्य पर बेचने से कितना प्रतिशत का लाभ होगा यदि इस वस्तु को पहले विक्रय मूल्य की आधी कीमत पर बेचने से 45% की हानि होती है?

हल: ***द्रुत विधि* (Quicker Method) :**

% लाभ = 100 − 2 × % हानि = 100 − 2 × 45 = 10%

नोट: उदा. 85 के लिए और अधिक सामान्य सूत्र निम्नलिखित है।

यदि दूसरा विक्रय मूल्य मूल (Original) विक्रय मूल्य का $\frac{1}{x}$ हो तो,

% लाभ = [x(100 − % हानि) − 100]

यह सूत्र उदा. 84 एवं उदा. 85 में प्रयुक्त सूत्र के समान ही है।

इन दोनों स्थितियों में,

% लाभ = 2(100 − % हानि) − 100

= 200 − 2 × % हानि − 100

= 100 − 2 × % हानि

जो कि उदा. 84 एवं उदा. 85 में प्रयुक्त सूत्र के समान है।

yourmahboob

उदा. 86: एक वस्तु को किसी खास मूल्य पर बेचने से कितना प्रतिशत का लाभ होगा यदि उस वस्तु को पहले विक्रय मूल्य की एक तिहाई कीमत पर बेचने से 45% की हानि होती हो?

हल : उदा. 85 के नोट में दिए गए सामान्य सूत्र से,

$$\% \text{ लाभ} = 3(100 + \% \text{ हानि}) - 100$$

$$= 3\times(100-45) - 100 = 3 \times 55 - 100 = 65\%$$

उदा. 87: एक घोड़ा एवं एक गाय, घोड़े पर 25% का लाभ एवं गाय पर 20% का लाभ लेकर, 540 रु. में बेचा गया। यदि घोड़े एवं गाय को 538 रु. में बेचा जाता तो घोड़े पर 20% का लाभ एवं गाय पर 25% का लाभ होता। प्रत्येक की कीमत ज्ञात करें।

हल : **विस्तार विधि (Detail Method) :**

मान लिया कि एक गाय एवं एक घोड़े का क्रय मूल्य क्रमशः C रु. एवं H रु. है।

दोनों का विक्रय मूल्य = H का 125% + C का 120% = 540 रु.

या, $\frac{5}{4}H + \frac{6}{5}C = 540$ या, $25H + 24C = 540 \times 20$ ....(1)

दूसरी स्थिति में कुल विक्रय मूल्य = H का 120% + C का 125% = 538

या, $\frac{6}{5}H + \frac{5}{4}C = 538$

या, $24H + 25C = 538 \times 20$ ...(2)

(1) × 25 − (2) × 24 करने पर,

$(25)^2H - (24)^2H = (540 \times 20 \times 25) - (538 \times 20 \times 24)$

या, $49H = 11760$

∴ H = 240 रु.

(1) में H का मान रखने पर,

$24C = 540 \times 20 - 25 \times 240 = 4800$

∴ C = 200 रु.

∴ एक घोड़े की कीमत 240 रु. एवं एक गाय की कीमत 200 है।

द्रुत विधि (Quicker Method) :

उपर्युक्त स्थिति में, जब दोनों स्थितियों में % लाभ को परस्पर बदल दिया गया हो :

$$H + C = \frac{540+538}{125\% + 120\%} = \frac{540+538}{1.25+1.20} = \frac{1078}{2.45} = 440$$

एवं $H - C = \frac{540-538}{125\% - 120\%} = \frac{2}{1.25-1.20} = \frac{2}{0.05} = \frac{200}{5} = 40$

अब, उपर्युक्त दोनों समीकरणों को हल करने पर,

$$H = \frac{480}{2} = 240 \text{ रु.} \quad \text{एवं} \quad C = \frac{400}{2} = 200 \text{ रु.}$$

yousmahboob

उदा. 88: एक गाय को 1000 रु. में बेचने की तुलना में 1010 रु. में बेचने पर 5% अधिक का लाभ होता है। गाय की कीमत ज्ञात करें।

हल : मान कि क्रय मूल्य = x रु.

तो, $\frac{1000-x}{x}\times 100 = 5 = \frac{1010-x}{x}\times 100$

या, $\frac{100}{x}(1010-x-1000+x) = 5$

या, $\frac{100}{x}(10) = 5 \quad \therefore x = 200$ रु.

द्रुत विधि (Quicker Method) :

क्रय मूल्य का 5% = (1010 − 1000)रु. = 10 रु.

$\therefore$ क्रय मूल्य = $\frac{10\times 100}{5} = 200$ रु.

सूत्र विधि (Direct Formula) :

क्रय मूल्य = $\frac{100\times \text{विक्रय मूल्य में अंतर}}{\text{प्रतिशत लाभ में अंतर}} = \frac{100\times 10}{5} = 200$ रु.

उदा. 89: मैंने दो कैलकुलेटर 480 रु. में खरीदे। मैंने एक को 15% की हानि पर तथा दूसरे को 19% के लाभ पर बेचा तो पाया कि मैंने प्रत्येक कैलकुलेटर को एक ही मूल्य पर बेच दिया। हानि पर बेचे गए कैलकुलेटर की कीमत ज्ञात करें।

हल : मान लिया कि 15% की हानि पर बेचे गए कैलकुलेटर का क्रय मूल्य x रु. है।

तो, $x\left(\frac{100-15}{100}\right) = (480-x)\left(\frac{100+19}{100}\right)$

या, $85x = 480\times 119 - 119x$

या, $204x = 480\times 119$

$\therefore x = \frac{480\times 119}{204} = 280$ रु.

द्रुत विधि (Quicker Method) :

15% की हानि पर बेचे गए कैलकुलेटर की कीमत

$$= \frac{480(100+\%\ \text{लाभ})}{(100-\%\ \text{हानि})+(100+\%\ \text{लाभ})}$$

$$= \frac{480\times 119}{(100-15)+(100+19)} = \frac{480\times 119}{204} = 280 \text{ रु.}$$

yoursmahboob

एवं 19% लाभ पर बेचे कैल्कुलेटर की कीमत

$$= \frac{480(100 - \%\ \text{हानि})}{(100 - \%\ \text{हानि}) + (100 + \%\ \text{लाभ})}$$

$$= \frac{480 \times 85}{204} = 200\ \text{रु.}$$

उदा. 90: मैं दो मेज 1350 रु. में खरीदता हूँ। मैं एक को 6% की हानि पर तथा दूसरे को $7\frac{1}{2}\%$ लाभ पर बेचता हूँ। कुल मिलाकर मुझे न तो हानि हुई न ही लाभ। प्रत्येक मेज की कीमत क्या है?

हल: माना कि पहले मेज की कीमत x रु. है।

तो, $x\left(\frac{94}{100}\right) + (1350 - x)\left(\frac{107.5}{100}\right) = 1350$

या, $x\left(\frac{107.5 - 94}{100}\right) = 1350\left(\frac{107.5 - 100}{100}\right)$

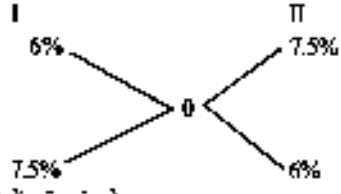
$\therefore\ x = \frac{1350 \times 7.5}{107.50 - 94} = \frac{1350 \times 7.5}{13.5} = 750$ रु.

इस प्रकार, मेजों की कीमत 750 रु. एवं (1350 − 750 =) 600 रु.

नोट: इस प्रश्न को मिश्रण विधि (Alligation Method) से भी हल किया जा सकता है

कुल लाभ = 0%

तो,



इसलिए मेजों की कीमतों का अनुपात = 7.5 : 6 = 5 : 4

$\therefore$ मेजों की कीमत $= \frac{1350}{5+4} \times 5 = 750$ रु. एवं

$= \frac{1350}{9} \times 4 = 600$ रु.

अभ्यास प्रश्न

1. 15 पैसे कीमत वाली एक पुस्तक 18 पैसे में बेची गई। इस प्रक्रिया में कितने प्रतिशत का लाभ या हानि हुई

yoursmartbooks

2. यदि 10 पैसे में 11 नारंगी खरीदकर 11 पैसे में 10 नारंगी की दर से बेचा जाए तो लाभ होगा या हानि। इसे प्रतिशत में व्यक्त करें।
3. एक बेईमान व्यापारी वस्तुओं को क्रय मूल्य पर बेचने का दावा करता है पर 1 किलोग्राम की जगह 875 ग्राम के बटखरे का इस्तेमाल करता है। उसे कितना प्रतिशत का मुनाफा हुआ?
4. एक व्यक्ति 60 पैसे प्रति लिटर के हिसाब से दूध खरीदकर उसमें एक-तिहाई पानी मिलाकर मिश्रण को 72 पैसे प्रति लिटर के हिसाब से बेच देता है। उसे _____ प्रतिशत का मुनाफा होगा।
5. 120 रु. कीमत वाली एक घड़ी को 15% हानि सहकर बेच दिया गया। घड़ी का विक्रय मूल्य _____ है।
6. एक रु. में 15 के भाव से अंडे खरीदे जाते हैं। उसे किस भाव से बेचा जाए ताकि 25% का लाभ हो?
7. यदि किसी वस्तु के 279 रु. में बेचने से 7% की हानि हो तो क्रय मूल्य बताएँ।
8. एक व्यक्ति के पास दो घड़ियाँ हैं। प्रत्येक घड़ी को वह 99 रु. में बेचता है। एक घड़ी पर उसे 10% का मुनाफा होता है एवं दूसरे पर 10% की हानि होती है। उसके लाभ या हानि का प्रतिशत बताएँ।
9. 153 रु. में सामान बेचकर कोई व्यक्ति 10% का घाटा सहता है। 20% मुनाफा कमाने के लिए उसे कितने में बेचना चाहिए?
10. 240 रु. में सामान बेचकर एक व्यापारी 25% मुनाफा कमाता है। इसी वस्तु को 216 रु. में बेचने से उसे कितना मुनाफा होगा?
11. एक खास दाम पर वस्तु को बेचने से कितने प्रतिशत का लाभ होगा यदि उसकी दो तिहाई कीमत पर बेचने से 20% की हानि होती हो?
12. रुपये में 32 के भाव से नारंगी बेचने पर 40% की हानि होती है। 20% लाभ कमाने के लिए रुपये में कितने नारंगी बेचना होगा?
13. 16 वस्तुओं का क्रय मूल्य 12 वस्तुओं के विक्रय मूल्य के बराबर है। प्रतिशत लाभ या हानि ज्ञात करें।
14. 33 मीटर कपड़ा बेचने पर, 11 मीटर कपड़े के विक्रय मूल्य के बराबर मुनाफा कमाता है। बताइए मुझे कितने प्रतिशत का लाभ हुआ?
15. किसी वस्तु को 350 रु. में बेचने पर 340 रु. में बेचने की तुलना में 5% अधिक मुनाफा होता है। वस्तु का क्रय मूल्य ज्ञात करें।
16. एक व्यक्ति निश्चित रुपए प्रति दर्जन के हिसाब से कुछ सेब खरीदता है, और उसको आठ गुनी रकम लेकर प्रति सैकड़ा के भाव से उसे बेच देता है। उसके लाभ या हानि का प्रतिशत ज्ञात करें।
17. कोई दुकानदार वस्तु की कीमत क्रय मूल्य से 20% बढ़ाकर अंकित करता है, पर नकद भुगतान करने वालों को 10% की छूट भी देता है। उसे कितने प्रतिशत का मुनाफा होगा?
18. कोई दुकानदार एक मेज खरीदता है। इस मेज का अंकित मूल्य है 200 रु. तथा इस पर उसे क्रमशः 10% एवं 15% का बट्टा भी मिलता है। उसने परिवहन पर 7 रुपए खर्च किए और मेज को 208 रु. में बेचा। उसे कितने प्रतिशत का मुनाफा हुआ?

yoursmanboob

19. कोई व्यापारी 75 रु. में अपना सामान बेचता है और इस पर उसे उतने ही प्रतिशत का मुनाफा होता है जितना कि उसका क्रय मूल्य है। तो उसका क्रय मूल्य क्या है?
20. मैंने एक बक्सा पेंसिल 5 रु. में 7 के भाव से खरीदा एवं 8 रु. में 9 के भाव से बेच दिया। इस प्रक्रिया में मुझे 44 रु. का मुनाफा हुआ। बक्से में कुल कितने पेंसिल थे ?
21. कोई बेईमान व्यापारी अपनी वस्तुओं को 20% लाभ पर बेचने का दावा करता है, पर 1 किलोग्राम की जगह 800 ग्राम का बटखरा इस्तेमाल करता है। उसे कुल कितने प्रतिशत का वास्तविक लाभ हुआ?
22. एक बेईमान व्यापारी अपनी वस्तुओं को 10% घाटे पर बेचने का दावा करता है पर 1 कि.ग्रा. के बटखरे की जगह 750 ग्राम के बटखरे का इस्तेमाल करता है। उसे कितने प्रतिशत का वास्तविक लाभ या हानि होती है ?
23. 1 रु. प्रति किलोग्राम की दर से नमक बेचने से एक व्यक्ति को 10% का मुनाफा होता है। 21% मुनाफा कमाने के लिए उसे नमक का भाव कितना बढ़ा देना चाहिए?
24. एक ग्वाला समान आकार वाले 10 पीपे दूध खरीदता है। यदि वह 5 रु. प्रति लिटर के हिसाब से दूध बेचे तो उसे 200 रु. की हानि होती है जबकि दूध को 6 रु. प्रति लिटर के हिसाब से बेचने पर उसे कुल 150 रु. का मुनाफा होगा। प्रत्येक पीपे में कितना लिटर दूध भरा हुआ है?
25. एक कलाई घड़ी तीन कलाइयाँ बदलती है और प्रत्येक को 25% का मुनाफा होता है। यदि तीसरा व्यक्ति इसे 250 रु. में बेचता हो तो पहले ने इसे कितने में खरीदा ?
26. 60 रु. में किसी वस्तु को बेचने से क्रय मूल्य का $\frac{1}{7}$ के बराबर हानि होती है। इसे 77 रु. में बेचने से कितने प्रतिशत का लाभ या हानि होगी?
27. मैंने एक पुस्तक 7% मुनाफा लेकर बेची। यदि 7.50 रु. अधिक में बेचा होता तो 22% का मुनाफा होता। क्रय मूल्य बताएँ।
28. यदि केले के दाम में 40% की कमी आ जाए तो 40 रु. में 64 केले अधिक मिलेंगे। दाम में कमी के बाद प्रति दर्जन केले की कीमत क्या है ?
29. एक व्यक्ति कोई सामान सूची मूल्य (list price) का $\frac{3}{4}$ पर खरीद लेता है तथा सूची मूल्य के डेढ़ गुनी कीमत पर बेच देता है तो उसे कितने प्रतिशत का लाभ हुआ ?
30. रुपए में 15 के हिसाब से पेंसिल बेचने पर 9% की हानि होती है। रुपए में कितने पेंसिल बेचे जाएँ ताकि 5% का मुनाफा हो?
31. यदि सूची मूल्य से 4% अधिक कीमत पर वस्तु बेची जाए तो 20% का मुनाफा होता है। सूची मूल्य क्रय मूल्य से कितने प्रतिशत ज्यादा है ?
32. एक घड़ी 10% हानि उठाकर बेच दी गई। यदि इसे 70 रु. अधिक लेकर बेचा गया होता तो 4% का मुनाफा होता। घड़ी का क्रय मूल्य बताएँ।
33. कोई व्यक्ति एक सामान 5% मुनाफा लेकर बेचता है। यदि उसने इसे 5% कम कीमत पर खरीद कर 1 रु. कम में बेचा होता तो उसे 10% का मुनाफा होता। क्रय मूल्य बताएँ।

yousmartboob

34. मैंने 480 रु. में दो कैलकुलेटर खरीदा। एक को 15% घाटा सहकर एवं दूसरे को 19% मुनाफा लेकर बेच दिया। पता चला कि दोनों घड़ियों का विक्रय मूल्य समान रहा। घाटा सहकर बेचे गए कैलकुलेटर का क्रय मूल्य निकालें।

35. 1350 रु. में मैंने दो मेजें खरीदीं। इनमें से एक मेज को मैंने इस तरह बेचा कि 6% का घाटा हुआ दूसरे को इस तरह से बेचा कि $7\frac{1}{2}$% का लाभ हुआ। कुल मिलाकर न तो मुझे लाभ हुआ न हानि हुई। प्रत्येक मेज का क्रय मूल्य क्या था?

उत्तर

1. $\%\text{लाभ} = \frac{18-15}{15}\times 100 = 20\%$

2. 11 10
   11 10

   $\frac{11\times 11 - 10\times 10}{10\times 10}\times 100\% = 21\%$ लाभ

   ∴ चिह्न धनात्मक है।

3. $\%\text{लाभ} = \frac{\text{सही वजन} - \text{गलत वजन}}{\text{गलत वजन}}\times 100$

   $= \frac{\text{सही वजन} - \text{गलत वजन}}{\text{गलत वजन}}\times 100$

   $\frac{1000-875}{875}\times 100 = \frac{100}{7} = 14\frac{2}{7}\%$

4. जब उसने एक-तिहाई पानी मिला दिया, तो एक लिटर अशुद्ध दूध की कीमत

   $= 60\left(\frac{3}{4}\right)$ पैसे $= 45$ पैसे ..... (*)

   ∴ % मुनाफा $= \frac{72-45}{45}\times 100 = 60\%$

नोट: (*) दूध की मात्रा $= 1+\frac{1}{3} = \frac{4}{3}$ लिटर

$\frac{4}{3}$ लिटर दूध का क्रय मूल्य = 60 पैसे।

भिन्न के नियम से 1 लिटर की कीमत 60 पैसे से कम होगी, इसलिए हमने 60 में ऐसे भिन्न $\left(\frac{3}{4}\right)$ से गुणा किया, जिसका मान 1 से कम है।

yoursmahboob

5. **भिन्न के नियम से,**

विक्रय मूल्य = $120\left(\frac{85}{100}\right)$ = 102 रु.

6. **भिन्न के नियम से,** $15\left(\frac{100}{125}\right)$ = 12 रु.

7. **भिन्न के नियम से,**

क्रय मूल्य = $279\left(\frac{100}{100-7}\right)$ = 300 रु.

8. ऐसी स्थिति में हमेशा हानि ही होती है तथा

हानि का प्रतिशत = $\frac{(10)^2}{100}$ = 1%

9. **भिन्न के नियम से,** $153\left(\frac{100}{90}\right)\left(\frac{120}{100}\right)$ = 204 रु.

10. क्रय मूल्य = $240\left(\frac{100}{125}\right)$ = 192 रु.

∴ % लाभ = $\frac{216-192}{192}\times 100 = \frac{25}{2} = 12\frac{1}{2}\%$

11. मान लिया कि क्रय मूल्य = 100 रु.

वास्तविक विक्रय मूल्य का $\frac{2}{3}$ = 100 - 100 का 20 % = 80 रु.

∴ वास्तविक विक्रय मूल्य = $\frac{80\times 3}{2}$ = 120 रु.

∴ % लाभ = $\frac{120-100}{100}\times 100$ = 20%

सूत्र से:

प्रतिशत लाभ या हानि = $\left(\frac{120-20}{\frac{2}{3}}\cdot 100\right)\%$ चिह्न को धनात्मक या ऋणात्मक होने के अनुसार

= $\frac{80}{\frac{2}{3}}$ 100 = 20% लाभ

yoursmartboob

12. *मिश्र के नियम से :*

चूँकि उसे हानि होती है, इसलिए उसने एक रुपए में अपेक्षाकृत कम संतरे खरीदे होंगे। इसलिए

एक रुपए में खरीदे गए संतरे की संख्या = $32\left(\frac{60}{100}\right)$

20% मुनाफा कमाने के लिए उसे एक रुपए में अपेक्षाकृत कम संतरे बेचने चाहिए। और संतरे

की वह संख्या है $32\left(\frac{60}{100}\right)\left(\frac{100}{120}\right) = 16$

13. मान लिया कि उसने 16 × 12 रु. निवेश किया।

तब, 1 वस्तु का क्रय मूल्य = $\frac{16\times12}{16} = 12$ रु.

1 वस्तु का विक्रय मूल्य = $\frac{16\times12}{12} = 16$ रु.

$\therefore$ % मुनाफा = $\frac{16-12}{12}\times100 = \frac{100}{3} = 33\frac{1}{3}\%$

द्रुत विधि :

% मुनाफा = $\left(\frac{\text{खरीदे गए वस्तुओं की संख्या} - \text{बेचे गए वस्तुओं की संख्या}}{\text{बेचे गए वस्तुओं की संख्या}}\right)\times100$

इस प्रश्न के लिए, % मुनाफा = $\frac{16-12}{12}\times100 = \frac{100}{3} = 33\frac{1}{3}\%$

14. मान लिया कि विक्रय मूल्य प्रति मीटर = 1 रु.

$\therefore$ 33 मीटर का विक्रय मूल्य = 33 रु.

लाभ = 11 रु.

$\therefore$ 33 मीटर का क्रय मूल्य = (33 − 11 =) 22 रु.

$\therefore$ % मुनाफा = $\frac{11}{22}\times100 = 50\%$

द्रुत विधि **(Quicker Method) :**

% मुनाफा = $\frac{11}{33-11}\times100 = 50\%$

नोट: उपर्युक्त दोनों प्रश्नों के लिए कभी भी विस्तृत विधि का इस्तेमाल नहीं करें। सूत्र याद रखें एवं उसी का प्रयोग करें

15. मुनाफे में 5% का अंतर = मुनाफे में 10 रु. का अंतर

$\therefore 100\% = \frac{10}{5}\times100 = 200$ रु.

yoursmahboob

सूत्र विधि (Quicker Method) :

$$\text{क्रय मूल्य} = \frac{100 \times (\text{विक्रय मूल्य में अंतर})}{\text{प्रतिशत लाभ में अंतर}}$$

$$= \frac{100(350 - 340)}{5} = 200 \text{ रु.}$$

16. मान लिया कि क्रय मूल्य प्रति दर्जन = x रु.

$\therefore \frac{100x}{12}$ रु. प्रति सैकड़ा

तथा, विक्रय मूल्य = $8x$ रु. प्रति सैकड़ा

$$\therefore \% \text{ मुनाफा} = \frac{8x - \frac{100x}{12}}{\frac{100x}{12}} \times 100 = \frac{96x - 100x}{12 \times 100x} \times 100 \times 12 = -4\%$$

$\because$ चिह्न ऋणात्मक है, इसलिए उसे घाटा हुआ।

द्रुत विधि (Quicker Method) :

प्रतिशत लाभ या हानि = 8 × दर्जन सैकड़ा

$= 96 - 100 = -4\%$

$\because$ चिह्न ऋणात्मक है, इसलिए 4% की हानि हुई।

17. **सूत्र विधि से :**

$$\% \text{ मुनाफा} = 20 - 10 - \frac{20 \times 10}{100} = 20 - 10 - 2 = 8\%$$

18. एकल समतुल्य बट्टा (Single Equivalent Discount) $= 10 + 15 - \frac{10 \times 15}{100} = 23.5\%$

$\therefore$ दुकानदार का क्रय मूल्य = 200 − 200 का 23.5% = 153 रु.

कुल लागत = 153 + 7 = 160 रु.

$$\therefore \% \text{ लाभ} = \frac{208 - 160}{160} \times 100 = 30\%$$

द्रुत विधि (Quicker Method) :

$$\text{क्रय मूल्य} = 200\left(\frac{90}{100}\right)\left(\frac{85}{100}\right) = 153 \text{ रु.}$$

$\therefore$ कुल लागत = 153 + 7 = 160 रु.

$$\therefore \% \text{ लाभ} = \frac{208 - 160}{160} \times 100 = 30\%$$

yoursmahboob

19. $x + x$ का $x\% = 75$

या, $x^2 + 100x - 7500 = 0$

या, $(x - 50)(x + 150) = 0$

$\therefore x = 50$

या, $x = -150$

ऋणात्मक मान को छोड़ने पर

क्रय मूल्य = 50 रु.

20. 7 पेंसिल का क्रय मूल्य = 5 रु.

$\therefore$ 7 पेंसिल का विक्रय मूल्य $= \frac{8}{9} \times 7 = \frac{56}{9}$ रु.

$\therefore$ 7 पेंसिल का मुनाफा $= \frac{56 - 45}{9} = \frac{11}{9}$ रु.

$\therefore$ कुल पेंसिल $= \frac{7 \times 9}{11} \times 44 = 252$ रु.

21. मान लिया कि 1000 ग्राम का क्रय मूल्य = 100 रु.

800 ग्राम का विक्रय मूल्य = 100 + 100 का 20% = 120 रु.

या, 1000 ग्राम का विक्रय मूल्य $= \frac{120}{800} \times 100 = 150$ रु.

$\therefore$ % मुनाफा $= \frac{150 - 100}{100} \times 100 = 50\%$

द्रुत विधि (Quicker Method) :

% मुनाफा = (100 + % मुनाफा) $\left(\frac{\text{सही वजन}}{\text{गलत वजन}}\right) - 100$

$= 120\left(\frac{1000}{800}\right) - 100 = 50\%$

22. मान लिया कि 1000 ग्राम का क्रय मूल्य = 100 रु.

750 ग्राम का विक्रय मूल्य = 90 रु.

($\because$ 10% की हानि होती है)

या, 1000 ग्राम का विक्रय मूल्य $= \frac{90}{750} \times 1000 = 120$ रु.

$\therefore$ % मुनाफा $= \frac{120 - 100}{100} \times 100 = 20\%$

yoursmahboob

द्रुत विधि (Quicker Method) :

$$\% \text{ लाभ या हानि} = (100 - 10)\left(\frac{1000}{750}\right) - 100 = 20\%$$

$\because$ चिह्न धनात्मक है, इसलिए 20 प्रतिशत का मुनाफा हुआ।

23. ***भिन्न के नियम से :***

$$\text{विक्रय मूल्य} = 1\left(\frac{100}{110}\right)\left(\frac{121}{100}\right) = 1.10 \text{ रु.}$$

$\therefore$ उसे मूल्य में 0.1 रु. या 10 पैसे की वृद्धि करनी चाहिए।

24. मान लिया कि उसके पास कुल x लिटर दूध है।

$\therefore 5x + 200 = 6x - 150$

या, $x(6-5) = 200 + 150$

$\therefore x = 350$ लिटर

$\therefore$ प्रत्येक पीपा में $\frac{350}{10} = 35$ लिटर दूध है।

द्रुत विधि (Quicker Method) :

$$\text{दूध का कुल परिमाण} = \frac{\text{राशि में अंतर}}{\text{दरों में अंतर}} = \frac{150-(-200)}{6-5} = 350 \text{ लिटर}$$

नोट: राशि में अंतर = मुनाफा + हानि = 150 + 200 = 350

25. ***भिन्न के नियम से :***

पहले $250\left(\frac{100}{125}\right)\left(\frac{100}{125}\right)\left(\frac{100}{125}\right)$ में खरीदा गया।

$$= 250\left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{4}{5}\right) = 125 \text{ रु.}$$

26. $\text{क्रय मूल्य} = \frac{\text{विक्रय मूल्य}}{1-\frac{1}{7}} = \frac{60\times 7}{6} = 70$ रु. $\therefore \%$ मुनाफा $= \frac{77-70}{70}\times 100 = 10\%$

27. **द्रुत विधि (Quicker Method) :**

$$\text{क्रय मूल्य} = \frac{7.5\times 100}{\text{प्रतिशत लाभ में अंतर}} = \frac{7.5\times 100}{22-7} = 30 \text{ रु.}$$

28. 40 रु. का 40 प्रतिशत अर्थात् 16 रु. में उसने 64 केले अधिक खरीदे।

$\therefore$ घटा हुआ मूल्य $= \frac{16}{64}\times 12 = 3$ रु. प्रति दर्जन

yoursmahboob

29. माना लिया कि सूची मूल्य = 100 रु.

$\therefore$ क्रय मूल्य $= \frac{3}{4} \times 100 = 75$ रु. विक्रय मूल्य $= \frac{3}{2} \times 100 = 150$ रु.

$\therefore$ % मुनाफा $= \frac{150-75}{75} \times 100 = 100\%$

सूत्र विधि (Quicker Method) :

$$\% \text{ मुनाफा} = \frac{\left(1+\frac{1}{2}\right)-\frac{3}{4}}{\frac{3}{4}} \times 100 = 100\%$$

30. ***भिन्न के नियम से:***

उसने 1 रुपया में $15\left(\frac{100-9}{100}\right)$ पेंसिल खरीदा।

5% मुनाफा कमाने के लिए उसे 1 रुपया में

$15\left(\frac{91}{100}\right)\left(\frac{100}{105}\right) = 13$ पेंसिल बेचना चाहिए.

31. माना लिया कि क्रय मूल्य = 100 रु.

$\therefore$ वास्तविक विक्रय मूल्य = 100 + 100 का 20% = 120 रु.

अंकित मूल्य $= 120 \times \frac{100}{100-4} = \frac{120 \times 100}{96} = 125$ रु.

$\therefore$ अंकित मूल्य $= \frac{125-100}{100} \times 100 = 25\%$

$\therefore$ क्रय मूल्य से 25% अधिक।

द्रुत विधि (Quicker Method) :

हम निम्नलिखित सूत्र का इस्तेमाल कर सकते हैं :

$$z = x - y - \frac{xy}{100}$$

जहाँ z = % मुनाफा = 20%

x = क्रय मूल्य से % अधिक अंकित = ?

y = बट्टा = 4%

या $20 = x - 4 - \frac{4x}{100}$ या $x = \frac{24 \times 100}{96} = 25\%$

yoursmahboob

32. कोशिश कीजिए। प्रश्न 27 में दिए गए विधि का अनुसरण करें।

33. मान लिया कि क्रय मूल्य = x

$$\therefore x\left(\frac{95}{100}\right)\left(\frac{110}{100}\right) = x\left(\frac{105}{100}\right)$$

या, $x = \frac{100 \times 100}{105 \times 100 - 95 \times 100} = 200$

∴ क्रय मूल्य = 200 रु.

34. मान लिया कि 15% घाटा सहकर बेचे गए कैलकुलेटर का क्रय मूल्य = x रु.

तो, $x\left(\frac{100-15}{100}\right) = (480 - x)\left(\frac{100+19}{100}\right)$

या, $85x = 480 \times 119 - 119x$

या, $204x = 480 \times 119$

$$\therefore x = \frac{480 \times 119}{204} = 280 \text{ रु.}$$

द्रुत विधि (Quicker Method) :

15% हानि सहकर बेचे गए कैलकुलेटर का क्रय मूल्य

$$= \frac{480(100 + \%\text{ मुनाफा})}{(100 - \%\text{ हानि}) + (100 + \%\text{ लाभ})}$$

$$= \frac{480 \times 119}{(100 - 15) + (100 + 19)}$$

$$= \frac{480 \times 119}{204} = 280 \text{ रु.}$$

तथा, 19% मुनाफा पर बेचे गए कैलकुलेटर का क्रय मूल्य

$$= \frac{480(100 - \%\text{ हानि})}{(100 - \%\text{ हानि}) + (100 + \%\text{ लाभ})}$$

$$= \frac{480 \times 85}{204} = 200 \text{ रु.}$$

35. मान लिया कि पहले गेंद की कीमत = x रु.

$$\therefore x\left(\frac{94}{100}\right) + (1350 - x)\left(\frac{107.5}{100}\right) = 1350 \text{ रु.}$$

या, $x\left(\frac{107.5 - 94}{100}\right) = 1350\left(\frac{107.5 - 100}{100}\right)$

yoursmahboob

$\therefore\ x = \frac{1350 \times 7.5}{107.5 - 94} = \frac{1350 \times 7.5}{13.5} = 750$ रु.

$\therefore$ मेज की कीमतें 750 रु. एवं (1300 − 750) रु. = 600 रु. हैं।

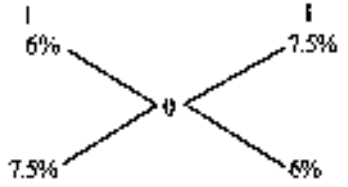
द्रुत विधि (Quicker Method) :

मेज की कीमतें $= \frac{1350 \times 7.5}{7.5 + 6}$ रु. एवं $= \frac{1350 \times 6}{7.5 + 6}$ रु. = 750 रु. एवं 600 रु.

नोट: इस प्रश्न को निम्नवत् लिखे से भी हल किया जा सकता है।

कुल मुनाफा = 0%

$\therefore$



$\therefore$ मेज के क्रय मूल्यों का अनुपात = 7.5 : 6, 5 : 4

$\therefore$ मेज की कीमतें $= \frac{1350}{5+4} \times 5 = 750$ रु.

एवं $\frac{1350}{9} \times 4 = 600$ रु.

yoursmahboob

साधारण ब्याज
(Simple Interest)

ब्याज (Interest): उधार ली हुई रकम के एवज में ऋणदाता द्वारा ऋणी को दी जानेवाली राशि ब्याज कही जाती है।

ऋण की राशि को **मूलधन (Principal)** कहते हैं। ब्याज की गणना प्रति 100 रु. रकम के लिए वर्ष के अंत में अदा की जाने वाली ब्याज के रूप में की जाती है। इसे 'दर प्रतिशत प्रति वर्ष' (rate per cent per annum) कहते हैं।

प्रतिवर्ष (per annum) का मतलब है एक साल के लिए। अक्सर 'प्रतिवर्ष' (Per annum) शब्द को छोड़ दिया जाता है. इस प्रकार '6 प्रतिशत' का मतलब है कि 100 रु. कर्ज के लिए वर्ष के अंत में 6 रु. ब्याज चुकाया जाता है।

मूलधन एवं ब्याज के योगफल को **मिश्रधन (Amount)** कहते हैं

ब्याज सहमति के मुताबिक प्रायः वार्षिक, अर्द्धवार्षिक या त्रैमासिक पर अदा किया जाता है.

ब्याज दो प्रकार के होते हैं: साधारण ब्याज (Simple Interest) एवं चक्रवृद्धि ब्याज (Compound Interest)

जब वास्तविक मूलधन (Original Principal) पर किसी भी अवधि के लिए ब्याज की गणना की जाती है तो इसे साधारण ब्याज कहते हैं।

चक्रवृद्धि ब्याज को अगले अध्याय में परिभाषित किया जाएगा।

साधारण ब्याज ज्ञात करने के लिए मूलधन को वर्षों की संख्या एवं दर प्रतिशत से गुणा करने पर जो परिणाम प्राप्त होता है उसमें 100 से भाग देना पड़ता है। इसे निम्नलिखित रूप में भी लिखा जा सकता है।

$$\text{साधारण ब्याज } (I) = \frac{P \times t \times r}{100}; \quad \text{जहाँ}$$

I = ब्याज, P = मूलधन, t = वर्ष की संख्या, r = दर प्रतिशत

उदा. 1: 400 रु. का ब्याज 5 वर्ष में 6 प्रतिशत की दर से कितना होगा ?

हल: साधारण ब्याज $= \frac{400 \times 5 \times 6}{100} = 120$ रु.

प्रदत्त दिनों की संख्या के लिए ब्याज की गणना

जब समय दिनों की संख्या या वर्ष एवं दिनों की संख्या के रूप में दी गई हो तो 365 दिन को एक वर्ष मानकर गणना की जाती है पर यदि समय महीना एवं दिन के रूप में व्यक्त हो तो 12 महीने को एक वर्ष एवं 30 दिन को एक महीना मानकर गणना की जाती है। जिस दिन कर्ज लिया जाता है, गणना में उस दिन को शामिल नहीं किया जाता है तथा जिस दिन रुपए लौटाए जाते हैं, उस दिन को गणना में शामिल किया जाता है।

yourmahboob

उदा. 2: 306.25 रु. का साधारण ब्याज $3\frac{3}{4}$% प्रतिवर्ष की दर से 3 मार्च से 27 जुलाई के बीच कितना होगा ?

हल : साधारण ब्याज $= 306\frac{1}{4} \times \frac{146}{365} \times \frac{15}{4} \times \frac{1}{100}$ रु.

$= \frac{1225}{4} \times \frac{2}{5} \times \frac{15}{4} \times \frac{1}{100}$ रु.

$= \frac{147}{32}$ रु. = 4.59 रु. (लगभग)

नोट: 73, 146, 219 एवं 292 दिन क्रमशः $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$ एवं $\frac{4}{5}$ वर्ष के बराबर है।

P मूलधन के लिए r% प्रति वर्ष की दर से d दिनों का ब्याज

$$I = P \times r \times \frac{d}{365} \times \frac{1}{100} = P \times d \times \frac{2r}{73000}$$

इसलिए विभिन्न मूलधनों के लिए विभिन्न समयावधि तक समान ब्याज-दर से ब्याज की गणना करने के लिए निम्नलिखित नियम निकाला जा सकता है :

नियम: प्रत्येक मूलधन में प्रदत्त दिनों की संख्या से गुणा कीजिए तथा इन गुणनफल को आपस में जोड़ दीजिए। इस योगफल में दर के दुगुना से गुणा कीजिए तथा इस प्रकार प्राप्त गुणनफल में 73000 से भाग दे दीजिए।

ब्याज की गणना से सम्बन्धित प्रश्नों में P, t, r एवं I का इस्तेमाल किया जाता है। यदि कोई भी तीन दिए गए हों तो चौथा आसानी से निकाला जा सकता है।

मूलधन निकालना

$\because I = \frac{P t r}{100}$ $\therefore$ $\boxed{P = \frac{100 \times I}{t \times r}}$

उदा. 3: यदि किसी धन का ब्याज $3\frac{3}{4}$ वर्षों में $2\frac{2}{2}$ प्रतिशत की दर से 141 रु. होता हो तो धन (मूलधन) क्या है ?

हल : मान लिया कि अभीष्ट धन = P, तब

$$P = \frac{100 \times 141}{3\frac{1}{4} \times 2\frac{1}{2}} = \frac{100 \times 143 \times 4 \times 2}{13 \times 5} = 1760 \text{ रु.}$$

yoursmahboob

प्रतिशत दर की गणना

$$\because I = \frac{P \times r \times t}{100} \quad \therefore \boxed{r = \frac{100 \times I}{P \times t}}$$

उदा. 4: 468.75 रु. को साधारण ब्याज पर उधार दिया गया। 1 साल 8 महीने के बाद यह धन बढ़कर 500 रु. हो गया तो ब्याज की प्रतिशत दर बताएँ

हल : यहाँ P = 468.75 रु.

$$t = 1\frac{2}{3} \text{ या } \frac{5}{3} \text{ वर्ष}$$

$$I = (500 - 468.75) = 31.25 \text{ रु.}$$

$$\therefore \text{ प्रतिशत दर} = \frac{100 \times 31.25}{468.75 \times \frac{5}{3}} = 100 \times \frac{3125}{46875} \times \frac{3}{5} = 4 \text{ उत्तर}$$

उदा. 5: A ने B को दो वर्षों के लिए 600 रु. उधार दिया तथा C को 4 वर्षों के लिए 150 रु. कर्ज दिया दोनों से कुल मिलकर 90 रु. ब्याज की प्राप्ति हुई यदि ब्याज की गणना साधारण दर से की गई हो तो ब्याज की दर बताएँ।

हल : 2 वर्षों के लिए 600 रु. = 1 वर्ष के लिए 1200 रु.

तथा, 4 वर्षों के लिए 150 रु. = 1 वर्ष के लिए 600 रु.

$\therefore$ ब्याज = 90 रु.

$$\therefore \text{ दर} = \frac{90 \times 100}{1800 \times 1} = 5\% \text{ उ.}$$

समय की गणना करना

$$\because I = \frac{P \times t \times r}{100} \quad \therefore \boxed{t = \frac{100 \times I}{P \times r}}$$

उदा. 6: 8500 रु. $4\frac{1}{2}$% प्रति वर्ष की दर से कितने समय में 15767.50 रु. हो जाएगा?

हल: यहाँ ब्याज = 15767.50 रु. − 8500 रु. = 7267.50 रु.

$$\therefore t = \frac{7267.50 \times 100}{8500 \times 4.5} = 19 \text{ वर्ष}$$

दर अथवा समय की गणना करना जब दोनों का आंकिक मान समान हो

कुछ प्रश्नों में प्रतिशत दर तथा समय का आंकिक मान समान होता है, अर्थात् r तथा t समान होता है: इन प्रश्नों में r तथा t का मान ज्ञात करने के लिए,

$$r \text{ अथवा } t = \sqrt{\frac{100 \times \text{साधारण ब्याज}}{\text{मूलधन}}}$$

yourmahboob

उदा. 7: किसी राशि का साधारण ब्याज मूलधन का $\frac{1}{9}$ है तथा वर्षों की संख्या वार्षिक ब्याज की दर के बराबर है, तो ब्याज की दर ज्ञात करें।

हल: मान लिया कि मूलधन = P, समय = t वर्ष, दर = r = t

$$\therefore \frac{P \times t \times t}{100} = \frac{P}{9}$$

$$\therefore t^2 = \frac{100}{9} \quad \therefore t = \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}$$

$$\therefore \text{दर} = 3\frac{1}{3}\%$$

सूत्र से (Direct Formula):

$$\text{दर अथवा समय} = \sqrt{\frac{100 \times \text{साधारण ब्याज}}{\text{मूलधन}}}$$

$$= \sqrt{\frac{100 \times \frac{\text{मूलधन}}{9}}{\text{मूलधन}}} = \sqrt{\frac{100}{9}} = \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}$$

$$\therefore \text{दर} = 3\frac{1}{3}\%.$$

उदा. 8: 770 रु. कर्ज 5 वर्ष में चुकता करने के लिए प्रतिवर्ष कितने रुपए अदा करने चाहिए, यदि ब्याज की वार्षिक दर 5% है?

हल: माना कि वार्षिक अदायगी P रु. है।

5% की दर से 4 वर्षों में P का मिश्रधन $= \frac{100 + 4 \times 5P}{100} = \frac{120P}{100}$

5% की दर से 3 वर्षों में P का मिश्रधन $= \frac{115P}{100}$

5% की दर से 2 वर्षों में P का मिश्रधन $= \frac{110P}{100}$

5% की दर से 1 वर्षों में P का मिश्रधन $= \frac{105P}{100}$

प्रश्नानुसार,

अंतिम वार्षिक अदायगी P रु. के साथ ये चारों मिश्रधन मिलकर कर्ज ली गई राशि 770 रु. के बराबर होगा.

yoursmahboob

$$\therefore \quad \frac{120P}{100}+\frac{115P}{100}+\frac{110P}{100}+\frac{105P}{100}+P=770$$

$$\therefore \quad \frac{550P}{100}=770 \quad \therefore P=\frac{770\times 100}{550}=140$$

$\therefore$ अभीष्ट वार्षिक अदायगी = 140 रु.

प्रमेय: यदि ब्याज की वार्षिक दर $r\%$ हो तो राशि A को t वर्षों में चुकाने के लिए प्रतिवर्ष

$$\frac{100A}{100t+\frac{rt(t-1)}{2}}$$ रु. अदा करने होंगे।

प्रमाण: मान लिया कि प्रति वर्ष x रु. का भुगतान किया जाना चाहिए;

तब $(t-1)$ वर्षों में $r\%$ की दर से x रु. का मिश्रधन $=\frac{100+(t-1)r}{100}\times x$

$(t-2)$ वर्षों में $r\%$ की दर से x रु. का मिश्रधन $=\frac{100+(t-2)r}{100}\times x$

.....

.....

2 वर्षों में $r\%$ की दर से x रु. का मिश्रधन $=\frac{100+2r}{100}\times x$

1 वर्ष में $r\%$ की दर से x रु. का मिश्रधन $=\frac{100+1r}{100}\times x$

ये $(t-1)$ राशियाँ अंतिम वार्षिक भुगतान x रु. के साथ मिलकर A रु. कर्ज अदा देंगी

$$\therefore \frac{100+(t-1)r}{100}x+\frac{100+(t-2)r}{100}x+\ldots+\frac{100+r}{100}x+x=A$$

या, $x\left[\{100+(t-1)r\}+\{100+(t-2)r\}+\ldots+\{100+r\}+\{100\}\right]=100A$

या, $x\left[100t+\frac{r(t-1)t}{2}\right]=100A \qquad \therefore x=\frac{100A}{100t+\frac{r(t-1)(t)}{2}}$

नोट: $1+2+3+\ldots+m=\frac{m(m+1)}{2}$

उपर्युक्त प्रमेय के प्रयोग से,

वार्षिक भुगतान की राशि $=\frac{100\times 770}{5\times 100+\frac{5(4)(5)}{2}}=\frac{770\times 100}{550}=140$ रु.

yourshahboob

उदा. 9: 848 रु. की राशि 4 वर्षों में अदा करने के लिए प्रति वर्ष कितने रुपए भुगतान करने होंगे, यदि ब्याज की वार्षिक दर 4 प्रतिशत हो?

हल : प्रमेय से,

$$\text{वार्षिक भुगतान} = \frac{848 \times 100}{4 \times 100 + \frac{4(3)(4)}{2}} = 200 \text{ रु.}$$

उदा. 10: 80 रु. की वार्षिक अदायगी यदि 5 वर्षों तक अदा की जाए और ब्याज की वार्षिक दर 5% प्रतिवर्ष हो तो कितने रुपए कर्ज का भुगतान हो जाएगा ?

हल: उपर्युक्त सूत्र में मानों को रखने पर,

$$80 = \frac{A \times 100}{5 \times 100 + \frac{5(4)(5)}{2}}$$

$$\text{या, } A = \frac{80 \times 550}{100} = 440 \text{ रु.}$$

उदा. 11: यहाँ ब्याज की दर अवधि के अनुसार अलग-अलग है, पहले दो वर्षों के लिए वार्षिक ब्याज दर 3% है, अगले तीन वर्षों के लिए यह 8% है तथा 5 वर्षों के बाद की किसी भी अवधि के लिए यह 10% प्रति वर्ष है। यदि किसी व्यक्ति को 6 वर्षों के लिए 1520 रु. साधारण ब्याज के रूप में प्राप्त हो तो उसने कितने रुपए जमा करवाए थे ?

हल: मान लिया कि उसके द्वारा जमा की गई राशि = 100 रु.

पहले दो वर्षों के लिए ब्याज = 6 रु.

अगले 3 वर्षों के लिए ब्याज = 24 रु.

आखिरी वर्ष के लिए ब्याज = 10 रु.

∴ कुल ब्याज = 40 रु.

जब ब्याज 40 रु. है तो जमा की गई राशि = 100 रु.

$$\therefore \text{ जब ब्याज 1520 रु. है तो जमा की गई राशि} = \frac{100}{40} \times 1520 = 3800 \text{ रु.}$$

सूत्र से (Direct Formula) :

$$\text{मूलधन} = \frac{\text{ब्याज} \times 100}{t_1 r_1 + t_2 r_2 + t_3 r_3 + \ldots}$$

$$= \frac{1520 \times 100}{2 \times 3 + 3 \times 8 + 1 \times 10} = \frac{1520 \times 100}{40} = 3800 \text{ रु.}$$

उदा. 12: कोई धन साधारण ब्याज की दर से 10 वर्षों में दुगुना हो जाता है तो ब्याज की दर बताएँ।

हल: मान लिया कि धन = 100 रु.

10 वर्षों के बाद यह बढ़कर 200 रु. हो जाता है।

yoursmahboob

∴ ब्याज = 200 − 100 = 100 रु.

$$\text{दर} = \frac{100\times I}{P\times t} = \frac{100\times 100}{100\times 10} = 10\%$$

सूत्र से (Direct Formula):

समय × दर = 100 (मूलधन के अपवर्तों की संख्या − 1)

$$\text{या, दर} = \frac{100\times(\text{मूलधन के अपवर्तों की संख्या} - 1)}{\text{समय}}$$

उपर्युक्त सूत्र का प्रयोग करने पर,

$$\therefore \text{दर} = \frac{100(2-1)}{10} = 10\%$$

उदा. 13: कोई धन 20 वर्षों में तिगुना हो जाता है तो ब्याज की दर बताएँ।

हल: $\text{दर} = \frac{100(3-1)}{20} = 10\%$

नोट: एक सामान्य रूप निम्न प्रकार का हो सकता है: यदि कोई राशि साधारण ब्याज की दर से t वर्षों में x गुना हो जाता हो तो ब्याज की दर $= \frac{100(x-1)}{t}\%$

उदा. 14: कितने समय में कोई धन चौगुनी हो जाएगी, यदि ब्याज की दर 5% प्रति वर्ष हो

हल: उपर्युक्त सूत्र के इस्तेमाल से,

$$\text{समय} = \frac{100(\text{मूलधन के अपवर्तों की संख्या} - 1)}{\text{दर}}$$

$$= \frac{100(4-1)}{5} = 60 \text{ वर्ष}$$

उदा. 15: 2379 रु. को तीन हिस्सों में इस प्रकार विभाजित करें ताकि 2, 3 एवं 4 वर्षों के बाद उनसे प्राप्त राशियाँ समान हों। यहाँ ब्याज की दर 5% प्रति वर्ष है।

हल: पहले हिस्से से प्राप्त राशि $= \frac{110}{100}\times$ पहला हिस्सा

दूसरे हिस्से से प्राप्त राशि $= \frac{115}{100}\times$ दूसरा हिस्सा

तीसरे हिस्से से प्राप्त राशि $= \frac{120}{100}\times$ तीसरा हिस्सा

प्रश्नानुसार, ये तीनों राशियाँ समान हैं।

∴ 110 × पहला हिस्सा = 115 × दूसरा हिस्सा = 120 × तीसरा हिस्सा

yoursmahboob

पहला हिस्सा : दूसरा हिस्सा : तीसरा हिस्सा

$$= \frac{1}{110} : \frac{1}{115} : \frac{1}{120}$$

$$276 : 264 : 253$$

इसलिए, 2379 रु. को 276 : 264 : 253 के अनुपात में तीन हिस्से में विभाजित करने पर,

पहला हिस्सा = 828 रु.

दूसरा हिस्सा = 792 रु.

तीसरा हिस्सा = 759 रु.

उदा. 16: कोई धन 2 वर्षों में 756 रु. तथा 3.5 वर्षों में 873 रु. हो जाता है। मूलधन एवं ब्याज की दर ज्ञात करें।

हल : मूलधन + 3.5 वर्षों का साधारण ब्याज = 873 रु.

मूलधन + 2 वर्षों का साधारण ब्याज = 756 रु.

घटाने पर,

∴ 1.5 वर्षों का साधारण ब्याज = 117 रु.

∴ 2 वर्षों का साधारण ब्याज = $\frac{117}{1.5} \times 2$ रु. = 156 रु.

∴ मूलधन = (756 − 156 =) 600 रु.

एवं दर = $\frac{100 \times 156}{600 \times 2}$ = 13% प्रति वर्ष

उदा. 17: किसी धन को 2 वर्षों के लिए ब्याज दर से ब्याज पर लगाया गया। यदि ब्याज की दर 3% अधिक होती तो उसे 300 रु. अधिक प्राप्त हुए होते। मूलधन ज्ञात करें।

हल: मान लिया कि धन x रु. है तथा ब्याज की प्रारंभिक वार्षिक दर y% प्रति वर्ष है।

नई दर = $(y + 3)$% प्रति वर्ष

$$\therefore \frac{x(y+3) \times 2}{100} - \frac{x(y) \times 2}{100} = 300$$

$\therefore xy + 3x - xy = 15000$

या, $x = 5000$

इस प्रकार, मूलधन = 5000 रु.

द्रुत विधि (Quicker Method) :

$$\text{धन} = \frac{\text{अधिक ब्याज} \times 100}{\text{समय} \times \text{अधिक दर}}$$

$$= \frac{300 \times 100}{2 \times 3} = 5000 \text{ रु.}$$

yoursmahboob

उदा. 18: कोई धन 7 वर्षों में दुगुना हो जाता है। कितने वर्षों में यह धन चार गुना हो जाएगा?

हल : दर $= \frac{100(2-1)}{7} = \frac{100}{7}$

$\therefore$ समय $= \frac{100(4-1)}{\frac{100}{7}} = 21$ वर्ष

***दूसरी विधि* (Other Method)**

इस प्रश्न को बिना कुछ लिखे हुए भी हल किया जा सकता है। इस तरह विचार कीजिए:

7 वर्षों में दुगुना हो जाता है।

14 वर्षों में तिगुना हो जाता है।

21 वर्षों में चार गुना हो जाता है।

28 वर्षों में पाँच गुना हो जाता है।

आदि --------

उदा. 19: 4000 रु. को दो हिस्सों में इस प्रकार विभाजित किया जाता है कि यदि एक हिस्से को 3% की दर से निवेश किया जाए तथा दूसरे हिस्से को 5% की दर से तो वर्ष के अंत में दोनों निवेशों से प्राप्त कुल ब्याज 144 रु. है। प्रत्येक हिस्सा को ज्ञात करें

हल : मान लिया कि 3% प्रति वर्ष की दर से x रु. लगाए गए।

$\therefore x$ का 3% + $(4000 - x)$ का 5% = 144

या, $3x + 5 \times 4000 - 5x = 14,400$

या, $2x = 5600$

$\therefore x = 2800$

इसलिए दोनों राशियाँ क्रमशः

2800 रु. एवं $(4000 - 2800)$ रु. = 1200 रु. है।

***मिश्रण-विधि* से:** मिश्रण (Alligation) अध्याय का उदा.-25 देखें।

उदा. 20: ब्याज को एक खास दर से 800 रु. 3 वर्षों में 920 रु. हो जाता है यदि ब्याज की दर 3% बढ़ा दी जाए, तो 3 वर्ष बाद धन क्या होगा ?

हल: ब्याज की आरंभिक दर $= \frac{120 \times 100}{800 \times 3} = 5\%$

नई दर = 5+3 = 8%

नया ब्याज $= \frac{800 \times 3 \times 8}{100} = 192$ रु.

नया धन = 800 + 192 = 992 रु.

उदा. 21: किसी धन का साधारण ब्याज 5 वर्ष बाद 300 रु. हो जाता है। अगले 5 वर्षों में मूल धन तिगुना हो जाता है। 10वें वर्ष के अंत में कुल ब्याज कितना होगा ?

हल: आरंभिक 5 वर्षों का साधारण ब्याज = 300 रु.

yoursmahboob

मूलधन के तिगुना हो जाने का मतलब है कि उसी अवधि में असली मूलधन का ब्याज भी तिगुना हो जाए।।।

आखिरी 5 वर्षों का साधारण ब्याज = (3 × 300 −) 900 रु.

10 वर्ष में कुल ब्याज = (300 + 900 =) 1200 रु.

प्रमेय: यदि x रु. को n हिस्सों में इस प्रकार विभाजित किया जाए ताकि r_1 प्रतिशत प्रति वर्ष वार्षिक ब्याज की दर से t_1 वर्षों में पहले हिस्से का ब्याज, r_2 प्रतिशत प्रति वर्ष ब्याज की दर से t_2 वर्षों में दूसरे हिस्से का ब्याज, r_3% प्रति वर्ष ब्याज की दर से t_3 वर्षों में तीसरे हिस्से के ब्याज इत्यादि बराबर हों तो अनुपात जिनमें धन को n हिस्सों में विभाजित किया गया है निम्नलिखित है:

$$\frac{1}{r_1 t_1} : \frac{1}{r_2 t_2} : \frac{1}{r_3 t_3} : \ldots : \frac{1}{r_n t_n}$$

प्रमाण: मान लिया कि प्रदत्त मूलधन को $S_1, S_2, S_3, \ldots S_n$ में विभाजित किया जाता है।

तब

$$S_1 = \frac{\text{ब्याज} \times 100}{r_1 t_1}$$

$$S_2 = \frac{\text{ब्याज} \times 100}{r_2 t_2}$$

$$S_3 = \frac{\text{ब्याज} \times 100}{r_3 t_3}$$

. ...

. ...

$$S_n \frac{\text{ब्याज} \times 100}{r_n t_n}$$

∵ सभी हिस्सों से प्राप्त ब्याज समान है।

$$\therefore S_1 : S_2 : S_3 : \ldots : S_n$$

$$= \frac{\text{ब्याज} \times 100}{r_1 t_1} : \frac{\text{ब्याज} \times 100}{r_2 t_2} : \frac{\text{ब्याज} \times 100}{r_3 t_3} : \ldots : \frac{\text{ब्याज} \times 100}{r_n t_n}$$

$$\frac{1}{r_1 t_1} : \frac{1}{r_2 t_2} : \frac{1}{r_3 t_3} : \ldots : \frac{1}{r_n t_n}$$

उदा. 22: 2600 रु. को दो हिस्सों में इस प्रकार से विभाजित किया जाता है कि 10% की दर से पहले हिस्से का 5 वर्षों का ब्याज, 9% की दर से दूसरे हिस्से के 6 वर्षों के ब्याज के बराबर हो। दोनों हिस्सों को ज्ञात करें।

yoursmahboob

हल : प्रत्येक ब्याज $= \dfrac{\text{पहला हिस्सा} \times 5 \times 10}{100}$

$= \dfrac{\text{दूसरा हिस्सा} \times 6 \times 9}{100}$

या, $\dfrac{\text{पहला हिस्सा}}{\text{दूसरा हिस्सा}} = \dfrac{6 \times 9}{5 \times 10} = \dfrac{27}{25} = 27 : 25$

$\therefore$ पहला हिस्सा $= \dfrac{2600}{27+25} \times 27 = 1350$ रु.

तथा दूसरा हिस्सा $= 2600 - 1350 = 1250$ रु.

नोट: यदि हम उपर्युक्त प्रमेय का इस्तेमाल करें तो

$S_1 : S_2 = \dfrac{1}{50} : \dfrac{1}{54} = 54 : 50 = 27 : 25$

उदा. 23: जितने समय में 750 रु. 4% वार्षिक ब्याज की दर से 840 रु. हो जाता है, उतने ही समय में एक खास धन 5% वार्षिक ब्याज की दर से 575 रु. हो जाता है। यदि ब्याज साधारण हो तो धन ज्ञात करें।

हल : ब्याज $= 840$ रु. $- 750$ रु. $= 90$ रु.

समय $= \left(\dfrac{90 \times 100}{750 \times 4}\right) = 3$ वर्ष

सूत्र से,

धन $= \dfrac{100 \times \text{मिश्रधन}}{100 + (\text{दर} \times \text{समय})} = \dfrac{100 \times 575}{100 + (3 \times 5)} = 500$ रु.

नोट: मूलधन एवं मिश्रधन के बीच एक खास संबंध होता है। इस संबंध को निम्नलिखित सूत्र से व्यक्त करते हैं:

मूलधन $= \dfrac{100 \times \text{मिश्रधन}}{100 + (\text{दर} \times \text{समय})}$

उदा. 24: 5% वार्षिक ब्याज की दर से कोई धन 6 वर्षों में 2613 रु. हो जाता है। उसी दर पर कितने वर्षों में यह धन 3015 रु. हो जाएगा ?

हल : निम्नलिखित सूत्र का इस्तेमाल करें,

मूलधन $= \dfrac{100 \times \text{मिश्रधन}}{100 + (\text{दर} \times \text{समय})} = \dfrac{100 \times 2613}{100 + 30}$

$= \dfrac{100 \times 2613}{130} = 2010$ रु.

yoursmahboob

पुनः उसी सूत्र के प्रयोग से,

$$2010 = \frac{100 \times 3015}{100 + 5 \times t}$$

या, $100 + 5t = \frac{100 \times 3015}{2010}$

$$\therefore t = \frac{1}{5}\left[\frac{100 \times 3015 - 100 \times 2010}{2010}\right]$$

$$= \frac{100 \times (3015 - 2010)}{2010 \times 5} = \frac{100 \times 1005}{2010 \times 5} = 10 \text{ वर्ष}$$

उदा. 25: किसी व्यक्ति ने 4% प्रति वर्ष साधारण ब्याज की दर से एक निश्चित धन ब्याज पर लगाया। 8 वर्षों में ब्याज की राशि मूलधन से 340 रु. कम हो जाता है। मूलधन ज्ञात करें।

हल: मान लिया कि मूलधन = x रु.

$$\therefore \text{ब्याज} = \frac{x \times 8 \times 4}{100} = \frac{32x}{100}$$

$$x - \frac{32x}{100} = \frac{68x}{100}$$

जब ब्याज $\frac{68x}{100}$ कम है तो मूलधन = x रु.

$\therefore$ जब ब्याज 340 रु. कम है तो मूलधन = $\frac{x}{68x} \times 100 \times 340 = 500$ रु.

सूत्र से (Direct Formula) :

$$\text{मूलधन} = \frac{100}{100 - 8 \times 4} \times 340 = \frac{100 \times 340}{68} = 500 \text{ रु.}$$

उदा. 26: 1650 रु. का साधारण ब्याज, 4% साधारण ब्याज की दर से 1800 रु. के साधारण ब्याज से 30 रु. कम है। समय ज्ञात करें।

हल : इस प्रश्न पर यदि दूसरे ढंग से विचार करें तो पता चलता है कि (1800 − 1650) रु. का ब्याज 4% प्रति वर्ष की दर से 30 रु. है।

$$\therefore \text{समय} = \frac{30 \times 100}{150 \times 4} = 5 \text{ वर्ष}$$

उदा. 27: अरुण और रामू दो दोस्त हैं। अरुण 5% ब्याज की दर से रामू से 400 रु. कर्ज लेता है। वह इस धन को दो वर्षों बाद ब्याज सहित वापस कर देता है। रामू अरुण को वापस किए गए रकम का 2% लौटा देता है। अरुण को कितने रुपए प्राप्त हुए ?

हल : 2 वर्षों बाद रामू को वापस लौटाई गई रकम = $400 + \frac{400 \times 5 \times 2}{100} = 440$ रु.

$\therefore$ अरुण को वापस लौटाई गई रकम = 440 का 2% = 8.80 रु.

yoursmahboob

उदा. 28: कोई व्यक्ति 15,860 रु. को अपने तीन बच्चों A, B एवं C के नाम से इस प्रकार निवेश करता है कि क्रमशः 2, 3 एवं 4 वर्षों बाद उन्हें समान राशि प्राप्त होती है। यदि साधारण ब्याज की दर 5% वार्षिक हो तो A, B एवं C के नाम से निवेश की गई राशि का अनुपात ज्ञात करें।

प्रमेय: जब भिन्न-भिन्न मूलधन साधारण ब्याज की दर से एक ही मिश्रधन में बदल जाती हो तो निवेश की गई राशियाँ [100 +(समय × दर)] के विपरीत अनुपात (inverse ratio) में होती हैं। अर्थात् निवेश की गई राशियों का अनुपात होता है :

$$\frac{1}{100+r_1t_1}:\frac{1}{100+r_2t_2}:\frac{1}{100+r_3t_3}:\ldots:\frac{1}{100+r_nt_n}$$

प्रमाण: हम जानते हैं कि

$$\text{मिश्रधन} = \frac{100\times \text{मूलधन}}{100+(\text{दर}\times\text{समय})}$$

मान लिया कि निवेश की गई राशियाँ $S_1, S_2, S_3, \ldots, S_n$ हैं और इन्हें क्रमशः $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_n$ प्रतिशत की दर से $t_1, t_2, t_3, \ldots, t_n$ समय के लिए निवेश किया जाता है। तब,

$S_1 : S_2 : S_3 : \ldots : S_n$

$$= \frac{100\times A}{100+r_1t_1}:\frac{100\times A}{100+r_2t_2}:\frac{100\times A}{100+r_3t_3}:\ldots:\frac{100\times A}{100+r_nt_n}$$

[सभी मूलधन के लिए मिश्रधन A समान है।]

$$= \frac{1}{100+r_1t_1}:\frac{1}{100+r_2t_2}:\frac{1}{100+r_3t_3}:\ldots:\frac{1}{100+r_nt_n}$$

हल: इसलिए दिए गए प्रश्न में अभीष्ट अनुपात

$$= \frac{1}{100+2\times5}:\frac{1}{100+3\times5}:\frac{1}{100+4\times5}$$

$$= \frac{1}{110}:\frac{1}{115}:\frac{1}{120}$$

उदा. 29: साधारण ब्याज की दर से कोई धन 4 वर्षों में दुगुना हो जाता है। कितने वर्षों में यह धन 8 गुना हो जाएगा?

हल: 4 वर्षों में दुगुना हो जाता है।

$4 \times 2 = 8$ वर्षों में तिगुना हो जाता है।

$4 \times 3 = 12$ वर्षों में चौगुना हो जाता है।

$4 \times 7 = 28$ वर्षों में 8 गुना हो जाता है।

yoursmahboob

सूत्र से (Direct Formula) :

x गुना होने में लगा समय − दुगुना होने में लगा समय × (x − 1)

$= 4 \times (8-1) = 4 \times 7 = 28$ वर्ष

उदा. 30: दो समान धन दो अलग-अलग बैंकों में 15% प्रति वर्ष ब्याज की दर से क्रमशः 3.5 एवं 5 वर्षों के लिए जमा की जाती है। यदि इनके ब्याज में 144 रु. का अंतर हो तो धन ज्ञात करें।

हल : मान लिया कि धन = x रु.

$$\frac{x \times 15 \times 5}{100} - \frac{x \times 15 \times 7}{200} = 144 \text{ रु.}$$

या, $150x - 105x = 144 \times 200$

$$\therefore x = \frac{144 \times 200}{45} = 640 \text{ रु.}$$

सूत्र से (Direct Formula) :

यदि दो समान धन $r_1\%$ एवं $r_2\%$ प्रति वर्ष ब्याज की दर से t_1 एवं t_2 समय तक के लिए निवेश की जाती हैं तथा उनके ब्याज में I_d का अंतर हो, तो

$$\text{धन} = \frac{I_d \times 100}{r_1 t_1 - r_2 t_2}$$

उपर्युक्त प्रश्न में,

$$\text{धन} = \frac{144 \times 100}{15 \times 5 - 15 \times 3.5} = \frac{140 \times 100}{22.5} = 640 \text{ रु.}$$

उदा. 31: 500 रु. को दो अलग-अलग बैंकों में 2 वर्षों के लिए जमा किया जाता है। इन दोनों बैंकों से प्राप्त ब्याज में 2.5 रु. का अंतर है तो इनके ब्याज की दरों का अंतर ज्ञात करें।

हल : $I_1 = \frac{500 \times 2 \times r_1}{100} = 10r_1$

$$I_2 = \frac{500 \times 2 \times r_2}{100} = 10r_2$$

$I_1 - I_2 = 10r_1 - 10r_2 = 2.5$

$$\therefore r_1 - r_2 = \frac{2.5}{10} = 0.25\%$$

सूत्र से (Direct Formula):

(इस सूत्र को पिछले प्रश्न में इस्तेमाल किया गया है) यहाँ $t_1 = t_2$

$$r_1 - r_2 = \frac{I_d \times 100}{\text{मूलधन} \times t} = \frac{2.5 \times 100}{500 \times 2} = 0.25\%$$

yoursmahboob

उदा. 32: किसी निश्चित धन पर 4% प्रति वर्ष की दर से 4 वर्षों में प्राप्त ब्याज, उसी धन को 5% प्रति वर्ष की दर से 3 वर्षों में प्राप्त ब्याज से 80 रु. अधिक है। धन ज्ञात करें।

हल : मान लिया कि धन x रु. है।

4% प्रति वर्ष की दर से 4 वर्षों में साधारण ब्याज $= \frac{x \times 4 \times 4}{100} = \frac{4x}{25}$ रु.

5% प्रति वर्ष की दर से 3 वर्षों में साधारण ब्याज $= \frac{x \times 5 \times 3}{100} = \frac{3x}{20}$ रु.

अब चूँकि $\frac{4x}{25} - \frac{3x}{20} = 80$

या, $\frac{16x - 15x}{100} = 80$

$\therefore x = 8000$ रु.

द्रुत विधि (Quicker Method) :

ऐसे प्रश्नों के लिए,

$$\text{मूलधन} = \frac{(\text{ब्याज का अंतर}) \times 100}{(r_1 t_1 - r_2 t_2)}$$

$$= \frac{80 \times 100}{4 \times 4 - 3 \times 5} = 8000 \text{ रु.}$$

उदा. 33: एक निश्चित धन साधारण ब्याज की दर से 4 वर्षों में 600 रु. हो जाता है तथा 6 वर्षों में 650 रु. हो जाता है। ब्याज की दर प्रति वर्ष ज्ञात करें।

हल : मान लिया की ब्याज की दर $= r\%$ एवं धन $= A$ रु.

अब, $A + \frac{A \times r \times 4}{100} = 600$

या, $A\left(1 + \frac{r}{25}\right) = 600$ ....(1)

एवं, $A + \frac{A \times r \times 6}{100} = 650$

या, $A\left(1 + \frac{3r}{50}\right) = 650$ ....(2)

(1) में (2) से भाग देने पर,

yoursmahboob

$$\frac{1+\frac{r}{25}}{1+\frac{3r}{50}} = \frac{600}{650}$$

या, $\frac{(25+r)\times 2}{50+3r} = \frac{12}{13}$

या, $(50+2r)\times 13 = (50+3r)\times 12$

या, $650+26r = 600+36r$

या, $10r = 50 \quad \therefore r = 5\%$

सूत्र विधि (Direct Formula) :

यदि एक धन साधारण ब्याज की दर से t_1 वर्ष में A_1 रु. हो जाता है एवं t_2 वर्ष में A_2 रु. हो जाता है तो,

ब्याज की दर प्रति वर्ष $= \frac{100(A_2 - A_1)}{A_1 t_2 - A_2 t_1}$

उपर्युक्त स्थिति में,

$$r = \frac{100(650-600)}{6\times 600 - 4\times 650} = \frac{100\times 50}{1000} = 5\%$$

उदा. 34 : साधारण ब्याज की दर से रमेश एक बैंक से 7000 रु. उधार लेता है। तीन वर्ष बाद वह 3000 रु. चुका देता है तथा उधार लेने की तिथि के 5 वर्ष के बाद में वह बैंक को ऋण भुगतान करने के लिए (to settle the account) 5450 रु. देता है। ब्याज की दर ज्ञात करें।

हल : वह धन जो अंतिम किस्त चुकाने से पहले बैंक को दिया जाता है मूलधन से न कि ब्याज से घटा लिया जाता है।

इस प्रकार,

कुल ब्याज = 7000 रु. पर 3 वर्ष का ब्याज + (7000 रु. − 3000 रु.=) 4000 रु. पर 2 वर्ष का ब्याज

या, $(5450 + 3000 - 7000) = \frac{7000\times 3\times r}{100} + \frac{4000\times 2\times r}{100}$

या, $1450 = 210r + 80r$

$\therefore \quad r = \frac{1450}{270} = 5\%$

उदा. 35 : 7000 रु. में से कुछ राशि 6% प्रति वर्ष की दर से उधार दिया जाता है। एवं शेष राशि को 4% प्रति वर्ष की दर से। यदि 5 वर्षों में दोनों भागों से कुल साधारण ब्याज 1600 रु. प्राप्त होता है तो 6% प्रति वर्ष की दर से उधार दी गई राशि का मान ज्ञात करें।

yoursmahboob

हल : माना कि 6% प्रति वर्ष की दर से x रु. उधार दिया जाता है।

इस प्रकार, $\frac{x \times 6 \times 5}{100} + \frac{(7000-x) \times 4 \times 5}{100} = 1600$

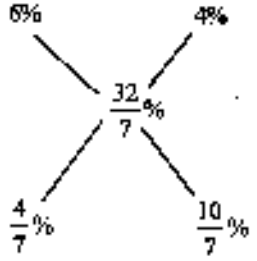
या, $\frac{3x}{10} + \frac{7000-x}{5} = 1600$

या, $\frac{3x + 14000 - 2x}{10} = 1600$

$\therefore x = 16000 - 14000 = 2000$ रु.

मिश्रण विधि (Method of Alligation) :

कुल मिलाकर ब्याज की दर $= \frac{1600 \times 100}{5 \times 7000} = \frac{32}{7}\%$



$\therefore$ दोनों राशियों का अनुपात $= 2 : 5$

$\therefore$ 6% पर उधार दी गई राशि $= \frac{7000}{2+5} \times 2 = 2000$ रु.

साधारण ब्याज में अंतर (Δ साधारण ब्याज)

जब मूलधन अथवा दर अथवा समय में परिवर्तन किया जाता है तो साधारण ब्याज में भी परिवर्तन होता है। साथ ही किसी दो व्यंजकों में या तीनों व्यंजकों में परिवर्तन करने से भी साधारण ब्याज में परिवर्तन होता है।

(A) ***किसी एक व्यंजक में परिवर्तन होने पर:***

Δ साधारण ब्याज $= \frac{(P_1 - P_2)rt}{100} = \frac{P(r_1 - r_2)t}{100} = \frac{Pt(t_1 - t_2)}{100}$

उदा. 36: किसी मूलधन को किसी निश्चित प्रतिशत दर पर ब्याज पर लगाया जाता है। अगर दर प्रतिशत को 3.75% से बढ़ा दिया जाए तो चार वर्षों के साधारण ब्याज में 90 रु. की बढ़त हो जाती है। मूलधन तथा वास्तविक प्रतिशत दर ज्ञात करें।

हल: उपरोक्त सूत्र से,

yoursmahboob

Δ साधारण ब्याज $= \frac{P(r_1 - r_2)t}{100}$

$\Rightarrow \quad 90 = \frac{P \times 3.75 \times 4}{100}$

$\Rightarrow \quad P = 600$ रुपए

परंतु इस प्रश्न में वास्तविक प्रतिशत दर को नहीं निकाला जा सकता है। वैसा कोई भी दो प्रतिशत दर जिसका अंतर 3.75 है वो मान्य होगा।

(B) *किसी दो व्यंजक में परिवर्तन होने पर*

अगर मूलधन को अचर मान लें तो साधारण ब्याज में अंतर सिर्फ दो व्यंजकों पर ही निर्भर करेगा। अगर एक व्यंजक को $x\%$ से बढ़ा या घटा दिया जाए तथा दूसरे व्यंजक को $y\%$ से बढ़ा या घटा दिया जाए तो साधारण ब्याज में प्रतिशत परिवर्तन $\left(x + y + \frac{xy}{100}\right)\%$ होगा।

नोट: प्रतिशत बढ़ाने पर धनात्मक चिह्न '+' तथा घटने पर ऋणात्मक चिह्न '−' का प्रयोग करें। साथ ही गुणा में भी चिह्न प्रभावी होगा।

उदा. 37: किसी मूलधन को किसी निश्चित प्रतिशत दर पर कुछ वर्षों के लिए ब्याज पर लगाया जाता है। अगर प्रतिशत दर को 24% से बढ़ा दें तथा समय को 15% से घटा दें तो साधारण ब्याज में 32 रुपए की बढ़ोतरी हो जाती है। निम्नलिखित ज्ञात करें:

(i) वास्तविक साधारण ब्याज।

(ii) मूलधन।

हल: (i) उपरोक्त सूत्र से,

साधारण ब्याज में प्रतिशत परिवर्तन $= \left\{24 - 15 - \frac{24 \times 15}{100}\right\}\% = \{9 - 3.6\}\% = 6.4\%$

अतः साधारण ब्याज में 6.4% की बढ़ोतरी होती है।

प्रश्नानुसार,

वास्तविक साधारण ब्याज $\times \frac{6.4}{100} = 32$

$\Rightarrow$ वास्तविक साधारण ब्याज $= \frac{32 \times 100}{6.4} = 500$ रु.

(ii) परंतु दिए हुए आँकड़ों के माध्यम से मूलधन नहीं निकाला जा सकता है।

अगर मूलधन के विभिन्न हिस्सों पर अलग-अलग प्रतिशत दर लागू हो

मूलधन के $\frac{1}{x_1}$ भाग को $r_1\%$ की दर पर लगाया जाता है, मूलधन के $\frac{1}{x_2}$ भाग को

yoursmahboob

$r_2\%$ की दर पर लगाया जाता है, मूलधन के $\frac{1}{x_3}$ भाग को $r_3\%$ की दर पर लगाया जाता है, ... और इस प्रकार से आगे भी, तो पूरे मूलधन पर जो प्रतिशत दर लगेगा वह $\left[\frac{1}{x_1}\times r_1+\frac{1}{x_2}\times r_2+\frac{1}{x_3}\times r_3+\ldots\ldots\right]$ के बराबर होगा

जहाँ $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\ldots=1$

उदा. 38: किसी मूलधन के $\frac{1}{3}$ भाग को 16.5% की दर पर ब्याज पर लगाया जाता है, शेष मूलधन के $\frac{3}{5}$ भाग को 18.75% की दर पर लगाया जाता है तथा शेष मूलधन को 30% की दर पर लगाया जाता है। पूरे मूलधन पर चार वर्षों का साधारण ब्याज 1050 रु. है। पूर्ण मूलधन ज्ञात करें।

हल: पूर्ण मूलधन पर प्रतिशत दर $=\frac{1}{3}\times16.5+\frac{3}{5}\left(1-\frac{1}{3}\right)\times18.75+\left(1-\frac{1}{3}-\frac{2}{5}\right)\times30$

$$=5.5+7.5+8=21\%$$

प्रश्नानुसार,

$$\frac{\text{पूर्ण मूलधन}\times21\times4}{100}=1050 \text{ (दिया हुआ है।)}$$

$$\therefore \quad \text{पूर्ण मूलधन}=\frac{1050\times100}{21\times4}=1250 \text{ रु.}$$

उदा. 39: कोई मूलधन किसी खास दर पर कुछ वर्षों के लिए ब्याज पर लगाया जाता है तो मिश्रधन मूलधन का 2.5 गुना हो जाता है। पुनः उसी मूलधन को 40% अधिक दर पर 60% कम समय के लिए ब्याज पर लगाया जाता है तो मिश्रधन मूलधन का कितना गुना हो जाएगा?

हल: माना कि मूलधन P है।

मिश्रधन = मूलधन + साधारण ब्याज

$\Rightarrow$ साधारण ब्याज = मिश्रधन − मूलधन = 2.5 P − P = 1.5 P

साधारण ब्याज में प्रतिशत अंतर $=\left\{40-60-\frac{40\times60}{100}\right\}=-44\%$

अतः नया साधारण ब्याज $=1.5P\left(1-\frac{44}{100}\right)=0.84P$

अतः मिश्रधन = P + 0.84 P = 1.84 P

इसलिए, मिश्रधन मूलधन का 1.84 गुना हो जाएगा।

yoursmanbob

द्रुत विधि (Quicker Method):

अगर किसी मूलधन को $r_1\%$ की दर से t_1 समय के लिए लगाने से मिश्रधन मूलधन का N_1 गुना हो जाए तथा पुनः उसी मूलधन को $r_2\%$ की दर से t_2 समय के लिए लगाने से मिश्रधन मूलधन का N_2 गुना हो जाए तो,

$$\boxed{\frac{N_1-1}{N_2-1}=\frac{r_1\times t_1}{r_2\times t_2}}$$

$$\frac{2.5-1}{N_2-1}=\frac{r\times t}{\frac{7r}{5}\times\frac{2t}{5}} \qquad \left[\text{नई दर } =r\left(1+\frac{40}{100}\right),\ \text{नया समय } =t\left(1+\frac{60}{100}\right)\right]$$

$$\Rightarrow \frac{1.5}{N_2-1}=\frac{25}{14}$$

$$\Rightarrow (N_2-1)25=21$$

$$\Rightarrow N_2=\frac{46}{25}=1.84$$

अभ्यास प्रश्न

1. 14% वार्षिक ब्याज की दर से किसी मूलधन का 3 वर्षों का ब्याज 235.20 रु. है तो मूलधन निकालें।
2. यदि 64 रु. 2 वर्षों में 83.20 रु. हो जाता है तो उसी ब्याज की दर से 86 रु. 4 वर्षों में कितना हो जाएगा ?
3. कोई धन 3 वर्षों में 850 रु. एवं 4 वर्षों में 925 रु. हो जाता है तो धन कितना है ?
4. कोई धन 2 वर्षों में 702 रु. एवं 3 वर्षों में 783 रु. हो जाता है तो ब्याज की दर है _____ प्रतिशत प्रति वर्ष।
5. ब्याज की दर 13% से घटकर 12.5 प्रतिशत प्रति वर्ष हो जाने से किसी साहूकार की आमदनी में 104 रु. की कमी आ जाती है तो साहूकार की पूँजी कितनी है ?
6. यदि 360 रु. 3 वर्षों में 511 रु. 20 पैसा हो जाता है तो 700 रु. 5 वर्षों में कितने रुपए में बदल जाएगा ?
7. 2540 रु. को दो हिस्सों में विभाजित कर के ब्याज पर लगाया जाता है। एक हिस्से को 12% ब्याज की वार्षिक दर पर और दूसरे को $12\frac{1}{2}\%$ की वार्षिक दर पर। यदि कुल वार्षिक आय 312.42 रु. हो तो 12% ब्याज की दर पर कितने रुपए लगाए गए थे?
8. 2600 रु. की रकम को 2 हिस्सों में विभाजित करके इस प्रकार ब्याज पर लगाया जाता है कि एक हिस्से पर 10 प्रतिशत की दर से 5 वर्षों का ब्याज, दूसरे हिस्से पर 9% की दर से 6 वर्षों के ब्याज के बराबर है। 10% वार्षिक ब्याज की दर पर लगाई गई रकम है _____ रु.।

yoursmanbooks

9. यदि किसी धन का साधारण ब्याज उस धन के $\frac{1}{16}$ वें हिस्से के बराबर है तथा वार्षिक ब्याज की दर वर्षों की संख्या के बराबर है तो दर प्रतिशत प्रति वर्ष ज्ञात करें।

10. एक निश्चित धन का एक निश्चित दर पर साधारण ब्याज मूलधन का $\frac{9}{16}$ है। यदि संख्या जो प्रतिशत दर एवं वर्ष में समय को निरूपित करता है, बराबर हो तो समय का मान ज्ञात करें।

11. एक निश्चित धन साधारण ब्याज की दर से 16 वर्षों में दुगुना हो जाता है। वार्षिक दर ज्ञात करें।

12. एक निश्चित धन साधारण ब्याज की दर से 15 वर्षों में तिगुना हो जाता है। प्रतिशत दर प्रति वर्ष ज्ञात करें:

13. साधारण ब्याज की एक निश्चित दर पर, एक निश्चित धन 10 वर्षों में दुगुना हो जाता है। यह तिगुना कितने वर्षों में होगा ?

14. 800 रु. साधारण ब्याज की दर से 3 वर्षों में 920 रु. हो जाता है। यदि ब्याज की दर को 3% बढ़ा दिया जाए तो यह धन कितना हो जाएगा?

15. A, B को 600 रु. 2 वर्षों के लिए एवं C को 150 रु. 4 वर्षों के लिए उधार देता है तथा A दोनों से एक साथ 90 रु. साधारण ब्याज के रूप में प्राप्त करता है। ब्याज की दर ज्ञात करें।

16. एक आदमी अपनी पूँजी का $\frac{1}{3}$ हिस्सा 7% की दर पर निवेश करता है, $\frac{1}{4}$ हिस्सा 8% पर एवं शेष 10% पर। यदि उसकी वार्षिक आमदनी 561 रु. है तो उसकी पूँजी ज्ञात करें।

17. किस मूलधन का साधारण ब्याज x% की दर से x वर्षों के लिए x रु. होगा ?

18. यदि 3 वर्षों में 1200 रु. का साधारण ब्याज 1000 रु. के साधारण ब्याज से 50 रु. अधिक हो तो प्रतिशत दर ज्ञात करें।

19. एक निश्चित धन को साधारण ब्याज की एक निश्चित दर से 2 वर्षों के लिए लगाया जाता है। यदि इस धन को 1% अधिक दर पर लगाया गया होता तो उसे 24 रु. अधिक प्राप्त होता। मूलधन ज्ञात करें।

20. एक धन साधारण ब्याज की एक निश्चित दर से 5 वर्षों में अपने आप का $\frac{8}{5}$ गुना हो जाता है। प्रतिशत दर प्रति वर्ष ज्ञात करें।

21. एक आदमी 10000 रु. चार भागों में उधार देता है। यदि वह 2000 रु. पर 8% ब्याज प्राप्त करता है, 4000 रु. पर $7\frac{1}{2}$% एवं 1400 रु. पर $8\frac{1}{2}$%, तो उसे बचे हुए भाग पर कितना प्रतिशत प्राप्त करना चाहिए, यदि ब्याज की औसत दर 8.13% है?

22. यदि किसी निश्चित रकम पर साधारण ब्याज 8% प्रति वर्ष की दर से 6 वर्षों में रकम का आधा है तो रकम ज्ञात करें।

23. 500 रु. पर दो वर्षों के लिए दो विभिन्न बैंकों से प्राप्त ब्याज का अंतर 2.5 रु. है। दरों के बीच का अंतर ज्ञात करें।

yoursmanhoob

24. दो बराबर रकम को दो बैंकों में प्रत्येक पर 15% की वार्षिक दर से क्रमशः $3\frac{1}{2}$ वर्षों एवं 5 वर्षों के लिए रखे जाते हैं। यदि दोनों के ब्याज में 144 रु. का अंतर हो तो प्रत्येक रकम का मान ज्ञात करें।

a) 460 रु. b) 500 रु. c) 640 रु. d) 720 रु.

25. पहला 2 वर्षों के लिए किसी खास धन पर ब्याज की दर 4% प्रति वर्ष है, अगले 4 वर्षों के लिए यह 6% प्रति वर्ष एवं 6 वर्ष के बाद किसी भी अवधि के लिए 8% प्रति वर्ष। यदि धन पर 9 वर्षों की कुल अवधि के लिए प्राप्त साधारण ब्याज 1120 रु. हो तो मूलधन क्या है ?

हल

1. मूलधन $= \frac{235.20 \times 100}{3 \times 14} = 560$ रु.

2. ब्याज की दर $= \frac{19.20 \times 100}{64 \times 2} = 15\%$

86 रु. का ब्याज $= \frac{86 \times 15 \times 4}{100} = 51.6$ रु.

∴ कुल राशि = 86 + 51.6 = 137.6 रु.

हल विधि (Quicker Method) :

64 रु. का ब्याज 2 वर्षों में 19.2 रु. है।

भिन्न के नियम (Rule of fraction) से,

86 रु. का ब्याज 4 वर्षों में

$$19.2 \times \left[\frac{86}{64}\right]\left[\frac{4}{2}\right] = 51.60 \text{ रु.}$$

∴ कुल राशि = 86 + 51.6 = 137.6 रु.

3. मूलधन + 4 वर्षों का साधारण ब्याज = 925 रु.

मूलधन + 3 वर्षों का साधारण ब्याज = 850 रु.

घटाने पर,

1 वर्ष का साधारण ब्याज = 75 रु.

3 वर्ष का साधारण ब्याज = (3 × 75 =) 225 रु.

∴ मूलधन = (850 − 225 =) 625 रु.

4. प्रश्न 3 में अपनायी गई विधि का प्रयोग करें। इससे आपको धन के साथ-साथ ब्याज एवं समय का भी पता चल जाएगा। इसके बाद ब्याज की दर की गणना करें।

5. $\frac{1}{2}$ रु. घट जाता है 100 रु. पर

yoursmahboob

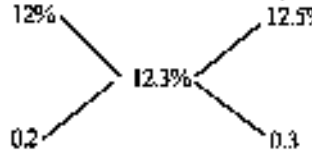
$\therefore$ 104 रु. घट जाता है $\frac{100}{\frac{1}{2}} \times 104$ रु. पर $= 100 \times 2 \times 104 = 20800$ रु. पर

6. प्रश्न संख्या-2 की तरह है

7. इसे मिश्रण विधि (Method of Alligation) से हल करें।

कुल मिलाकर ब्याज की दर $= \frac{312.42}{2540} \times 100 = 12.3\%$

अब, पहला हिस्सा दूसरा हिस्सा



$\therefore$ धन. 0.2 : 0.3 या 2 : 3 के अनुपात में विभाजित होगी।

12% पर उधार दी गई रकम $= \frac{2540}{5} \times 2 = 1016$ रु.

$12\frac{1}{2}\%$ पर उधार दी गई रकम $= \frac{2540}{5} \times 3 = 1524$ रु.

8. ***द्रुत विधि से* (Quicker Method):**

दोनों हिस्सों का अनुपात $= r_2 t_2 : r_1 t_1 = 54 : 50 = 27 : 25$

$\therefore$ 10% पर उधार दी गई राशि $= \frac{2600}{52} \times 27 = 1350$ रु.

9. मान लिया कि ब्याज की दर $= r\%$

समय $= r$ वर्ष

अब, $\frac{S}{16} = \frac{S \times r \times r}{100}$

या, $r^2 = \frac{100}{16}$

$\therefore r = \frac{10}{4} = \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}\%$

10. प्रश्न 9 की तरह।

11. ***द्रुत विधि* (Quicker Method) :**

ब्याज की दर $= \frac{100(2-1)}{16} = 12\frac{1}{2}\%$

yoursmahboob

12. **द्रुत विधि (Quicker Method) :**

ब्याज की दर $= \frac{100(3-1)}{15} = \frac{200}{15} = 13\frac{1}{3}\%$

13. यह 10 वर्षों में दुगुना हो जाता है।

$\therefore$ 20 वर्षों में तिगुना हो जाएगा।

14. ब्याज की दर $= \frac{120 \times 100}{800 \times 3} = 5\%$

नई दर 8% हो जाती है।

$\therefore$ ब्याज $= \frac{800 \times 8 \times 3}{100} = 192$ रु.

$\therefore$ मिश्रधन $= 800 + 192 = 992$ रु.

द्रुत विधि (Quicker Method) :

ब्याज में वृद्धि $= \frac{800 \times 3 \times 3}{100} = 72$ रु.

$\therefore$ बढ़ी हुई राशि (मिश्रधन) $= 920 + 72 = 992$ रु.

15. मान लिया कि ब्याज की दर 4% प्रति वर्ष है।

तब, $\frac{600 \times 2 \times r}{100} + \frac{150 \times 4 \times r}{100} = 90$

या, $12r + 6r = 90$

$\therefore r = 5\%$

नोट: इसे मिश्रण विधि (Method of Alligation) से भी हल करें।

16. मान लिया कि पूँजी = 120 रु.

$\therefore$ कुल ब्याज $= \frac{120}{3}$ का 7% + $\frac{120}{4}$ का 8% + शेष का 10%

$= 40$ का 7% + 30 का 8% + 50 का 10%

$= 2.8 + 2.4 + 5$

$= 10.2$ रु.

$\therefore$ वास्तविक पूँजी $= \frac{120}{10.2} \times 561 = 6600$ रु.

द्रुत विधि (Quicker Method) :

पूँजी $= \frac{561}{\frac{1}{3}\text{ का } 7\% + \frac{1}{4}\text{ का } 8\% + \frac{5}{12}\text{ का } 10\%}$

yoursmahboob

$$= \frac{561 \times 100}{\frac{7}{3} - \frac{8}{4} + \frac{25}{6}} = \frac{561 \times 100 \times 12}{20 + 24 - 50} = 6600 \text{ रु.}$$

17. घन $= \frac{x \times 100}{x \times x} = \frac{100}{x}$ रु.

18. मान लिया कि ब्याज की दर $= x\%$

तब, $\frac{1200 \times 3x}{100} = \frac{1000 \times 3x}{100} + 50$

$\therefore 6x = 50$

$\therefore x = 8\frac{1}{3}\%$

द्रुत विधि (Quicker Method) :

दर $= \frac{\text{ब्याज में अंतर} \times 100}{\text{समय} \times \text{मूलधन में अंतर}}$

$$= \frac{50 \times 100}{2(1200 - 1000)} = \frac{25}{3} = 8\frac{1}{3}\%$$

19. मान लिया कि मूलधन $= P$ एवं दर $= r\%$

तब, $\frac{P \times 2 \times r}{100} = \frac{P(r+1) \times 2}{100} - 24$

या, $2Pr = 2Pr + 2P - 2400$

या, $2P = 2400$

$\therefore P = 1200$

$\therefore$ मूलधन $= 1200$ रु.

द्रुत विधि (Quicker Method) :

राशि $= \frac{\text{ब्याज का अंतर} \times 100}{\text{समय} \times \text{दर का अंतर}} = \frac{24 \times 100}{2 \times 1} = 1200$ रु.

नोट: उपर्युक्त सूत्र का आधार है :

राशि $= \frac{\text{ब्याज} \times 100}{\text{समय} \times \text{दर}}$

20. **द्रुत विधि (Quicker Method):**

दर $= 100 \times \frac{\left[\frac{8}{5} - 1\right]}{\text{समय}} = \frac{100 \times \frac{3}{5}}{5} = \frac{300}{25} = 12\%$

yoursmahboob

21. कुल ब्याज – 10,000 का 8.13% = 813 रु.

शेष रु. = 10,000 – (2000 + 4000 + 1400) – 2600 रु.

तब, 2000 का 8% + 4000 का 7.5% + 1400 का 8.5% + 2600 का x% – 813

या, 160 + 300 + 119 + 26x = 813

$$\therefore x = \frac{234}{26} = 9\%$$

22. $\frac{S}{2} = \frac{S \times 8 \times 6}{100}$

इससे हम S का मान नहीं निकाल सकते हैं। स्पष्ट है कि उपर्युक्त गणितीय संबंध भी ठीक नहीं है। इस प्रकार यह निष्कर्ष निकलता है कि प्रश्न ही गलत है।

23. द्रुत विधि (Quicker Method) :

प्रश्न संख्या-19 में दिए गए सूत्र का इस्तेमाल करें।

$$\text{मूलधन} = \frac{\text{ब्याज में अंतर} \times 100}{\text{समय} \times \text{दर में अंतर}}$$

या, $500 = \frac{2.5 \times 100}{2 \times x}$

$$\therefore x = \frac{2.5 \times 100}{2 \times 500} = 0.25\%$$

24. द्रुत विधि (Quicker Method) :

$$\text{राशि} = \frac{\text{ब्याज में अंतर} \times 100}{\text{दर} \times \text{समय में अंतर}}$$

$$= \frac{144 \times 100}{15 \times 1.5} = 640 \text{ रु.}$$

25. द्रुत विधि (Quicker Method) :

$$\text{मूलधन} = \frac{\text{ब्याज} \times 100}{r_1 t_1 + r_2 t_2 + r_3 t_3 + \ldots}$$

$$= \frac{1120 \times 100}{4 \times 2 + 6 \times 4 + 8 \times 3}$$

$$= \frac{1120 \times 100}{56} = 2000 \text{ रु.}$$

yoursmahboob

चक्रवृद्धि ब्याज
(Compound Interest)

यदि कोई रकम इस प्रकार से ब्याज पर लगाई जाए कि वर्ष के अंत में या नियत अवधि के अंत में ब्याज ऋणदाता को अदा करने की जगह मूल रकम में जोड़ दिया जाता हो, और इस प्रकार प्राप्त राशि (जो कि अगली अवधि के लिए मूलधन का काम करता है) को आधार बनाकर अगली अवधि के लिए ब्याज की गणना की जाती हो तो कहा जाता है कि रकम चक्रवृद्धि ब्याज पर लगाए गए हैं। यह प्रक्रिया तब तक दुहराई जाती है जब तक कि आखिरी अवधि के लिए राशि की गणना नहीं कर ली जाए। मूल रकम (मूलधन) एवं आखिरी रकम के बीच के अंतर को **चक्रवृद्धि ब्याज** (Compound Interest) कहा जाता है। इसे CI से सूचित करते हैं।

महत्वपूर्ण सूत्र

यदि मूलधन = P रु., समय = t वर्ष दर = r% प्रति वर्ष हो तो,

स्थिति I: जब ब्याज की गणना वार्षिक होती हो अर्थात् वर्ष में एक बार की जाती हो:

$$\text{मिश्रधन (Amount)} = P\left(1+\frac{r}{100}\right)^{t}$$

स्थिति II: जब ब्याज की गणना अर्द्धवार्षिक (half-yearly) तौर पर की जाती हो:

$$\text{मिश्रधन (Amount)} = P\left(1+\frac{\frac{r}{2}}{100}\right)^{2t}$$

$$= P\left(1+\frac{r}{200}\right)^{2t}$$

स्थिति III: जब ब्याज की गणना त्रैमासिक (quarterly) होती हो:

$$\text{मिश्रधन (Amount)} = P\left(1+\frac{\frac{r}{4}}{100}\right)^{4t} = P\left(1+\frac{r}{400}\right)^{4t}$$

नोट: उपरोक्त सूत्रों के बदले में मिश्रधन निकालने हेतु निम्न सूत्र भी याद रखा जा सकता है।

$$\text{मिश्रधन (Amount)} = P\left(1+\frac{r}{100\times n}\right)^{nt}$$

जहाँ: $n = 1$; यदि ब्याज की गणना वार्षिक होती हो;

yoursmahboob

$n = 2$; यदि ब्याज की गणना अर्द्धवार्षिक होती है।

$n = 3$; यदि ब्याज की गणना प्रत्येक चार माह पर होती हो।

$n = 4$; यदि ब्याज की गणना त्रैमासिक होती हो।

... ...

... ...

इस बात का ध्यान देना आवश्यक है कि $\left[1+\frac{r}{100}\right]$ का घातांक यदि भिन्न (fractional number) हो तो निम्न प्रकार से लिखना होगा।

$$\left[1+\frac{r}{100}\right]^{n\frac{p}{q}} = \left[1+\frac{r}{100}\right]^{n}\left[1+\frac{r}{100}\right]^{p/q}$$ (जहाँ p/q का मान 0 तथा 1 के बीच होता है।)

$$= \left[1+\frac{r}{100}\right]^{n}\left[1+\frac{r}{100}\times\frac{p}{q}\right]$$

स्थिति IV: यदि पहले, दूसरे एवं तीसरे वर्ष के लिए ब्याज की दर क्रमशः $r_1\%$, $r_2\%$ एवं $r_3\%$ हो तो,

$$\text{मिश्रधन (Amount)} = P\left[1+\frac{r_1}{100}\right]\times\left[1+\frac{r_2}{100}\right]\times\left[1+\frac{r_3}{100}\right]$$

उपर्युक्त सूत्रों से आप पूर्व परिचित हैं। आप इनका उपयोग भी जानते होंगे। उपर्युक्त सूत्रों का इस्तेमाल करते वक्त कभी-कभी गणितीय गणनाएँ जटिल हो जाती हैं एवं बहुत अधिक समय लेती हैं। गणना को सरल बनाने एवं समय की बचत करने के लिए आपको कुछ अतिरिक्त सूचनाएँ भी चाहिए, जो कि यहाँ दी जा रही हैं। निम्नलिखित सूचनाओं का मनोयोगपूर्वक अध्ययन करें तथा अवसर के अनुरूप उनका इस्तेमाल भी करें।

प्रश्नों में अवधि के रूप में प्रायः 3 वर्षों तक का ही प्रयोग होता है। इसी तरह दर को जगह अक्सर 10%, 5% एवं 4% मिल जाएँगे।

हमारा मूल सूत्र है:

$$\text{मिश्रधन} = \text{मूलधन}\left[1+\frac{dr}{100}\right]^{\text{वर्ष}}$$

यदि मूलधन 1 रु. हो तो, पहले, दूसरे एवं तीसरे वर्ष के लिए मिश्रधन क्रमशः

$\left[1+\frac{r}{100}\right]$, $\left[1+\frac{r}{100}\right]^{2}$ एवं $\left[1+\frac{r}{100}\right]^{3}$ होगा।

और यदि ब्याज की दर क्रमशः 10%, 5% एवं 4% वार्षिक हो, तो ये मान होंगे:

$\left(\frac{11}{10}\right)$, $\left(\frac{11}{10}\right)^{2}$, $\left(\frac{11}{10}\right)^{3}$

yoursmahboob

$$\left(\frac{21}{20}\right), \left(\frac{21}{20}\right)^2, \left(\frac{21}{20}\right)^3$$

$$\left(\frac{26}{25}\right), \left(\frac{26}{25}\right)^2, \left(\frac{26}{25}\right)^3$$

उपर्युक्त सूचनाओं को सारणी के रूप में भी निम्नलिखित रूप से सजाया जा सकता है।

मूलधन – 1 रु. तब चक्रवृद्धि ब्याज (CI):

समय	1 वर्ष	2 वर्ष	3 वर्ष
r	$\left(1+\frac{r}{100}\right)$	$\left(1+\frac{r}{100}\right)^2$	$\left(1+\frac{r}{100}\right)^3$
10	$\frac{11}{10}$	$\frac{121}{100}$	$\frac{1331}{1000}$
5	$\frac{21}{20}$	$\frac{441}{400}$	$\frac{9261}{8000}$
4	$\frac{26}{25}$	$\frac{676}{625}$	$\frac{17576}{15625}$

उपर्युक्त सारणी को याद रखें। इसका इस्तेमाल निम्नलिखित प्रश्नों में देखा जा सकता है।

उदा.: 7500 रु. 4% प्रति वर्ष चक्रवृद्धि ब्याज की दर से उधार लिया जाता है। 2 वर्षों बाद कितनी राशि का भुगतान करना होगा?

हल: चूँकि यहाँ ब्याज की दर 4% प्रति वर्ष है तथा समय दो वर्ष है, इसलिए हमारा संबद्ध भिन्न $\frac{676}{625}$ है उपर्युक्त सारणी से यह स्पष्ट है कि 1 रु. का 4% चक्रवृद्धि ब्याज की दर से 2 वर्षों में $\frac{676}{625}$ रु. हो जाता है; इसलिए 2 वर्षों बाद 7500 रु. का मिश्रधन

$$\left(7500 \times \frac{676}{625} =\right) 8112 \text{ रु.}$$

चक्रवृद्धि ब्याज निकालने की दूसरी महत्वपूर्ण विधि

1. 2 वर्षों के लिए :

हम जानते हैं कि पहले वर्ष के लिए चक्रवृद्धि ब्याज एवं साधारण ब्याज समान रहते हैं। दूसरे वर्ष में, उनमें अंतर केवल इतना ही होता है कि चक्रवृद्धि ब्याज प्राप्त करने के लिए हम पहले वर्ष प्राप्त साधारण ब्याज पर भी साधारण ब्याज की गणना करते हैं। अतः, यदि ब्याज की दर r% है तो 2 वर्षों के लिए,

साधारण ब्याज – 2 × r = मूलधन का 2r% तथा

yoursmahboob

चक्रवृद्धि ब्याज – मूलधन का $\left(2r+\frac{r^2}{100}\right)\%$

इसलिए, अंतर है मूलधन का $\frac{r^2}{100}\%$

अब हम उपर्युक्त हल किए हुए उदाहरण को लेते हैं। हम साधारण ब्याज की गणना मन में ही करते हैं।

अर्थात्, $2 \times 4 = 7500$ का 8% = 600 रु.

अंतर है : $\frac{16}{100\times100}\times7500 = 12$ रु.

∴ चक्रवृद्धि ब्याज – 612 रु.

∴ अभीष्ट मान = (7500 + 612) रु. = 8112 रु.

नोट : 2 वर्षों के लिए, साधारण ब्याज – 600 रु. → 1 वर्ष के लिए साधारण ब्याज – 300 रु.

∴ अंतर है 300 का 4% = 12 रु.

∴ चक्रवृद्धि ब्याज = (600 + 12 –) 612 रु.

∴ अभीष्ट मान = (7500 + 612 –) 8112 रु.

2. तीन वर्षों के लिए :

यदि ब्याज की दर r% हो तो 3 वर्षों के लिए

कुल साधारण ब्याज – 3 × r = मूलधन का 3r%

चक्रवृद्धि ब्याज = मूलधन का $\left(3r+\frac{3r^2}{100}+\frac{r^3}{100^2}\right)\%$

अतः अंतर = मूलधन का $\left(\frac{3r^2}{100}+\frac{r^3}{100^2}\right)\%$

अब निम्नलिखित उदाहरण को देखें :

उदा. 1: 2000 रु. को 8% अर्द्धवार्षिक चक्रवृद्धि ब्याज की दर से 9 महीने के लिए उधार लिया जाता है। 9 महीने पश्चात् ब्याज के रूप में देय राशि क्या होगी?

हल: मिश्रधन $= 2000\left[1+\frac{8}{100\times2}\right]^{2\times3/4} = 2000\left[1+\frac{4}{100}\right]^{3/2}$

$= 2000\left[1+\frac{4}{100}\right]^{1\frac{1}{2}} = 2000\left[1+\frac{4}{100}\right]^{1}\left[1+\frac{4}{100}\right]^{1/2}$

yoursmahboob

$$= 2000\left[1+\frac{4}{100}\right]\left[1+\frac{4}{100}\times\frac{1}{2}\right]$$

$$= \frac{2000\times104\times102}{100\times100} = 2121.6 \text{ रु.}$$

अतः ब्याज = मिश्रधन − मूलधन = 2121.6 − 2000 = 121.60 रु.

उदा. 2: जब 1000 रु. को 5% के चक्रवृद्धि ब्याज की दर से जमा किया जाता है तो 3 वर्षों बाद मिश्रधन (amount) ज्ञात करें।

हल : साधारण ब्याज = 1000 का 15% = 150 रु.

$$\text{चक्रवृद्धि ब्याज} = 15+\frac{3\times5^2}{100}+\frac{5^3}{100^2} = 15+0.75+0.0125$$

= 1000 का 15.76125% = 157.625 रु.

∴ मिश्रधन = 1,157.625 रु.

चक्रवृद्धि ब्याज एवं साधारण ब्याज में प्रतिशत अंतर ज्ञात करना :

1. 2 वर्षों के लिए :

यदि ब्याज की दर 4% हो, तो

साधारण ब्याज = 2 × 4 = मूलधन का 8%

$$\text{चक्रवृद्धि ब्याज} = 4+4+\frac{4\times4}{100} = 2\times4+\frac{4^2}{100} = \text{मूलधन का } 8.16\% \ldots\ldots(*)$$

(*) इसका अर्थ है यदि 2 वर्षों के लिए 4% चक्रवृद्धि ब्याज की दर को 1 वर्ष के लिए साधारण ब्याज की दर के रूप में परिवर्तित करने पर यह 8.16% के समतुल्य होगा।

यदि ब्याज की दर 5% हो, तो

साधारण ब्याज = 2 × 5 = मूलधन का 10%

$$\text{चक्रवृद्धि ब्याज} = 5+5+\frac{5\times5}{100} = \text{मूलधन का } 10.25\%$$

यदि ब्याज की दर 8% हो, तो

साधारण ब्याज = मूलधन का 16%

$$\text{चक्रवृद्धि} = 16+\frac{64}{100} = \text{मूलधन का } 16.64\%$$

यदि ब्याज की दर 10% हो, तो

साधारण ब्याज = मूलधन का 20%

yoursmahboob

चक्रवृद्धि ब्याज – $20+\frac{10^2}{100}$ = मूलधन का 21%

नोट (1) आपने अवश्य ही प्रारूप $2r+\frac{r^2}{100}$ पर ध्यान दिया होगा।

इसकी परिचर्चा अध्याय "प्रतिशत" में की गई है।

(2) आप उपर्युक्त गणना को याद रखने के लिए सारणीबद्ध कर सकते हैं।

2. 3 वर्षों के लिए :

(a) यदि दर (R) = 4% है, तो साधारण ब्याज (SI) – 4 × 3 – मूलधन का 12%

चक्रवृद्धि ब्याज = $8.16\,(*)+4-\frac{8.16\times 4}{100}$ = 12.16 + 0.3264

= मूलधन का 12.4864%

नोट : 2 वर्षों के लिए प्रतिशत चक्रवृद्धि ब्याज (*) है। इसका अर्थ है, 3 वर्षों के लिए आपको 2 वर्षों के लिए प्रतिशत चक्रवृद्धि ब्याज ज्ञात करना होगा तथा तीसरे वर्ष के लिए

सूत्र $\left(r_1+r_2+\frac{r_1r_2}{100}\right)$ का इस्तेमाल करें

(b) दर (R) – 5%; तो साधारण ब्याज = 5 × 3 = मूलधन का 15%

चक्रवृद्धि ब्याज = $10.25+5+\frac{10.25\times 5}{100}$ = 15.25 + 0.5125 = मूलधन का 15.7625%

(c) दर (R) = 8%, तो साधारण ब्याज (SI) = 8 × 3 – मूलधन का 24%

चक्रवृद्धि = $16.64+8+\frac{16.64\times 8}{100}$ = 24.64 + 1.3312 – मूलधन का 25.9712%

(d) दर (R) = 10%, तो साधारण ब्याज (SI) = मूलधन का 30%

चक्रवृद्धि ब्याज = $21+10+\frac{21\times 10}{100}$ = 31 + 2.1 – मूलधन का 33.1%

नोट : (1) अल्प प्रतिशत में अंतर के सूत्र $\left(\frac{3r^2}{100}+\frac{r^3}{100^2}\right)$ जिसकी चर्चा पहले भी की जा चुकी है का भी इस्तेमाल कर सकते हैं। यदि आप उसे याद नहीं कर पा रहे हैं तो, उपर्युक्त वर्णित विस्तार विधि का इस्तेमाल करें।

(2) गणना को सारणीबद्ध करें तथा इसे याद करें।

yoursmahboob

विविध उदाहरण

समय (अवधि) निकालना

उदा. 1: कितने समय में 390625 रु. 456976 रु. में बदल जाएगा, यदि चक्रवृद्धि ब्याज की दर 4% प्रति वर्ष है ?

हल: $\because P\left(1+\frac{r}{100}\right)^t = A$

$$\therefore 390625\left(1+\frac{4}{100}\right)^t = 456976$$

$$\therefore \left(1+\frac{1}{25}\right)^t = \frac{456976}{390625} \therefore \left(\frac{26}{25}\right)^t = \left(\frac{26}{25}\right)^4$$

$\therefore t = 4$

$\therefore$ अभीष्ट समय = 4 वर्ष

उदा. 2: चक्रवृद्धि ब्याज पर लगाई गई कोई राशि 4 वर्षों में दुगुनी हो जाती है तो कितने वर्षों में यह आठ गुनी हो जाएगी ?

हल: प्रश्नानुसार,

$$P\left(1+\frac{r}{100}\right)^4 = 2P$$

$$\therefore \left[1+\frac{r}{100}\right]^4 = 2$$

दोनों पक्षों का घन निकालने पर,

$$\left[1+\frac{r}{100}\right]^{12} = 2^3 = 8$$

या, $P\left[1+\frac{r}{100}\right]^{12} = 8P$

$\therefore$ अभीष्ट समय (अवधि) = 12 वर्ष

द्रुत विधि (Quicker Method):

x रु. 4 वर्षों में $2x$ रु. हो जाता है

$2x$ रु. अगले 4 वर्षों में $4x$ रु. हो जाता है

$4x$ रु. अगले 4 वर्षों में $8x$ रु. हो जाता है

इस प्रकार x रु., $8x$ रु. हो जाता है, $4 + 4 + 4 = 12$ वर्षों में

yourmahboob

उदा. 3: 20% चक्रवृद्धि ब्याज की दर से कोई धन कम-से-कम कितने पूरे वर्षों (complete years) में दुगुने से अधिक हो जाएगी?

हल: यहाँ $P\left[1+\frac{20}{100}\right]^{n} > 2P$

$\left(\frac{6}{5}\right)^{n} > 2$ जाँच एवं भूल विधि से (By trial-and-error method)

$$\frac{6}{5}\times\frac{6}{5}\times\frac{6}{5}\times\frac{6}{5} > 2$$

∴ अभीष्ट समयावधि = 4 वर्ष

उदा. 4: एक निश्चित राशि चक्रवृद्धि ब्याज की दर से 3 वर्षों में अपनी तिगुनी हो जाती है। कितने वर्षों बाद यह 9 गुनी हो जाएगी?

हल: ***विस्तार विधि* (Detail Method) :**

माना कि राशि = x रु.

तो, प्रश्नानुसार,

$$3x = x\left(1+\frac{r}{100}\right)^{3}$$

या, $3 = \left(1+\frac{r}{100}\right)^{3}$

दोनों ओर वर्ग करने पर,

$$(3)^2 = \left\{\left(1+\frac{r}{100}\right)^{3}\right\}^{2} \text{ या, } 9 = \left(1+\frac{r}{100}\right)^{6}$$

अब, दोनों ओर x से गुणा करने पर,

$$9x = x\left(1+\frac{r}{100}\right)^{6}$$

∴ राशि x . 6 वर्षों में 9 गुनी होगी।

***द्रुत विधि* (Quicker Method):**

निम्नलिखित निष्कर्ष को याद रखें:

यदि एक धन चक्रवृद्धि ब्याज की दर से y वर्षों में x गुना हो जाता है तो ny वर्षों में यह $(x)^n$ गुना हो जाएगा।

इस प्रकार, यदि धन 3 वर्षों में 3 गुना हो जाता है तो यह $(3)^2 = 9$ गुना $(2\times3=)6$ वर्षों में होगा।

yoursmahboob

नमूना प्रश्न (Sample Questions)

1. यदि एक राशि चक्रवृद्धि ब्याज की दर से 4 वर्षों में दुगुनी हो जाती है तो यह उसी ब्याज की दर से कब चार गुनी हो जाएगी ?

हल: उपर्युक्त निष्कर्ष का प्रयोग करने पर, राशि $(2)^2$ गुनी $(2 \times 4) = 8$ वर्षों में हो जाएगी।

2. उपर्युक्त प्रश्न में राशि कब 16 गुनी हो जाएगी ?

हल: $(2)^4 = 16$ गुनी $(4 \times 4) = 16$ वर्षों में

दर ज्ञात करना

उदा. 5: किस चक्रवृद्धि ब्याज की वार्षिक दर से एक राशि दो वर्षों में 9 गुनी हो जाएगी ?

हल: ***विस्तार विधि* (Detail Method):**

माना कि राशि x रु. है एवं चक्रवृद्धि ब्याज की वार्षिक दर $= r\%$

तो, प्रश्नानुसार,

$$9x = x\left(1+\frac{r}{100}\right)^2 \text{ या, } 9 = \left(1+\frac{r}{100}\right)^2$$

$$\text{या, } 3 = 1+\frac{r}{100}$$

$$\text{या, } \frac{r}{100} = 2$$

$$\therefore r = 200\%$$

***सूत्र विधि* (Direct Formula) :**

चक्रवृद्धि ब्याज का सामान्य सूत्र निम्नलिखित रूप में बदला जा सकता है :

यदि एक निश्चित राशि 't' वर्षों में 'm' गुनी हो जाती है तो चक्रवृद्धि ब्याज की दर

$$r = 100\left((m)^{\frac{1}{t}} - 1\right)$$

इस स्थिति में, $r = 100\{(9)^{1/2} - 1\} = 100(3 - 1) = 200\%$

उदा. 6: किस चक्रवृद्धि ब्याज की दर से एक राशि तीन वर्षों में आठ गुनी हो जाएगी ?

हल : सूत्र से:

$$\text{दर } \% = \left[(8)^{1/3} - 1\right] \times 100$$

$$= \left[(8)^{1/3} - 1\right] \times 100 = (2-1) \times 100 = 100\%$$

yousmahboob

उदा. 7 : किस चक्रवृद्धि ब्याज की दर से 80000 रु. 2 वर्षों में 88,200 रु. हो जाएँगे, यदि ब्याज की गणना वर्ष में एक बार होती हो?

हल : सूत्रानुसार, $80000\left[1+\frac{r}{100}\right]^2 = 88200$

या, $\left[1+\frac{r}{100}\right]^2 = \frac{88,200}{80,000} = \frac{441}{400} = \left(\frac{21}{20}\right)^2$

या, $1+\frac{r}{100} = \frac{21}{20}$ $\therefore r = 5\%$

दूसरी द्रुत विधि (Another Quicker Approach) :

80,000रु. 2 वर्षों में 88200रु. हो जाता है। इसका अर्थ है 2 वर्षों में ब्याज 8200 रु. है जो लगभग 10% है।

इसका तात्पर्य है कि ब्याज की दर लगभग (10 ÷ 2 =) 5% है।

माना कि यह सत्य है। तो,

चक्रवृद्धि ब्याज = $10+\frac{5^2}{100}$ = 80,000 का 10.25% = 8200 (*)

यह प्रश्न में दिए हुए के समान ही है। इसका अर्थ है कि हमारा पूर्वधारणा (assumption) सही है।

नोट : (*) साधारण ब्याज एवं चक्रवृद्धि ब्याज के अंतर से उपर्युक्त परिणाम को सुनिश्चित किया जा सकता है।

अंतर है : 80000 का $\frac{5^2}{100}\% = \frac{80000\times5\times5}{100\times100} = 200$ रु.

जो कि सत्य है। अतः हमारा पूर्वधारणा कि $r = 5\%$ सत्य है

या

अंतर है : (80000 का 5%) का 5% = 4000 रु. का 5% = 200 रु.

यदि CI (चक्रवृद्धि ब्याज) दिया हुआ हो तो SI (साधारण ब्याज) निकालना, तथा SI दिए रहने पर CI निकालना

उदा. 8 : यदि किसी राशि का चक्रवृद्धि ब्याज 3% की दर से 2 वर्षों में 101.50 रु. हो तो साधारण ब्याज (SI) ज्ञात करें।

हल : 1 रु. का CI = $\left(1+\frac{3}{100}\right)^2 - 1 = \left(\frac{103}{100}\right)^2 - 1 = \frac{609}{10,000}$

$\therefore$ 1 रु. का SI = $\frac{2\times3}{100}$ रु. = $\frac{6}{100}$ रु.

yoursmahboob

$$\therefore \frac{SI}{CI} = \frac{6}{100} \times \frac{10000}{609} = \frac{200}{203}$$

$$\therefore SI = CI \text{ का } \frac{200}{203} = \frac{200}{203} \times 101.5 = 100 \text{ रु.}$$

दूसरी द्रुत विधि (Another Quicker Approach) :

2 वर्षों के लिए 3% की दर पर

साधारण ब्याज $= 2 \times 3 =$ मूलधन का 6%

चक्रवृद्धि ब्याज $= 6 + \frac{3^2}{100} =$ मूलधन का 6.09%

यहाँ, मूलधन का 6.09% = 101.5 रु.

$\therefore$ मूलधन का 6% $= \frac{101.5}{6.09} \times 6 = 100$ रु.

नोट: यदि आप उपर्युक्त विधि के विस्तार में नहीं जाना चाहते हैं तो निम्नलिखित सूत्र को याद रखें। इससे शीघ्र ही उत्तर की प्राप्ति हो जाती है

$$\text{साधारण ब्याज} = \frac{\text{दर}}{100\left[\left(1+\frac{r}{100}\right)^t - 1\right]} \times \text{चक्रवृद्धि ब्याज}$$

यदि CI एवं SI दिया गया हो तो मूलधन एवं दर निकालना

उदा. 9: किसी राशि का दो वर्षों का चक्रवृद्धि ब्याज 40.80 रु. है और साधारण ब्याज 40.00 रु. है। ब्याज की वार्षिक दर एवं मूलधन निकालें।

हल : उपर्युक्त प्रश्न से यह जाहिर है कि दो वर्षों के चक्रवृद्धि ब्याज एवं साधारण ब्याज का अंतर पहले वर्ष के ब्याज का अन्तर है।

पहले वर्ष का SI $= \frac{40}{2} = 20$ रु.

CI − SI = 40.8 − 40 = 0.80 रु.

20 रु. पर 1 वर्ष का ब्याज = 0.80 रु.

100 रु. पर 1 वर्ष का ब्याज $= \frac{80 \times 100}{100 \times 20} = 4$ रु.

ब्याज दर = 4%

मूलधन $P = \frac{100 \times I}{r \times t} = \frac{100 \times 40}{2 \times 9} = 500$ रु.

yoursmahboob

द्रुत विधि – सूत्र से (केवल दो वर्षों के लिए)

$$\text{दर} = \frac{2 \times (\text{CI एवं SI के बीच का अंतर})}{\text{SI}} \times 100$$

इस प्रकार, ऐसी स्थिति में, दर $= \frac{2 \times 0.8}{40} \times 100 = 4\%$

एवं मूलधन $= \frac{40 \times 100}{4 \times 2} = 500$ रु.

दूसरी द्रुत विधि **(Another Quicker Approach) :**

अंतर = 0.80 रु.

1 वर्ष के लिए साधारण ब्याज $= \frac{40}{2}$ रु. = 20 रु.

इसका अर्थ है 20 का $r\% = 0.80$

$$\therefore \quad r = \frac{80}{20} = 4\%$$

मूलधन का विभाजन **(Division of Sum)**

उदा. 10: 3903 रु. को A एवं B के बीच इस प्रकार विभाजित करें कि 7 वर्षों के बाद A का हिस्सा 9 वर्षों के बाद B के हिस्से के बराबर हो। चक्रवृद्धि ब्याज की वार्षिक दर 4% है।

हल : प्रश्नानुसार,

$$(\text{A का वर्तमान हिस्सा}) \left[1+\frac{4}{100}\right]^7 = (\text{B का वर्तमान हिस्सा}) \left[1-\frac{4}{100}\right]^9$$

$$\therefore \frac{\text{A का वर्तमान हिस्सा}}{\text{B का वर्तमान हिस्सा}} = \left[1+\frac{4}{100}\right]^2 = \left[\frac{26}{25}\right]^2 = \frac{676}{625}$$

$\therefore$ 3903 रु. को 676 : 625 के अनुपात में विभाजित करें।

$$\therefore \text{A का वर्तमान हिस्सा} = \frac{676}{676+625} \times 3903 = 2028 \text{ रु.}$$

B का वर्तमान हिस्सा = (3903 – 2028) रु. = 1875 रु.

जब SI एवं CI के बीच का अंतर दिया गया हो

प्रमेय: यदि $r\%$ वार्षिक ब्याज की दर से किसी रकम के दो वर्षों के चक्रवृद्धि ब्याज एवं साधारण ब्याज का अंतर x रु. हो तो,

$$\text{रकम [मूलधन]} = \frac{\text{अंतर} \times 100 \times 100}{\text{दर} \times \text{दर}} = \frac{x(100)^2}{r^2} = x\left[\frac{100}{r}\right]^2$$

yoursmahboob

और यदि मूलधन दिया गया हो तथा SI एवं CI के बीच का अंतर पूछा जाए तो

$$\text{अंतर} = \text{मूलधन}\left[\frac{r}{100}\right]^2$$

प्रमाण: मान लिया कि मूलधन = A रु.

$$\text{तब, } SI = \frac{A \times 2 \times r}{100} = \frac{2Ar}{100}$$

$$CI = A\left[1+\frac{r}{100}\right]^2 - A$$

$$= A\left[1+\frac{r^2}{100^2}+\frac{2r}{100}\right] - A$$

$$= A + \frac{Ar^2}{100^2} + \frac{2Ar}{100} - A = \frac{Ar^2}{100^2} + \frac{2Ar}{100}$$

$$\text{अब, } CI - SI = \frac{Ar^2}{100^2} + \frac{2Ar}{100} - \frac{2Ar}{100} = A\left[\frac{r}{100}\right]^2$$

$$A = \text{अंतर}\left[\frac{100}{r}\right]^2$$

उदा. 11: 5% वार्षिक ब्याज की दर से किसी रकम के 2 वर्षों के चक्रवृद्धि ब्याज एवं साधारण ब्याज का अंतर 1.50 रु. हो तो मूलधन निकालें।

हल: उपर्युक्त प्रमेय से,

$$\text{रकम} = 1.5\left[\frac{100}{5}\right]^2 = 1.5 \times 400 = 600 \text{ रु.}$$

उदा. 12: 10% ब्याज की दर से 2 वर्षों में 1500 रु. के चक्रवृद्धि ब्याज एवं साधारण ब्याज का अंतर निकालें।

हल: $\text{अंतर} = \text{रकम}\left[\frac{r}{100}\right]^2 = 1500\left[\frac{10}{100}\right]^2 = 15$ रु.

उदा. 13: 4% वार्षिक ब्याज की दर से किसी रकम के 2 वर्षों के चक्रवृद्धि ब्याज एवं साधारण ब्याज का अंतर 1 रु. हो तो रकम निकालें।

हल: $\text{रकम} = \text{अंतर}\left[\frac{100}{r}\right]^2 = 1\left[\frac{100}{4}\right]^2 = 625$ रु.

yourshahboob

प्रमेय: यदि r% की दर से 3 वर्षों में किसी रकम के CI एवं SI का अंतर x रु. हो तो रकम $= \frac{\text{अंतर} \times (100)^3}{r^2(300+r)}$ और, यदि रकम दी हुई हो तो अंतर $= \frac{Sr^2(300+r)}{(100)^3}$

प्रमाण: मान लिया कि रकम = S रु.

$$\therefore SI = \frac{S \times 3 \times r}{100} = \frac{3Sr}{100}$$

$$CI = S\left[1+\frac{r}{100}\right]^3 - S$$

$$= S\left[\left(1+\frac{r}{100}\right)^3 - 1\right]$$

$$= S\left[1+\frac{r^3}{(100)^3}+\frac{3r}{100}+\frac{3r^2}{100^2}-1\right]$$

$$= S\left[\frac{r^3}{100^3}+\frac{3r^2}{100^2}+\frac{3r}{100}\right]$$

अब चूँकि $CI - SI = S\left[\frac{r^3}{100^3}+\frac{3r^2}{100^2}+\frac{3r}{100}\right] - \frac{3Sr}{100}$

$$= S\left[\frac{r^3}{100^3}+\frac{3r^2}{100^2}\right]$$

या, अंतर $= \frac{Sr^2}{100^2}\left[\frac{r}{100}+3\right] = \frac{Sr^2(300+r)}{(100)^3}$

$$\therefore S = \frac{\text{अंतर} \times (100)^3}{r^2(300+r)}$$

उदा. 14: यदि 5% वार्षिक ब्याज की दर से 3 वर्षों में किसी रकम के CI एवं SI का अंतर 122 रु. हो तो रकम निकालें।

हल: उपर्युक्त प्रमेय से,

$$\text{रकम} = \frac{122 \times 100 \times 100 \times 100}{5^2(300+5)} = 16{,}000 \text{ रु.}$$

yoursmahboob

उदा. 15: 8000 रु. का 2.5% वार्षिक ब्याज की दर से 3 वर्षों में चक्रवृद्धि ब्याज (CI) एवं साधारण ब्याज (SI) के बीच का अंतर बताएँ।

हल: $$\text{अंतर} = \frac{(\text{मू}) \times r^2 (300 + r)}{(100)^3}$$

$$= \frac{8000 \times 2.5 \times 2.5 (300 + 2.5)}{100 \times 100 \times 100}$$

$$= \frac{8 \times 25 \times 25 \times 3025}{100 \times 100 \times 100} = \frac{121}{8} = 15.125 \text{ रु.}$$

उदा. 16: 5% वार्षिक ब्याज की दर से 3 वर्षों में 2000 रु. के CI एवं SI के बीच का अंतर क्या होगा ?

हल: $$\text{अंतर} = \frac{2000 \times 5 \times 5 (305)}{100 \times 100 \times 100} = 15.25 \text{ रु.}$$

उदा. 17: किसी राशि का साधारण ब्याज 4% प्रति वर्ष की दर से 2 वर्षों में 80 रु. है। इसी दर से इतनी ही अवधि के लिए उसी रकम का चक्रवृद्धि ब्याज निकालें।

हल: उदा. 6 में दिए गए सूत्र से,

$$\text{या, } \frac{2 \times (\text{CI एवं SI का अंतर})}{\text{SI}} \times 100$$

$$\text{या, CI एवं SI का अंतर} = \frac{\text{दर} \times \text{SI}}{2 \times 100}$$

$$\therefore \text{CI एवं SI का अंतर} = \frac{4 \times 80}{2 \times 100} = 1.6$$

$\therefore$ CI = 80 + 1.6 = 81.6 रु.

दूसरी विधि:

यदि आपको सूत्र याद नहीं हो तो निम्नलिखित निष्कर्ष को समझने की कोशिश करें: "दो वर्षों का चक्रवृद्धि ब्याज एवं साधारण ब्याज में अंतर सिर्फ इसलिए होता है क्योंकि दो वर्षों की अवधि में चक्रवृद्धि ब्याज साधारण ब्याज की एक वर्ष का साधारण ब्याज भी सम्मिलित होता है।"

दो वर्षों के लिए साधारण ब्याज = 80 रु.

$\therefore$ 1 वर्ष का साधारण ब्याज $80 \div 2 = 40$ रु.

2 वर्षों का CI = 2 वर्षों का SI + SI का एक वर्ष के लिए SI

$$= 80 + \frac{40 \times 4 \times 1}{100} = 80 + 1.6 = 81.6 \text{ रु.}$$

yourshahboob

उदा. 18: 10% वार्षिक ब्याज की दर से किसी रकम का दो वर्षों का चक्रवृद्धि ब्याज 420 रु. है। इसी दर से इतने ही समय के लिए साधारण ब्याज कितना होगा ?

हल: उदा.-8. में दिए गए **सूत्र से**

$$SI = \frac{rt}{100\left[\left(1+\frac{r}{100}\right)^{t}-1\right]} \times CI$$

जब $t = 2$ हो तो

$$SI = \frac{2r}{100\left[1+\frac{r^2}{100^2}+\frac{2r}{100}-1\right]} \times CI = \frac{2r \times CI \times 100}{r^2+200r}$$

$$SI = \frac{200r}{r(r+200)} \times CI$$

सूत्र को उपरोक्त रूप में इस्तेमाल करना आसान है:

$$SI = \frac{200 \times 10 \times 420}{10 \times 210} = 400 \text{ रु.}$$

***दूसरी द्रुत विधि* (Another Quicker Approach) :**

10% पर 2 वर्षों के लिए साधारण ब्याज = मूलधन का 20%

10% पर 2 वर्षों के लिए चक्रवृद्धि ब्याज = $2 \times 10 + \frac{10^2}{100}$ = मूलधन का 21%

अब, मूलधन का 21% = 420 रु.

$\therefore$ मूलधन का 20% = $\frac{420}{21} \times 20 = 400$ रु.

उदा. 19: यदि 5% वार्षिक ब्याज की दर से किसी रकम का 2 वर्षों का चक्रवृद्धि ब्याज 246 रु. हो तो उसी रकम का समान अवधि के लिए समान दर से साधारण ब्याज कितना होगा?

हल: उपर्युक्त सूत्र के प्रयोग से,

$$SI = \frac{200 \times 5 \times 246}{5 \times 205} = 240 \text{ रु.}$$

नोट: 1. जब CI दिया गया हो और SI पूछा जाए तो उदा. 18 एवं उदा. 19 में प्रयुक्त सूत्र का प्रयोग किया जाता है।

2. यदि SI दिया गया हो तथा CI का पता लगाना हो तो उदा. 17 में दिए गए तरीके का इस्तेमाल करते हैं।

yoursmahboob

दूसरी द्रुत विधि (Another Quicker Approach) :

5% पर 2 वर्षों के लिए साधारण ब्याज = मूलधन का 10%

5% पर 2 वर्षों के लिए चक्रवृद्धि ब्याज = $10 + \frac{25}{100}$ = मूलधन का 10.25%

अब, मूलधन का 10.25% = 246 रु.

$\therefore$ मूलधन का 10% = $\frac{246}{10.25} \times 10 = 240$ रु.

उदा. 20 : यदि 5% की दर से किसी रकम का 3 वर्षों का साधारण ब्याज 150 रु. हो तो इसी अवधि के लिए इसी दर से चक्रवृद्धि ब्याज क्या होगा ?

हल : जब कभी 3 वर्षों के संदर्भ में CI एवं SI के बीच का संबंध निकालना हो तो निम्नलिखित सूत्र का इस्तेमाल किया जाता है:

$$SI = \frac{rt}{100\left[\left(1+\frac{r}{100}\right)^t - 1\right]} \times CI$$

$$150 = \frac{5 \times 3}{100\left[\left(1+\frac{r}{100}\right)^3 - 1\right]} \times CI$$

$$\therefore CI = \frac{150 \times 100\left[\frac{9261 - 8000}{8000}\right]}{5 \times 3}$$

$$= \frac{150 \times 100 \times 1261}{5 \times 3 \times 8000} = \frac{1261}{8} = 157.625 \text{ रु.}$$

दूसरी द्रुत विधि (Another Quicker Approach) :

साधारण ब्याज = 5×3 = मूलधन का 15%

चक्रवृद्धि ब्याज = मूलधन का $\left(15 + \frac{3 \times 5^2}{100} + \frac{5^3}{100^2}\right)\%$

= मूलधन का $(15 - 0.75 + 0.0125)\%$

= मूलधन का 15.7625%

अब, मूलधन का 15% = 150

$\therefore$ मूलधन का 15.7625% = 157.625 रु.

yoursmahboob

उदा. 21 : यदि किसी रकम का दो वर्षों का साधारण ब्याज 100 रु. हो तथा चक्रवृद्धि ब्याज 104 रु. हो तो ब्याज की वार्षिक दर क्या है ?

हल : CI एवं SI में अंतर $= 104 - 100 = 4$ रु.

इसलिए, उदा. 8 एवं उदा.-17 में प्रयुक्त सूत्र से,

$$\text{दर} = \frac{2 \times \text{अंतर} \times 100}{\text{SI}} = \frac{2 \times 4 \times 100}{\text{SI}} = 8\%$$

उदा. 22 : चक्रवृद्धि ब्याज की दर से कोई रकम 2 वर्षों में 4840 रु. तथा 3 वर्षों में 5324 रु. हो जाता है। प्रतिशत ब्याज की दर की गणना करें।

हल : P – 3 वर्षों का CI = 5324 रु. ..... (1)

P – 2 वर्षों का CI = 4840 रु. ..... (2)

(1) में से (2) को घटाने पर,

तीसरे वर्ष का CI = (5324 – 4840 =) 484 रु.

इस प्रकार, तीसरे वर्ष का CI, अर्थात् 484 रु. पुनः 2 वर्षों के बाद प्राप्त मिश्रधन 4840 रु. का 1 वर्ष का ब्याज है।

$$\therefore r = \frac{484 \times 100}{4840 \times 1} = 10\%$$

द्रुत विधि (Quicker Method):

$$\text{दर} = \frac{\text{n वर्ष एवं (n + 1) वर्ष के बाद की राशि का अंतर} \times 100}{\text{n वर्षों के बाद की राशि}}$$

दिए गए प्रश्न में, n = 2

$$\therefore \text{दर} = \frac{\text{2 वर्ष एवं 3 वर्ष के बाद की राशि का अंतर} \times 100}{\text{2 वर्षों के बाद की राशि}}$$

$$= \frac{5324 - 4840}{4840} \times 100 = \frac{484 \times 100}{4840} = 10\%$$

नोट : उपर्युक्त सामान्य सूत्र का इस्तेमाल n के किसी भी धनात्मक मान के लिए किया जा सकता है । निम्नलिखित उदाहरण देखिए।

उदा. 23 : कोई रकम चक्रवृद्धि ब्याज की दर से 15 वर्षों में 51,168 रु. एवं 16 वर्षों में 51,701 रु. हो जाता है। वार्षिक ब्याज की दर बताएँ।

हल : उपर्युक्त सूत्र का इस्तेमाल करने पर,

$$\text{दर} = \frac{(51701 - 51168) \times 100}{51168} = \frac{533 \times 100}{51168} = \frac{100}{96} = \frac{25}{24} = 1\frac{1}{24}\%$$

उदा. 24 : 18750 रु. का 2 वर्षों का चक्रवृद्धि ब्याज निकालें यदि पहले वर्ष में वार्षिक ब्याज की दर 4% हो एवं दूसरे वर्ष में यह 8% हो।

yoursmahboob

हल : पहले वर्ष के अंत में मिश्रधन $= 18750\left[1+\frac{4}{100}\right]$

$$= 18750\left[\frac{104}{100}\right]$$

दूसरे वर्ष के अंत में मिश्रधन $= 18750\left[\frac{104}{100}\right]\left[\frac{108}{100}\right]$

$$= 18750\left[\frac{26}{25}\right]\left[\frac{27}{25}\right] = 21060$$

$\therefore$ **CI = 21060 − 18750 = 2310 रु.**

उदा. 25: किसी खास चक्रवृद्धि ब्याज की दर से 4800 रु. 4 वर्षों में 6000 रु. हो जाता है तो 12 वर्ष बाद राशि क्या होगी?

हल : ***विस्तार विधि* (Detail Method) :**

प्रश्नानुसार,

$$4800\left(1+\frac{r}{100}\right)^4 = 6000$$

या, $\left(1+\frac{r}{100}\right)^4 = \frac{6000}{4800} = \frac{5}{4}$

अब, $\left(1+\frac{r}{100}\right)^{4\times3} = \left(\frac{5}{4}\right)^3 = \frac{125}{64}$

या, $\left(1+\frac{r}{100}\right)^{12} = \frac{125\times75}{64\times75} = \frac{9375}{4800}$

या, $4800\left(1+\frac{r}{100}\right)^{12} = 9375$

उपर्युक्त समीकरण यह प्रदर्शित करता है कि 4800 रु. 12 वर्ष बाद 9375 रु. हो जाता है।

***सूत्र विधि* (Direct Formula) :**

अभीष्ट राशि $= \frac{(6000)^{\frac{12}{4}}}{(4800)^{\frac{12}{4}-1}} = \frac{(6000)^3}{(4800)^2} = 9375$ रु.

yoursmartboob

नोट: इस प्रकार, हम कह सकते हैं कि
यदि एक राशि 'A' चक्रवृद्धि ब्याज की दर से t_1 वर्षों में 'B' हो जाता है तो राशि t_2 वर्षों में

$$\frac{(B)^{\frac{t_2}{t_1}}}{(A)^{\frac{t_2}{t_1}}} \text{ रु. हो जाएगा ।}$$

उदा. 26: 10000 रु. पर 3 वर्षों का चक्रवृद्धि ब्याज ज्ञात करें यदि ब्याज की दर पहले वर्ष के लिए 4%, दूसरे वर्ष के लिए 5% एवं तीसरे वर्ष के लिए 6% हो।

हल : x रु. पर t वर्षों का चक्रवृद्धि ब्याज, यदि ब्याज की दर पहले वर्ष के लिए r_1%, दूसरे वर्ष के लिए r_2% .....एवं t वें वर्ष के लिए r_t% हो,

$$\left[x\left(1+\frac{r_1}{100}\right)\left(1+\frac{r_2}{100}\right)\ldots\left(1+\frac{r_t}{100}\right)-x\right] \text{ होता है।}$$

इस स्थिति में,

$$\text{चक्रवृद्धि ब्याज} = 10000\left(1+\frac{4}{100}\right)\left(1+\frac{5}{100}\right)\left(1+\frac{6}{100}\right)-10000$$

$$= 10000\left(\frac{26}{25}\right)\left(\frac{21}{20}\right)\left(\frac{53}{50}\right)-10000$$

$$= 11,575.20 - 10,000 = \text{Rs. } 1,575.2$$

नोट: इस प्रकार के प्रश्न के लिए और अधिक सामान्य सूत्र निम्नलिखित रूप में दिया जा सकता है :

यदि चक्रवृद्धि ब्याज की दर पहले t_1 वर्ष के लिए r_1%, अगले t_2 वर्ष के लिए r_2%, अगले t_3 वर्ष के लिए r_3%, ... एवं अंतिम t_n वर्ष के लिए r_n%, हो तो x रु. का $(t_1 + t_2 + t_3 + \ldots\ldots t_n)$ वर्षों के लिए चक्रवृद्धि ब्याज

$$= \left[x\left(1+\frac{r_1}{100}\right)^{t_1}\left(1+\frac{r_2}{100}\right)^{t_2}\ldots\left(1+\frac{r_n}{100}\right)^{t_n}\right]-x \text{ रु.}$$

उपर्युक्त स्थिति में, $t_1 = t_2 = t_3 = 1$ वर्ष

उदा. 27: कितनी राशि चक्रवृद्धि ब्याज की दर से 3 वर्षों में 2249.52 रु. हो जाएगी यदि पहले वर्ष के लिए ब्याज की दर 3%, दूसरे वर्ष के लिए ब्याज की दर 4%, एवं तीसरे वर्ष के लिए ब्याज की दर 5% हो?

हल : इस प्रकार के प्रश्न के लिए सामान्य सूत्र :

$$A = P\left(1+\frac{r_1}{100}\right)\left(1+\frac{r_2}{100}\right)\left(1+\frac{r_3}{100}\right)\ldots\ldots$$

जहाँ A = भिन्नधन (Amount), P = मूलधन (Principal) एवं r_1, r_2, r_3 विभिन्न वर्षों के लिए ब्याज की दरें हैं।

yoursmahboob

उपर्युक्त स्थिति में,

$$2249.52 = P\left(1+\frac{3}{100}\right)\left(1+\frac{4}{100}\right)\left(1+\frac{5}{100}\right)$$

या, $2249.52 = P(1.03)(1.04)(1.05)$

$$\therefore P = \frac{2249.52}{1.03\times1.04\times1.05} = 2000 \text{ रु.}$$

***सूत्र विधि* (Direct Formula) :**

भिन्न के नियम से:

$$\text{मूलधन} = 2249.52\left(\frac{100}{103}\right)\left(\frac{100}{104}\right)\left(\frac{100}{105}\right) = 2000 \text{ रु.}$$

उदा. 28: एक व्यक्ति 10% चक्रवृद्धि ब्याज की दर से 3000 रु. उधार लेता है। प्रत्येक वर्ष के अंत में वह 1000 रु. चुकाता है। तीसरे वर्ष के अंत में अपने सारे देय (dues) को चुकाने के लिए उसे कितनी राशि देनी चाहिए?

हल : उपर्युक्त प्रश्न के लिए सामान्य सूत्र निम्नलिखित रूप में लिखा जा सकता है:

यदि एक व्यक्ति r% चक्रवृद्धि ब्याज की दर से P रु. उधार लेता है और वह प्रत्येक वर्ष के अंत में A रु. वापस करता हो तो nवें वर्ष के अंत में उसे निम्नलिखित राशि चुकाना पड़ेगा :

$$P\left[1+\frac{r}{100}\right]^n - A\left[\left(1+\frac{r}{100}\right)^{n-1}+\left(1+\frac{r}{100}\right)^{n-2}+\ldots\ldots+\left(1+\frac{r}{100}\right)^{1}\right]$$

उपर्युक्त स्थिति में,

$$= 3000\left[1+\frac{10}{100}\right]^3 - 1000\left[\left(1+\frac{10}{100}\right)^2+\left(1+\frac{10}{100}\right)^1\right]$$

$$= 3000\left(\frac{11}{10}\times\frac{11}{10}\times\frac{11}{10}\right) - 1000\left[\left(\frac{11}{10}\right)^2+\frac{11}{10}\right]$$

$$= 3993 - \left\{1000\times\frac{121}{100}+1000\times\frac{11}{10}\right\}$$

$$= 3993 - 1210 - 1100 = 1683 \text{ रु.}$$

नोट : उपर्युक्त प्रश्न को निम्नलिखित तरीके से भी हल कर सकते हैं :

दूसरे वर्ष के प्रारंभ में मूलधन

$$= 3000\left(1+\frac{10}{100}\right) - 1000 = 3300 - 1000 = 2300 \text{ रु.}$$

yoursmahboob

तीसरे वर्ष के प्रारंभ में मूलधन

$$=2300\left(1+\frac{10}{100}\right)-1000=1530 \text{ रु.}$$

∴ तीसरे वर्ष के अंत में उसे

$$=1530\left(1+\frac{10}{100}\right) \text{ रु.} = 1683 \text{ रु. चुकाना पड़ेगा।}$$

उदा. 29: गीता 20000 रु. 16% चक्रवृद्धि ब्याज की वार्षिक दर से एक निजी कंपनी में जमा करती है, जबकि मीरा गीता के बराबर राशि PNB Housing Finance Ltd. में 15% अर्द्धवार्षिक चक्रवृद्धि ब्याज की दर से जमा करती है। यदि दोनों अपनी राशि केवल 1.5 वर्षों के लिए जमा करते हैं तो ज्ञात करें कि किसका ब्याज ज्यादा है?

हल : यदि निरपेक्ष मान (absolute value) निकालने के लिए प्रश्न में नहीं कहा गया हो तो प्रश्न थोड़ा आसान हो जाता है।

$1\frac{1}{2}$ वर्षों बाद दोनों स्थितियों में राशियाँ,

$$20000\left(1+\frac{16}{100}\right)^{1/2} \quad \text{एवं} \quad 20000\left(1+\frac{7.5}{100}\right)^{3}$$

अब इनइक्वलिटी (Inequality) के लिए आते हैं:

$$20000\left(1+\frac{16}{100}\right)^{3/2} \Leftrightarrow 20000\left(1+\frac{7.5}{100}\right)^{3}$$

या, $$\left(1+\frac{16}{100}\right)^{3/2} \Leftrightarrow \left(1+\frac{7.5}{100}\right)^{3}$$

दोनों ओर के घातों को $\frac{2}{3}$ से गुणा करने पर,

या, $$\left(1+\frac{16}{100}\right) \Leftrightarrow \left(1+\frac{7.5}{100}\right)^{2}$$

या, $$1+\frac{16}{100} \Leftrightarrow 1+\left(\frac{7.5}{100}\right)^{2}+2\left(\frac{7.5}{100}\right)$$

या, $$\frac{16}{100}-\frac{15}{100} \Leftrightarrow \frac{7.5}{100}\times\frac{7.5}{100}$$

yoursmahboob

या, $1 \Leftrightarrow \frac{7.5}{100} \times 7.5$ या, $1 \Leftrightarrow \frac{56.25}{100}$

स्पष्टतः वाम पक्ष (LHS), दायाँ पक्ष (RHS) से ज्यादा है। इस प्रकार, गीता को ज्यादा ब्याज मिलेगा।

नोट : यदि प्रश्न में यह पूछा जाता है कि गीता, मीरा से कितना ज्यादा ब्याज प्राप्त करती है तो हमें $20000\left(1+\frac{16}{100}\right)^3$ एवं $20000\left(1+\frac{7.5}{100}\right)^3$ का मान निकालना पड़ता।

उदा. 30 : एक राशि को 20% वार्षिक चक्रवृद्धि ब्याज की दर से दो वर्षों के लिए उधार दिया जाता है। 482 रु. और अधिक ब्याज प्राप्त होता यदि चक्रवृद्धि ब्याज की गणना अर्द्धवार्षिक (half-yearly) होती। राशि ज्ञात करें।

हल : माना कि राशि = P रु.

CI (जब चक्रवृद्धि ब्याज की गणना वार्षिक की जाती है।)

$$= P\left[1+\frac{20}{100}\right]^2 - P$$

CI (जब चक्रवृद्धि ब्याज की गणना अर्द्धवार्षिक की जाती है।)

$$= P\left[1+\frac{10}{100}\right]^4 - P$$

अब, प्रश्नानुसार $P\left[1+\frac{10}{100}\right]^4 - P\left[1+\frac{20}{100}\right]^2 = 482$

$\Rightarrow P\left[(1.1)^4 - (1.2)^2\right] = 482$

$\Rightarrow P\left[(1.1)^2 - (1.2)\right]\left[(1.1)^2 + (1.2)\right] = 482$

$\Rightarrow P\left[1.21 - 1.2\right]\left[1.21 + 1.2\right] = 482$

$\Rightarrow P\left[(0.01)(2.41)\right] = 482$

$\therefore P = \frac{482}{2.41 \times 0.01} = 20000$ रु.

जब दो तथा तीन वर्षों का चक्रवृद्धि ब्याज ज्ञात हो तो मूलधन तथा दर निकालना

इस तरह के प्रश्नों का हल द्रुत विधि से करने के पूर्व विस्तार विधि से हल को समझना श्रेयस्कर होगा।

उदा. 31 : किसी राशि को चक्रवृद्धि ब्याज की वार्षिक दर से लगाया जाता है। दो तथा तीन वर्षों का चक्रवृद्धि ब्याज क्रमशः 210 रु. तथा 331 रु. है। मूलधन तथा दर ज्ञात करें।

हल : माना कि मूलधन P तथा दर r% वार्षिक है।

yoursmahboob

प्रश्नानुसार,

तीन वर्षों का चक्रवृद्धि ब्याज $= P\left[1+\frac{r}{100}\right]^3 - P = 331$

दो वर्षों का चक्रवृद्धि ब्याज $= P\left[1+\frac{r}{100}\right]^2 - P = 210$

अगर, $\left[1+\frac{r}{100}\right]$ के बदले में x रख दिया जाए तो

$P(x^3-1) = 331$ .... (1)

$P(x^2-1) = 210$ .... (2)

(1) को (2) से विभाजित करने पर,

$$\frac{P(x^3-1)}{P(x^2-1)} = \frac{331}{210} \Rightarrow \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{331}{210}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2+x+1}{x+1} = \frac{331}{210} \Rightarrow 1+\frac{x^2}{x+1} = 1+\frac{121}{210} \Rightarrow \frac{x^2}{x+1} = \frac{121}{210}$$

$$\Rightarrow 210x^2 - 121x - 121 = 0 \Rightarrow x = \frac{11}{10} \Rightarrow \left[1+\frac{r}{100}\right] = \frac{11}{10} \Rightarrow r = 10\%$$

तथा $P = 1000$ रु.

द्रुत विधि (Quicker Method):

$$\frac{x^2}{x+1} = \frac{\text{तीन वर्षों तथा दो वर्षों के चक्रवृद्धि ब्याज में अंतर}}{\text{दो वर्षों का चक्रवृद्धि ब्याज}}$$

जहाँ $x = \left(1+\frac{r}{100}\right)$

हल: $\frac{x^2}{x+1} = \frac{331-210}{210} \Rightarrow \frac{x^2}{x+1} = \frac{121}{210} \Rightarrow x = \frac{11}{10} \Rightarrow r = 10\%$

तीन वर्षों के चक्रवृद्धि ब्याज एवं साधारण ब्याज के अंतर (Δ_3) तथा दो वर्षों के चक्रवृद्धि ब्याज एवं साधारण ब्याज में अंतर (Δ_2) के बीच संबंध

$$\Delta_3 = \Delta_2\left(\frac{300+r}{100}\right)$$

उदा. 32: किसी राशि को चक्रवृद्धि ब्याज तथा साधारण ब्याज को किसी खास दर से लगाया जाता है तथा ऐसा पाया जाता है कि तीन वर्षों के चक्रवृद्धि ब्याज तथा साधारण ब्याज का अंतर दो वर्षों के चक्रवृद्धि ब्याज तथा साधारण ब्याज के अंतर का 3.15 गुना है। प्रतिशत दर ज्ञात करें।

yoursmahboob

हल: उपर्युक्त सूत्र से,

$$A_3 = A_2\left(\frac{300+r}{100}\right)$$

प्रश्नानुसार,

$$A_3 = A_2(3.15) \Rightarrow \frac{300+r}{100} = 3.15 \Rightarrow r = 15\%$$

अभ्यास प्रश्न

1. यदि ब्याज छमाही जोड़ा जाता हो तो 5% वार्षिक ब्याज की दर से 6400 रु. का 1 वर्ष 6 महीने का चक्रवृद्धि ब्याज निकालें।
2. यदि ब्याज तिमाही जोड़ा जाता हो तो 4 प्रतिशत वार्षिक ब्याज की दर से 10 हजार रु. का 9 महीने का चक्रवृद्धि ब्याज निकालें।
3. 4 प्रतिशत वार्षिक ब्याज की दर से 1250 रु. का दो वर्षों के चक्रवृद्धि ब्याज एवं साधारण ब्याज का अंतर बताएँ।
4. मैं किसी व्यक्ति को 8000 रु. 3 वर्षों के लिए $7\frac{1}{2}\%$ वार्षिक ब्याज की दर पर कर्ज देता हूँ। मुझे कितना अधिक मुनाफा हुआ होता यदि मैंने यह रकम चक्रवृद्धि ब्याज पर दिया होता?
5. कोई व्यापारी कुछ निश्चित पूँजी के साथ अपना व्यवसाय शुरू करता है और इससे उसे प्रति वर्ष 25% का मुनाफा होता है। यदि तीसरे साल के अंत में उसके पास 10 हजार रुपए हों तो आरंभ में उसकी पूँजी कितनी थी?
6. 5% वार्षिक चक्रवृद्धि ब्याज की दर से 1200 रु. कितने समय में 1323 रु. हो जाएगा?
7. 5% वार्षिक चक्रवृद्धि ब्याज की दर से 2000 रु. कितने साल में 2431.0125 रु. हो जाएगा?
8. 4% चक्रवृद्धि ब्याज की दर से 6250 रु. कितने साल में 6632.55 रु. हो जाएगा यदि ब्याज छमाही संयोजित होता हो?
9. यदि दो वर्षों में 400 रु., 441 रु. हो जाता हो तो चक्रवृद्धि ब्याज की दर बताएँ।
10. कितने प्रतिशत चक्रवृद्धि ब्याज की दर से 2 वर्षों में 625 रु. बढ़कर 676 रु. हो जाएगा?
11. कितने प्रतिशत चक्रवृद्धि ब्याज की दर से दो वर्षों में कोई रकम $\frac{9}{4}$ गुना हो जाएगा?
12. कितने प्रतिशत चक्रवृद्धि ब्याज की दर से 2 वर्षों में कोई रकम चौगुना हो जाएगा?
13. 5% प्रति वर्ष की दर से किसी धन का 3 वर्षों के चक्रवृद्धि ब्याज एवं साधारण ब्याज का अंतर 122 रु. है। धन ज्ञात करें।
14. किसी राशि का 4% की दर से 4 वर्षों का साधारण ब्याज 5% की दर से उसी राशि का 3 वर्षों के चक्रवृद्धि ब्याज से 57 रु. अधिक है। राशि ज्ञात करें।
15. कोई रकम चक्रवृद्धि ब्याज की दर से 2 वर्षों में 2809 रु. एवं तीन वर्षों में 2977.54 रु. हो जाता है तो मूल रकम एवं ब्याज की दर बताएँ।

yousmanhoob

16. कुछ रकम चक्रवृद्धि ब्याज पर लगाई जाती है, जबकि ब्याज वर्ष में एक बार संयोजित होता है। यदि दो लगातार वर्षों (successive years) में ब्याज 225 रु. एवं 236.25 रु. हो तो मूल रकम एवं ब्याज की दर की गणना करें।

उत्तर

1. मिश्रधन $= 6400\left(1+\frac{2.5}{100}\right)^3$

$$= 6400\left(\frac{41}{40}\right)^3 = \frac{6400\times 41\times 41\times 41}{40\times 40\times 40} = 6892.1 \text{ रु.}$$

2. $CI = 10000\left\{\left(1+\frac{1}{100}\right)^3 - 1\right\}$

$$= 10000\left\{\frac{30301}{100\times 100\times 100}\right\} = 303.01 \text{ रु.}$$

3. **द्रुत विधि (Quicker Method):** सूत्र का प्रयोग करें (2 वर्षों का अंतर)

अंतर $=$ मूलधन $\left(\frac{r}{100}\right)^2 = 1250\left(\frac{4}{100}\right)^2 = \frac{1250}{625} = 2$ रु.

4. **द्रुत विधि (Quicker Method):** सूत्र का प्रयोग करें (वर्षों का अंतर 3 वर्ष)

अंतर $= \frac{\text{मूलधन}\times r^2(300+r)}{(100)^3}$

$$= \frac{8000\times(7.5)^2\,(300+7.5)}{(100)^3}$$

$= 138.375 = 138.38$ रु.

इसलिए मूलधन 138.38 रु. अधिक प्राप्त होगी।

5. $10000 = x\left(1+\frac{25}{100}\right)^2$

$$\therefore\ x = \frac{10000\times 4\times 4\times 4}{5\times 5\times 5} = 5120 \text{ रु.}$$

6. $1323 = 1200\left(1+\frac{5}{100}\right)^t$

yoursmahboob

$$\frac{1323}{1200}=\left(\frac{21}{20}\right)^t$$

or, $\frac{441}{400}=\left(\frac{21}{20}\right)^t$ or, $\left(\frac{21}{20}\right)^2=\left(\frac{21}{20}\right)^t$ $\therefore t=2$ वर्ष

7. प्रश्न संख्या 6 की तरह

8. $6632.55=6250\left(1+\frac{2}{100}\right)^t$

या, $\frac{6632.55}{625000}=\left(\frac{51}{50}\right)^t$

या, $\frac{663255}{625000}=\left(\frac{51}{50}\right)^t$

या, $\frac{132651}{125000}=\left(\frac{51}{50}\right)^3=\left(\frac{51}{50}\right)^t$ $\therefore t=3$ वर्ष

इसलिए अभीष्ट समय $=\frac{t}{2}=\frac{3}{2}$

नोट: चूँकि चक्रवृद्धि ब्याज की गणना अर्द्धवार्षिक है इसलिए हम r को $\frac{r}{2}$, एवं t को $2t$ में बदल देते हैं।

9. सारणी से उत्तर पलक झपकते प्राप्त हो जाता है।
उत्तर = 5%

10. सारणी से, उत्तर = 4%

11. $\frac{9}{4}S=S\left(1+\frac{r}{100}\right)^2$ या, $\left(\frac{3}{2}\right)^2=\left(1+\frac{r}{100}\right)^2$

या, $1+\frac{r}{100}=\frac{3}{2}$ या, $\frac{r}{100}=\frac{1}{2}$ $\therefore r=50\%$

12. प्रश्न संख्या-11 की तरह।

13. मूलधन $=\frac{\text{अंतर}\times 100^3}{r^3(300+r)}$

$$=\frac{122\times 100\times 100\times 100}{25\times 305}=16000 \text{ रु.}$$

yoursmahboob

14. मान लिया कि मूलधन = x रु.

प्रश्नानुसार, $\frac{x \times 4 \times 4}{100} - 57 = x\left\{\left(1+\frac{5}{100}\right)^3 - 1\right\}$

या, $\frac{4x}{25} - 57 = x\left(\frac{1261}{8000}\right)$

या, $x\left(\frac{4}{25} - \frac{1261}{8000}\right) = 57$

या, $x\left(\frac{1280 - 1261}{8000}\right) = 57$

$\therefore x = \frac{57 \times 8000}{19} = 24000$ रु.

नोट: चूँकि साधारण ब्याज एवं चक्रवृद्धि ब्याज के लिए अलग-अलग समय दिया गया है, इसलिए यहाँ द्रुत विधि का प्रयोग नहीं किया गया।

15. राशियों में अंतर (= 2977.54 − 2809 =) 168.54 रु.

168.54 रु., 2809 रु. का एक वर्ष का ब्याज है (इसे साधारण ब्याज कहें या चक्रवृद्धि ब्याज, बात बराबर है, क्योंकि एक वर्ष के लिए दोनों राशियाँ समान होती हैं।)

$\therefore$ ब्याज की दर = $\frac{168.54 \times 100}{2809} = 6\%$

मूल राशि के लिए

$2809 = x\left(1+\frac{6}{100}\right)^2$

या, $2809 = x\left(\frac{53}{50}\right)^2$

$\therefore x = \frac{2809 \times 50 \times 50}{53 \times 53} = 2500$ रु.

16. विधि, हू-ब-हू प्रश्न संख्या-15 की तरह है। ब्याज में अंतर = 236.25 − 225 = 11.25 रु. यह अंतर 225 रु. पर एक वर्ष का साधारण ब्याज है।

$\therefore$ ब्याज की दर = $\frac{11.25 \times 100}{225 \times 1} = 5\%$

अब चूँकि वर्षों की संख्या नहीं दी गई है, इसलिए मूलधन की गणना नहीं की जा सकती है।

yoursmahboob

मिश्रण
(Alligation)

***मिश्रण* (Alligation) *विधि* से हमें निम्नलिखित गणनाओं में मदद मिलती है:**

(1) किसी मिश्रण का मध्यमान या औसत मान निकालने में जबकि मिश्रण के सभी घटकों का मूल्य एवं मिश्रण में उनके अनुपात का मान दिया गया हो, इसे साधारण मिश्रण या Alligation Medial कहते हैं।

(2) किसी नियत मूल्य पर मिश्रण तैयार करने के लिए निश्चित मूल्य वाले घटकों को किस अनुपात में मिलाया जाए, यह पता लगाना। इसे एकान्तर या वैकल्पिक मिश्रण या Alligation Alternate कहते हैं।

नोट:

(1) एलिगेशन (Alligation) शब्द का अर्थ है 'जोड़ना' या 'संबद्ध करना'। इस नियम का नामकरण मिश्रण से संबद्ध प्रश्नों में प्रयुक्त संबंध के आधार पर किया गया है।

(2) मिश्रण विधि का अनुप्रयोग प्रतिशत मान, दर, मूल्य, गति आदि मामलों में किया जाता है और इसका प्रयोग निरपेक्ष मानों के लिए नहीं किया जाता है। अर्थात् जहाँ कहीं भी प्रतिशत, प्रति घंटा, प्रति कि. ग्रा., प्रति कि. मी. इत्यादि की तुलना की जा रही हो हम एलिगेशन (Alligation) का प्रयोग कर सकते हैं।

मिश्रण का नियम

(i) यदि मिश्रण के घटक किसी निश्चित अनुपात में मिलाए जाते हों, तो

$$\frac{\text{सस्ते घटक की मात्रा}}{\text{महँगे घटक की मात्रा}} = \frac{\text{महँगे का क्रय मूल्य} - \text{औसत मूल्य}}{\text{औसत मूल्य} - \text{सस्ते का क्रय मूल्य}}$$

इसे निम्नलिखित ढंग से प्रदर्शित किया जाता है:

सस्ते घटक की इकाई का क्रय मूल्य (c) — महँगे घटक की इकाई का क्रय मूल्य (d)

औसत मूल्य (m)

(d − m) — (m − c)

सस्ते (सस्ते सामान की मात्रा) : (महँगे सामान की मात्रा)

$= (d - m) : (m - c)$

(ii) यदि a लिटर किसी द्रव से भरे किसी बर्तन में से b लिटर द्रव निकालकर उतनी मात्रा में उतना ही पानी डाल दिया जाए और यह क्रिया n बार दुहराई जाए तो बर्तन के मिश्रण में द्रव की मात्रा निम्नलिखित द्वारा प्राप्त होगी:

$$\text{शेष द्रव} = \text{सम्पूर्ण द्रव} \times \left(1 - \frac{\text{पहली बार निकाले गए द्रव की मात्रा}}{\text{सम्पूर्ण द्रव}}\right)^n = a\left(1 - \frac{b}{a}\right)^n$$

yoursmahboob

प्रमाण: पहली क्रिया में a लिटर द्रव निकालकर उसकी जगह पर b लिटर पानी डालने पर प्राप्त मिश्रण में द्रव की मात्रा $= a - b = a\left(1 - \frac{b}{a}\right)$

तथा इस मिश्रण में द्रव एवं पानी का अनुपात

द्रव : पानी $= a - b : b$

अब यदि b लिटर इस मिश्रण से निकालकर उसमें फिर b लिटर पानी मिला दिया जाए तो, निकाले गए b लिटर मिश्रण में द्रव और पानी की मात्रा:

द्रव $= \frac{a-b}{a} \times b$, पानी $= \frac{b}{a} \times b$

$\therefore$ दूसरी क्रिया के बाद, शेष द्रव $= a - b - \frac{a-b}{a} \times b$

$$= (a-b)\left(1 - \frac{b}{a}\right)$$

$$= a\left(1 - \frac{b}{a}\right)\left(1 - \frac{b}{a}\right)$$

$$= a\left(1 - \frac{b}{a}\right)^2$$

इस प्रकार, n वीं क्रिया के बाद,

शेष द्रव $= a\left(1 - \frac{b}{a}\right)^n$

हल किए गए उदाहरण

उदा. 1: 3.10 रु. प्रति किलोग्राम एवं 3.60 रु. प्रति किलोग्राम के चावल को किस अनुपात में मिलाया जाए कि मिश्रण का मूल्य 3.25 रु. प्रति किलोग्राम हो ?

हल: 1 किलोग्राम सस्ते चावल का क्रय मूल्य (310 पैसे) 1 किलोग्राम महँगे चावल का क्रय मूल्य (360 पैसे)

माध्य मूल्य (325 पैसे)

35 15

मिश्रण के नियम से:

$$\frac{\text{सस्ते चावल की मात्रा}}{\text{महँगे चावल की मात्रा}} = \frac{35}{15} = \frac{7}{3}$$

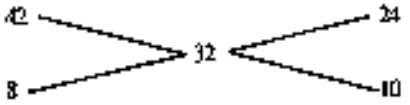
$\therefore$ इन्हें 7 : 3 के अनुपात में मिलाना होगा

yourmahboob

उदा. 2: 24 पैसे प्रति किलोग्राम कीमत वाले 25 किलोग्राम नमक में 42 पैसे प्रति किलोग्राम वाला कितना नमक मिलाया जाए, ताकि मिश्रण को 40 पैसे प्रति किलोग्राम बेचने पर 25% का मुनाफा हो?

हल: मिश्रण का क्रय मूल्य $= 40 \times \frac{100}{125}$ पैसे

$= 32$ पैसे प्रति किलोग्राम। ..... (पिन के नियम से)



अनुपात = 4 : 5

इस प्रकार 24 पैसे वाले नमक के 5 किलोग्राम में 42 पैसे वाले नमक का 4 किलोग्राम मिलाना होगा।

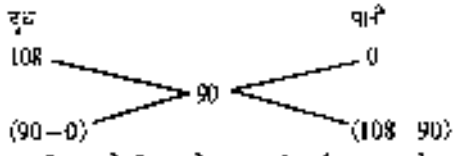
$\therefore$ 42 पैसे वाले नमक की अभीष्ट मात्रा $= 25 \times \frac{4}{5}$

$= 20$ किलोग्राम

दूध एवं पानी

उदा. 3: दूध की खास मात्रा में 16 लिटर पानी मिला दिया जाता है और तब इस मिश्रण का मूल्य होता है 90 पैसे प्रति लिटर। यदि विशुद्ध दूध 1.08 रु. प्रति लिटर हो तो मिश्रण में कितना लिटर दूध है।

हल: पाश्य मूल्य = 90 पैसे एवं पानी का मूल्य = 0 पैसे



$\therefore$ मिश्रण के नियम से, दूध एवं पानी 5 : 1 के अनुपात में है।

मिश्रण में दूध की मात्रा = 5 × 16 = 80 लिटर

उदा. 4: पानी और स्पिरिट को किस अनुपात में मिलाया जाए कि उसे क्रय मूल्य पर बेचने से $16\frac{2}{3}\%$ का मुनाफा हो।

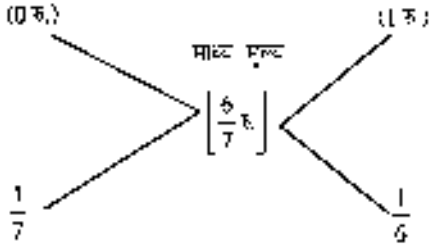
हल: मान लिया कि स्पिरिट का क्रय मूल्य 1 रु. प्रति लिटर है।

$\therefore$ 1 लिटर मिश्रण का विक्रय मूल्य = 1 रु. मुनाफा $-16\frac{2}{3}\%$

1 लिटर मिश्रण का क्रय मूल्य $= \left[\frac{100 \times 3 \times 1}{350}\right]$ रु. $= \frac{6}{7}$ रु.

yoursmahboob

1 लिटर पानी का क्रय मूल्य 1 लिटर शुद्ध स्पिरिट का क्रय मूल्य

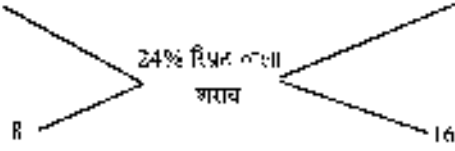


$$\frac{\text{पानी की मात्रा}}{\text{स्पिरिट की मात्रा}} = \frac{\frac{1}{7}}{\frac{6}{7}} = \frac{1}{6}$$

∴ पानी एवं स्पिरिट का अनुपात – 1 : 6

उदा. 5: कोई खानसामा शैरो के पीपे से शराब चुराता है। इस शराब में 40% स्पिरिट मिला हुआ है। उसने शराब की जितनी मात्रा चुराई, उसकी भरपाई के लिए उसमें 16% स्पिरिट वाला शराब मिला दिया। अब पीपे में स्पिरिट की सांद्रता (strength) घटकर मात्र 24% रह गई। उसने कितना शराब चुराया था?

हल : 40% स्पिरिट वाला शराब 16% स्पिरिट वाला शराब



मिश्रण के नियम से:

$$\frac{40\%\text{ स्पिरिट वाला शराब}}{16\%\text{ स्पिरिट वाला शराब}} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$$

अर्थात् उन्हें 1 : 2 के अनुपात में मिलाया जाना चाहिए। इस प्रकार पीपे में शैरो का $\frac{1}{3}$ छोड़ दिया गया था एवं खानसामें ने उसमें से $\frac{2}{3}$ हिस्सा निकाल लिया था।

तीन घटक – अनुपात की मात्रा असीमित

उदा. 6: 1.27 रु., 1.29 रु. एवं 1.32 रु. प्रति किलोग्राम वाले गेहूँ की तीन किस्मों के आपस में किस अनुपात में मिलाया जाए कि मिश्रण की कीमत 1.30 रु. प्रति किलोग्राम हो?

हल:

पहला गेहूँ	दूसरा गेहूँ	तीसरा गेहूँ	माध्य मूल्य
127 पैसे	129 पैसे	132 पैसे	130 पैसे

यहाँ पहली दो कीमतें माध्य मूल्य से कम हैं तथा तीसरे गेहूँ की कीमत माध्य मूल्य से

yourmanhoob

ज्यादा है। सर्वप्रथम वह अनुपात पता करें, जिसके अनुसार पहले (127 पैसा वाला) एवं तीसरे (132 पैसा वाला) गेहूँ को मिलाने पर 130 पैसे प्रति किलोग्राम वाला मिश्रण तैयार हो सके।

(i) पहला गेहूँ तीसरा गेहूँ

127 ——— 132

130

2 ——— 3

∴ अनुपात = 2 : 3

फिर, यह पता किया जाना चाहिए कि 129 पैसे एवं 132 पैसे वाले गेहूँ को किस अनुपात में मिलाया जाए ताकि 130 पैसे प्रति किलोग्राम वाला मिश्रण तैयार हो सके।

दूसरा गेहूँ तीसरा गेहूँ

129 ——— 132

130

2 ——— 1

∴ अनुपात = 2 : 1

अब इन दोनों मिश्रणों को किसी भी अनुपात में मिलाने पर मिश्रण की कीमत 130 पैसे प्रति किलोग्राम ही रहेगी, क्योंकि दोनों मिश्रणों की कीमत भी 130 पैसे प्रति किलोग्राम है। इसका मतलब है कि पहले मिश्रण के 5 किलोग्राम में 127 पैसे वाले 2 किलोग्राम गेहूँ एवं 132 पैसे वाला 3 किलोग्राम गेहूँ है तथा 3 किलोग्राम के दूसरे मिश्रण में 129 पैसे वाला 2 किलोग्राम गेहूँ तथा 132 पैसे वाला 1 किलोग्राम गेहूँ है। इसलिए 8 किलोग्राम मिश्रण में 127 पैसे वाला गेहूँ 2 किलोग्राम, 129 पैसे वाला गेहूँ 2 किलोग्राम एवं 132 पैसे वाला गेहूँ 4 किलोग्राम है, इसलिए अपेक्षित अनुपात = 2 : 2 : 4 = 1 : 1 : 2

एक दूसरी स्थिति पर विचार कीजिए:

यदि हम 4 किलोग्राम पहला गेहूँ लें तो निश्चित रूप से 6 किलोग्राम तीसरा गेहूँ इस्तेमाल करना होगा। इसी तरह यदि दूसरे गेहूँ का 10 किलोग्राम इस्तेमाल किया जाए तो तीसरे गेहूँ का 5 किलोग्राम इस्तेमाल करना होगा। इस प्रकार एक अन्य अनुपात भी है:

	पहला		दूसरा		तीसरा
	4 कि. ग्रा.	:	10 कि. ग्रा.	:	11 कि. ग्रा.
या	4	:	10	:	11

आप इस नतीजे की जाँच भी कर सकते हैं।

वस्तुतः आप पहले या दूसरे गेहूँ की किसी भी मात्रा का इस्तेमाल कर सकते हैं बशर्तें कि हम तीसरे प्रकार के गेहूँ की आवश्यक संगत मात्रा का इस्तेमाल समुचित मात्रा में करें। इसलिए अनुपात की संख्या असीमित है।

नोट: उपर्युक्त गणना का सरलीकरण भी संभव है। इसके लिए निम्नलिखित नियम का अनुपालन करें

नियम: सभी प्रदत्त मूल्यों को एक समान इकाई (जैसे 1.24 रु. 1.31 रु. एवं 1.20 रु. के क्रमशः

yourshanbooks

124, 131 एवं 120 पैसे में) में प्रदत्त ऐ एवं परिमाण (magnitude) के अनुसार उन्हें एक-दूसरे के नीचे सजाकर लिखें, जिससे कि न्यूनतम मान सबसे ऊपर लिखा हो। मध्य मूल्य को बाईं ओर लिख दें। मूल्यों का जोड़ा बना लें ताकि वे मूल्य जो मध्य मूल्य से बड़ा एवं छोटा हो एक साथ जोड़े में आएँ। इसके मध्य मूल्य से प्रत्येक मूल्य का अंतर निकालें एवं संबद्ध मूल्य के सम्मुख इसे लिख दें। इन अंतरों से आप अभीष्ट उत्तर तक पहुँच जाएँगे। उदाहरण के लिए, उपर्युक्त प्रश्न को निम्नलिखित तरीके से हल किया जा सकता है:

130	127	2	(−132 130)
	129	2	(−132−130)
	132	3 + 1 − 4	[−(130 127) + (130−129)]

∴ अभीष्ट अनुपात = 2 : 2 : 4 या 1 : 1 : 2

उदा. 7: 1.20 रु., 1.44 रु. एवं 1.74 रु. प्रति किलोग्राम वाले गेहूँ को किस अनुपात में मिलाया जाए ताकि मिश्रण की कीमत 1.44 रु. प्रति किलोग्राम हो?

हल:

पहला गेहूँ	दूसरा गेहूँ	तीसरा गेहूँ
120	144	174

उपर्युक्त नियम के अनुसार,

141	120	3−33	[(144 141)−(174−141)]
	144	21	[−141−120]
	174	21	[−141−120]

∴ अभीष्ट अनुपात = 36 : 21 : 21
= 12 : 7 : 7

नोट: प्रदत्त शर्तों के अधीन अन्य अनुपातों की भी गणना करें।

जब प्रदत्त घटकों की संख्या 4 हो

उदा. 8: कोई दुकानदार 54 पैसे, 72 पैसे, 1.20 रु. एवं 1.44 रु. प्रति किलोग्राम वाले चार किस्म के चावलों को किस अनुपात में मिलाए ताकि उसे 96 पैसे प्रति किलोग्राम वाला मिश्रण प्राप्त हो?

हल: *पहला हल:*

96	54		48	[−144−96]
	72	24		[−120 96]
	120	24		[=96−24]
	144		42	[−96−54]

∴ अभीष्ट अनुपात − 48 : 24 : 24 : 42 − 8 : 4 : 4 : 7

दूसरा हल :

96	54		24	[−120 96]
	72	48		[−144−96]
	120	42		[−96 54]
	144		24	[=96−72]

yoursmahboob

$\therefore$ अभीष्ट अनुपात = 24 : 48 : 42 : 24 = 4 : 8 : 7 : 4

नोट: विभिन्न प्रकार से जोड़ने पर भिन्न-भिन्न अनुपात मिलेंगे।

दो पात्रों का मिश्रण

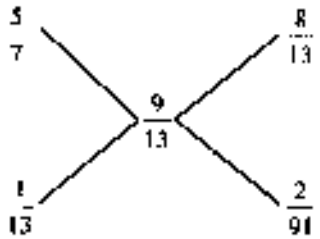
उदा. 9: पात्र A एवं पात्र B में दूध और पानी को क्रमशः 5 : 2 एवं 8 : 5 के अनुपात में मिलाया जाता है। इन दोनों पात्रों से मिश्रण निकाल कर इन्हें किस अनुपात में मिलाया जाए ताकि प्राप्त मिश्रण में दूध और पानी का अनुपात 9 : 4 हो।

हल : पात्र A में, दूध – मिश्रण के वजन का $\frac{5}{7}$

पात्र B में, दूध – मिश्रण के वजन का $\frac{8}{13}$

अब, हम एक मिश्रण बनाना चाहते हैं, जिसमें दूध इस मिश्रण के वजन का $\frac{9}{13}$ हो।

मिश्रण के नियम से:

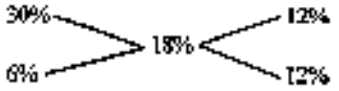


$\therefore$ अभीष्ट अनुपात = $\frac{1}{13} : \frac{2}{91}$ = 7 : 2

यदि कोई खानसामा शराब चुराए

उदा. 10: कोई खानसामा शैरी के एक पीपे से कुछ शराब निकालता है। इस शराब में 30% स्पिरिट है। इसकी जगह वह पीपे में जो शराब मिलाता है उसमें मात्र 12% स्पिरिट है। इससे पीपे के शराब में स्पिरिट की मात्रा मात्र 18% ही होकर रह गई। उसने पीपे से कितना शराब चुराया था?

हल : मिश्रण के नियम से पता चलता है कि 30% स्पिरिट वाले शराब को 12% स्पिरिट वाले शराब के साथ 1 : 2 के अनुपात में मिलाने पर 18% स्पिरिट वाला शराब मिलता है।



अनुपात = 6 : 12 = 1 : 2

इसका मतलब है कि पीपे में एक तिहाई शैरी छोड़ दिया गया था अर्थात् खानसामा ने $\frac{2}{3}$ भाग शराब की चोरी की।

yoursmahboob

$\therefore \frac{2}{3}$ हिस्सा शराब चुरा लिया गया।

उदा. 11: किसी सुनार के पास दो किस्म का सोना है: 12 कैरेट शुद्धता वाला एवं 16 कैरेट शुद्धता वाला। इन दोनों को किस अनुपात में मिलाया जाए कि प्राप्त आभूषण में सोने की शुद्धता 15 कैरेट हो?

हल:

I		II
12		16
	15	
1		3

इसलिए इसे दोनों प्रकार से लेने को 1 : 3 के अनुपात में मिलाना चाहिए।

उदा. 12: 300 ग्राम चीनी के घोल में 40% चीनी है। इस घोल में कितना चीनी मिलाया जाए ताकि इसमें चीनी की मात्रा 50% हो जाए।

हल: दिए गए घोल में 40% चीनी है। अतिरिक्त चीनी मिलाया जाना है। इसलिए मिश्रण के नियम से:

40%		100%
	50%	
50%		10%

$\therefore$ दोनों मिश्रणों को 5 : 1 के अनुपात में मिलाना होगा।

$\therefore$ चीनी की अपेक्षित मात्रा $= \frac{300}{5} \times 1 = 60$ ग्राम

सूत्र से (Direct Formula):

$$\text{चीनी की अतिरिक्त मात्रा} = \frac{\text{घोल की मात्रा}(\text{अपेक्षित \% मान} - \text{वर्तमान \% मान})}{(100 - \text{अपेक्षित \% मान})}$$

दिए गए प्रश्न में,

$$\frac{300\,(50-40)}{100-50} = 60 \text{ ग्राम}$$

उदा. 13: किसी कक्षा में 65 छात्र हैं। इनके बीच 39 रु. को इस प्रकार वितरित किया जाता है कि प्रत्येक लड़के को 80 पैसे एवं प्रत्येक लड़की को 30 पैसे मिले। कक्षा में लड़कों एवं लड़कियों की संख्या कितनी है ?

हल: यहाँ मिश्रण विधि का प्रयोग करके प्रति लड़का या लड़की के लिए किए जाने पर,

$$\text{प्रति छात्र रुपए का माध्य मान} = \frac{3900}{65} = 60 \text{ पैसे}$$

लड़का		लड़की
80		30
	60	
30		20

yoursmahboob

∴ लड़के : लड़कों = 3 : 2

∴ लड़कों की संख्या = $\frac{65}{3+2} \times 3 = 39$

लड़कियों की संख्या = 65 − 39 = 26

उदा. 14: किसी व्यक्ति के पास 25 रु. प्रति लिटर वाला रसायन है। इस रसायन में किस अनुपात में पानी मिलाया जाए ताकि मिश्रण को 20 रु. प्रति लिटर की दर से बेचने पर 25% का मुनाफा हो।

हल : यहाँ मिश्रण विधि का प्रयोग मूल्यों के संदर्भ में किया जा सकता है। इसलिए मिश्रण का औसत मूल्य निकालना होगा।

मिश्रण का विक्रय मूल्य = 20 रु./लिटर

मुनाफा = 25%

∴ औसत मूल्य = $20 \times \frac{100}{125} = 16$ रु./लिटर

मिश्रण विधि का प्रयोग करने पर,

रसायन पानी

25 — 16 — 0

16 — 9

∴ रसायन : पानी = 16 : 9 (उत्तर)

उदा. 15: कोई व्यक्ति 6 घंटे में 285 किलोमीटर की यात्रा 2 चरणों में पूरी करता है। यात्रा के पहले चरण में वह 40 कि. मी. प्रति घंटे की रफ्तार से बस से यात्रा करता है। यात्रा के दूसरे चरण में वह 35 कि. मी. प्रति घंटे की रफ्तार से रेलगाड़ी से यात्रा करता है। उसने रेलगाड़ी से कितनी दूरी तय की?

हल: यहाँ, मिश्रण विधि चाल पर लागू होगा।

बस की चाल रेलगाड़ी की चाल

40 — औसत चाल $\frac{285}{6}$ — 35

$\frac{45}{6}$ — $\frac{45}{6}$

बस में बिताया गया समय : रेलगाड़ी में बिताया गया समय = $\frac{45}{6} : \frac{45}{6}$

रेलगाड़ी द्वारा तय की गई दूरी = $\frac{285}{2}$ = 142.5 किलोमीटर

yousmahboob

उदा. 16: दूध और पानी को किस अनुपात में मिलाया जाए ताकि मिश्रण को लागत मूल्य पर बेचने से $16\frac{2}{3}$% का मुनाफा हो?

हल: प्रश्न 4 का हल देखें.

***संक्षिप्त विधि* (Short-cut Method):** ऐसे प्रश्नों में अनुपात निम्नलिखित तरीके से निकालते हैं :

पानी : दूध $= 16\frac{2}{3} : 100 = 1 : 6$

उदा. 17: शराब और पानी को किस अनुपात में मिलाया जाए ताकि मिश्रण को लागत मूल्य पर बेचने से 20% का मुनाफा हो?

हल: पानी : शराब $= 20 : 100 = 1 : 5$

उदा. 18: किसी व्यापारी के पास 50 किलोग्राम दाल है जिसका कुछ हिस्सा वह 8% मुनाफे पर बेचता है एवं शेष 18% मुनाफे पर। कुल मिलकर उसे 14% का मुनाफा होता है। उसने 18% मुनाफे पर कितनी सामग्री बेची ?

हल: ***विस्तार विधि* (Detail Method):**

मान लिया कि 18% मुनाफे पर उसने x कि. ग्रा. दाल बेची। तब 8% मुनाफे पर बेचा गया दाल $= (50 - x)$ किलोग्राम.

सुविधा के लिए, यह मान लें कि दाल का मूल्य 1 रुपया प्रति किलोग्राम है

$\therefore$ x किलोग्राम दाल की कीमत $= x$ रु.

$(50 - x)$ किलोग्राम दाल की कीमत $= (50 - x)$ रु.

इस प्रकार हमें निम्नलिखित समीकरण प्राप्त होता है:

x का 18% + $(50 - x)$ का 8% = 50 का 14%

$\Rightarrow 18x + 8(50 - x) = 14 \times 50 \Rightarrow 10x = 300 \therefore x = 30$

***मिश्रण–विधि से* (By Alligation Method):**

I हिस्सा — II हिस्सा

8% मुनाफा — 18% मुनाफा

14% (माध्य लाभ)

4% — 6%

$= 4 : 6 = 2 : 3$

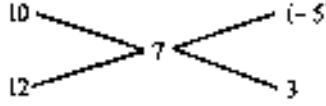
$\therefore$ 18% मुनाफे पर बेची गई राशि $= \frac{50}{2+3} \times 3 = 30$ किलोग्राम

नोट: उपर्युक्त उदाहरण को हल करने के क्रम में विस्तृत विधि के साथ-साथ मिश्रण विधि भी दी हुई है ताकि आप तुलना करके यह जान सकें कि द्रुत गति से हल करने के लिए मिश्रण विधि कितना उपयोगी है।

yourmanhoob

उदा. 19: किसी व्यापारी के पास 50 किलोग्राम चावल है। जिसका एक हिस्सा वह 10% मुनाफे पर बेचता है तथा शेष 5% हानि पर बेचता है। कुल मिलाकर उसे 7% का मुनाफा होता है। उसने 10% लाभ एवं 5% हानि पर कितना चावल बेचा ?

हल : I हिस्सा II हिस्सा



∴ 10% मुनाफा एवं 5% हानि पर बेचे गए चावलों का अनुपात = 12 : 3 = 4 : 1

∴ 10% मुनाफे पर बेचे गए चावल की मात्रा

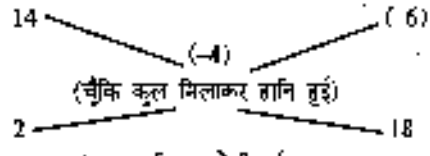
$= \left(\frac{50}{4+1} \times 4 =\right)$ 40 किलोग्राम एवं 5% हानि पर बेचे गए चावल की मात्रा

= (50 – 40 =) 10 कि. ग्रा.

नोट: जब कभी हानि होती हो तो ऋणात्मक चिह्न का प्रयोग कीजिए, यहाँ 7 एवं (–5) के बीच अन्तर = 7 + 5 = 12। ऐसे अंतर को कभी नहीं लें जिसका मान ऋणात्मक हो.

उदा. 20: किसी व्यापारी के पास 50 किलोग्राम चावल है। इनमें से कुछ को वह 14% मुनाफे पर बेचता है एवं शेष को 6% हानि पर। कुल मिलाकर उसे 4% की हानि हो होती है। 14% मुनाफा एवं 6% हानि पर क्रमशः कितना-कितना चावल बेचा गया ?

हल : I हिस्सा II हिस्सा



∴ 14% मुनाफा एवं 6% हानि पर बेची गई मात्रा का अनुपात = 2 : 18 = 1 : 9

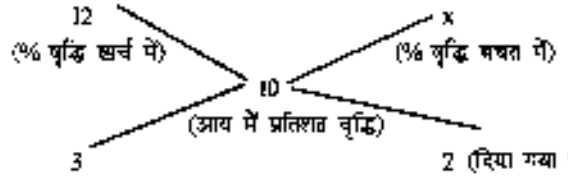
∴ 14% मुनाफे पर बेची गई मात्रा $= \left(\frac{50}{1+9} \times 1 =\right)$ 5 किलोग्राम एवं

6% हानि सहकर बेची गई मात्रा = (50 – 5 =) 45 किलोग्राम

नोट: दोसरी रेखा से लगी संख्या हमेशा धनात्मक होनी चाहिए। यही वजह है कि {–6 – (–4)} = –2 का ऋण '–' चिह्न छोड़ दिया गया है।

उदा. 21: मोहन के खर्च और बचत 3 : 2 के अनुपात में हैं। उसकी आय 10% बढ़ जाती है। उसका खर्च भी 12% बढ़ जाता है। उसके बचत में कितने प्रतिशत की वृद्धि होती है ?

हल: व्यय बचत



yourexamboob

जहाँ x के दो मान प्राप्त होते हैं: 7 एवं 13। संभव उत्तर प्राप्त करने के लिए हमें इस बात का ध्यान रखना चाहिए कि केन्द्रीय मूल्य (10), x एवं 12 के बीच अन्तरित होना चाहिए। इसलिए x का मान 7 होना चाहिए न की 13।

$\therefore$ अभीष्ट % वृद्धि = 7%

उदा. 22: 80 लिटर का एक पीपा दूध एवं पानी से भरा जाता है। पीपे से 70% दूध एवं 30% जल निकाल लिया जाता है। इसके पश्चात 55% खाली हो जाता है। दूध एवं पानी की आरंभिक मात्रा ज्ञात करें।

हल: यहाँ पीपा से निकाले जाने वाले दूध एवं पानी के प्रतिशत मान पर विचार करना होगा।

दूध		पानी
70%		30%
	55%	
25%		15%

$\Rightarrow 5 : 3$

$\therefore$ दूध : पानी = 5 : 3

दूध की मात्रा $= \left(\frac{80}{5+3} \times 5 =\right) 50$ लिटर एवं

पानी की मात्रा $= \left(\frac{80}{5+3} \times 3 =\right) 30$ लिटर

उदा. 23: किसी बर्तन में 80 किलोग्राम दूध है। इस बर्तन से 8 किलोग्राम दूध निकालकर उसकी जगह पानी मिला दिया जाता है। इसके बाद ऐसा दो बार और किया जाता है। अब बर्तन में कितना दूध शेष रह गया ?

हल: यदि किसी बर्तन में x इकाई द्रव हो और उसमें से हर बार y इकाई निकाल लिया जाए तो n बार ऐसा करने के बाद बर्तन में द्रव की बची हुई मात्रा $= x\left[\frac{x-y}{x}\right]^n$ इकाई

इस सूत्र का प्रयोग उपर्युक्त प्रश्न के लिए करने पर,

दूध की बची हुई मात्रा $= 80\left[\frac{80-8}{80}\right]^3$ किलोग्राम $= 58.32$ किलोग्राम

उदा. 24: पानी से भरे हुए किसी पीपा से 9 लिटर पानी निकालकर उसकी जगह दूध भर दिया जाता है। इस मिश्रण में से 9 लिटर निकालकर उसमें फिर इतना ही दूध भर दिया जाता है। अब पीपा में जल और दूध का अनुपात 16 : 9 है। पीपे की धारिता (capacity) कितनी है?

हल: मान लिया कि पीपा में x लिटर पानी था। उपर्युक्त सूत्र से, n बार पानी निकालने के बाद,

$$\frac{n \text{ बार पानी निकालने के बाद बचा हुआ पानी}}{\text{अंत में दूध की मात्रा}} = \left[\frac{x-y}{x}\right]^n$$

yoursmahboob

इस प्रश्न के लिए,

$$= \left[\frac{x-9}{x}\right]^2 = \left[\frac{16}{16+9}\right] = \frac{16}{25}$$

$\therefore x = 45$ लिटर

उदा. 25: 1500 रु. को दो हिस्सों में इस प्रकार विभाजित किया जाता है कि यदि एक हिस्से को 6% ब्याज दर पर उधार दिया जाए तथा दूसरे हिस्से को 5% ब्याज दर पर, तो साल के अंत में दोनों हिस्सों से कुल 85 रु. ब्याज की प्राप्ति होती है। 5% ब्याज दर पर कितने रुपए निवेश किए गए ?

हल: यदि 1500 रु. को पूर्णतया 6% ब्याज दर पर लगा दिया जाए तो वार्षिक आमदनी

= 1500 का 6% = 90 रु.

यदि पूरी रकम 5% ब्याज दर पर लगा दी जाए तो वार्षिक आय

= 1500 का 5% = 75 रु.

पर वास्तविक आय = 85 रु.

मिश्रण विधि का प्रयोग करने पर,

6%		5%
90 रु.	85 रु	75 रु.
10 रु.		5 रु.
2	:	1

$\therefore$ 5% ब्याज पर लगाई गई राशि $= \frac{1}{3} \times 1500 = 500$ रु.

नोट: इसे ब्याज की औसत दर के माध्यम से भी हल किया जा सकता है।

उदा. 26: दूध और पानी के 40 लिटर मिश्रण में 10 प्रतिशत पानी है। इसमें कितना पानी मिलाया जाए ताकि नए मिश्रण में पानी का अंश 20 प्रतिशत हो जाए?

हल: यह सवाल उदा.-12 जैसा ही है।

दिए गए मिश्रण में 10% पानी है। पानी मिलाया जाना है। इसलिए दूसरे घोल में 100% पानी है। इसलिए मिश्रण विधि से,

10%		100%
80%	20%	10%

इसलिए दोनों मिश्रणों को 8 : 1 के अनुपात में मिलाना होगा। अर्थात् पहले मिश्रण के प्रत्येक 8 लिटर में 1 लिटर पानी मिलाना होगा। इसलिए पहले मिश्रण के 40 लिटर में

$\left(\frac{40}{8} \times 1 =\right)$ 5 लिटर पानी मिलाना होगा।

yoursmahboob

सूत्र से (By Direct Formula):

उदा.-12 में दिए गए सूत्र से,

पानी की अभीष्ट मात्रा $= \frac{40(20-10)}{100-20} = 5$ लिटर

नोट: (1) उपर्युक्त दोनों विधियों के प्रयोग से सवाल उतनी ही शीघ्रता से हल किए जा सकते हैं। पर परीक्षा भवन में सूत्र को स्मरण कर पाना जरा मुश्किल होता है। इसलिए हमारा सुझाव है कि ऐसे प्रश्नों के हल करने के लिए आप मिश्रण विधि का ही प्रयोग करें।

(2) उदा.-12 में चीनी के घोल में चीनी मिलाया गया था, पर इस उदाहरण में दूध और पानी के मिश्रण में पानी मिलाया जाता है। यह विधि दोनों प्रकार के प्रश्नों के लिए उतना ही उपयोगी है। केवल एक बात पर ध्यान देना जरूरी है कि दोनों मिश्रणों के संदर्भ में प्रतिशत मान उसी घटक के संदर्भ में दिया गया होना चाहिए। उदाहरण के लिए, निम्नलिखित स्थिति देखें:

"दूध और पानी के 40 लिटर मिश्रण में 90% दूध है। इसमें कितना पानी मिलाया जाए कि नए मिश्रण में 20% पानी हो जाए।"

उपर्युक्त उदाहरण में, दूध का प्रतिशत मान (90%) पहले मिश्रण के संदर्भ में है, तथा नए मिश्रण के संदर्भ में पानी का प्रतिशत मान दिया गया है, जो कि 20% है। इसलिए उपर्युक्त उदाहरण को दो प्रकार से हल किया जा सकता है।

(1) पहले मिश्रण में पानी के प्रतिशत मान का पता लगाकर, या

(2) दूसरे मिश्रण में दूध के प्रतिशत मान का पता करके।

पहली स्थिति में, मिश्रण में पानी का प्रतिशत = (100 – 90 =) 10%

शेष विधि उदा. 26 की तरह है।

दूसरी स्थिति में, नये मिश्रण में दूध का प्रतिशत = (100 – 20 =) 80%

इसके बाद मिश्रण विधि का प्रयोग करें।

यहाँ दूसरा मिश्रण जल है, जिसमें 0% दूध है। इसलिए,

पहला मिश्रण दूसरा मिश्रण (जल)

90% 0%

80%

80% 10%

∴ मिश्रणों को मिलाए जाने के लिए अभीष्ट अनुपात = 8 : 1

इस प्रकार, हमलोग इस विधि से भी समान निष्कर्ष पर पहुँचते हैं।

उदा. 27: किसी चिड़ियाघर में खरगोश एवं कबूतर हैं। यदि सर को गिनती की जाए तो इनकी संख्या 200 है और यदि पैरों को गिनती करें तो इनकी संख्या 580 है। चिड़ियाघर में कितने कबूतर हैं?

हल: इस प्रश्न को कई ढंग से हल किया जा सकता है। यदि मान ले कि इनकी संख्या क्रमशः x एवं y है तो आपको दो समीकरण मिलेगा, जिसे हल करके आप उत्तर तक पहुँच सकते हैं।

yourmahboob

यहाँ ऐसे प्रश्नों के लिए एक सूत्र दिया जा रहा है, जिससे दोपाया (two-legged) एवं चौपाया (four-legged) जीवों की गिनती एक साथ की जा सकती है।

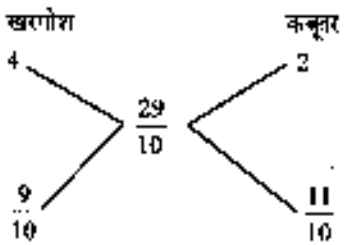
$$\text{चौपाया की संख्या} = \frac{\text{पैरों की संख्या} - 2 \times \text{सर की संख्या}}{2}$$

$$\text{दोपाया की संख्या} = \frac{4 \times \text{सर की संख्या} - \text{पैरों की संख्या}}{2}$$

$$\therefore \text{कबूतरों की संख्या (दोपाया)} = \frac{4 \times 200 - 580}{2} = 110$$

मिश्रण के नियम से: यहाँ मिश्रण का नियम 'प्रत्येक सर के लिए पैरों की संख्या' पर लागू होगा।

$$\text{प्रति सर पैरों की औसत संख्या} = \frac{580}{200} = \frac{29}{10}$$



खरगोश : कबूतर = 9 : 11

$$\therefore \text{कबूतरों की संख्या} = \frac{200}{9+11} \times 11 = 110$$

उदा. 28: किसी जार में 4 : 1 के अनुपात में दो द्रवों A और B का मिश्रण है। यदि मिश्रण में से 10 लिटर निकाल कर उसकी जगह 10 लिटर द्रव B डाल दिया जाए तो अनुपात बदलकर 2 : 3 हो जाता है। जार में द्रव A की कितना लिटर था ?

हल: इस प्रश्न का वर्णन 'अनुपात एवं समानुपात' अध्याय में किया जाना चाहिए था पर चूँकि इसे मिश्रण विधि से हल करना आसान है, इसलिए इसकी चर्चा यहाँ की जा रही है। पहले इस प्रश्न के संदर्भ में मिश्रण विधि का प्रयोग देखें।

पहली विधि:

$$\text{मूल मिश्रण में, द्रव B का प्रतिशत} = \frac{1}{4+1} \times 100 = 20\%$$

$$\text{परिणामी मिश्रण में, द्रव B का प्रतिशत} = \frac{3}{2+3} \times 100 = 60\%$$

$\because$ द्रव B का ही स्थानापन्न के रूप में इस्तेमाल किया जाता है, इसलिए दूसरे मिश्रण में B का प्रतिशत = 100%

yoursmahboob

मिश्रण विधि का उपयोग करने पर,

∴ पहले एवं दूसरे मिश्रण को 1 : 1 के अनुपात में मिलाया जाना चाहिए। इसका तात्पर्य है कि पहले मिश्रण की घटी हुई मात्रा एवं मिश्रण B की वह मात्रा जो मिलाई जानी चाहिए, दोनों समान हैं।

∴ कुल मिश्रण = 10 + 10 = 20 लिटर

एवं द्रव A = $\frac{20}{5} \times 4 = 16$ लिटर

दूसरी विधि :

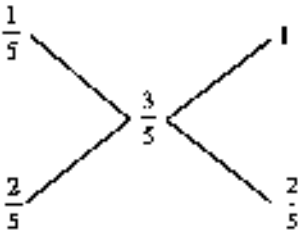
उपर्युक्त विधि की व्याख्या प्रतिशत के आधार की गई है। इस विधि में हम पिन का उपयोग देख सकेंगे।

मूल मिश्रण में B का हिस्सा = $\frac{1}{5}$

दूसरे मिश्रण (द्रव B) में B का हिस्सा = 1

परिणामी मिश्रण में B का हिस्सा = $\frac{3}{5}$

इसलिए,



इस प्रकार हम पाते हैं कि मूल मिश्रण एवं द्रव B समान अनुपात में मिलाए जाते हैं अर्थात् यदि जार में से 10 लिटर मिश्रण निकालने के बाद इसमें द्रव B का 10 लिटर डाल दिया जाए अर्थात् यदि द्रव B का 10 लिटर मिला दिया जाए तो मिश्रण में से 10 लिटर निकालने के बाद 10 लिटर मिश्रण बचा रह जाएगा।

∴ जार में मिश्रण की मात्रा = (10 + 10 =) 20 लिटर एवं

जार में A की मात्रा = $\left(\frac{20}{5} \times 4 =\right)$ 16 लिटर

yoursmahboob

तीसरी विधि:

यह विधि मिश्रण विधि से बिल्कुल अलग किस्म का है। मान लिया कि जार में मिश्रण की मात्रा = 5x लिटर। तब,

$$4x - 10\left(\frac{4}{4+1}\right) : x - 10\left(\frac{1}{4+1}\right) + 10 = 2 : 3 \quad \ldots\ldots (*)$$

या, $4x - 8 : x - 2 + 10 = 2 : 3$

या, $\frac{4x-8}{x+8} = \frac{2}{3}$

$\therefore x = 4$

मिश्रण में A की मात्रा = $4x = 4 \times 4 = 16$ लिटर

नोट: (*): मूल मिश्रण में द्रव A = 4x लिटर

10 लिटर मिश्रण के साथ निकाले गए द्रव A की मात्रा = $10 \times \frac{4}{4+1}$ लिटर

$\therefore$ मिश्रण में A की शेष मात्रा = $4x - 10\left[\frac{4}{5}\right]$

मूल मिश्रण में द्रव B की मात्रा = x

10 लिटर मिश्रण के साथ निकाले गए द्रव B की मात्रा = $10\left[\frac{1}{5}\right]$ लिटर

अलग से मिलाया गया द्रव B = 10 लिटर

द्रव B की कुल मात्रा = $x - 10\left[\frac{1}{5}\right] + 10$

और दोनों का अनुपात होना चाहिए 2 : 3

उदा. 29: 729 लिटर मिश्रण में दूध और पानी का अनुपात 7 : 2 है। इसमें कितना पानी मिलाया जाए कि नये मिश्रण में दूध और पानी का अनुपात 7 : 3 हो?

हल : उदा. 12 एवं उदा.-26 में भी इसी तरह के प्रश्नों पर चर्चा की गई थी। पिछले प्रश्नों में मिश्रण के घटकों का प्रतिशत मान दिया गया था, पर इस उदाहरण में घटकों का अनुपात दिया गया है। इस प्रकार के प्रश्नों को हल करने की कुछ विधियों पर चर्चा की जा रही है:

पहली विधि:

अनुपात को प्रतिशत में बदल लें तथा उदा.-12 में दिए गए सूत्र का प्रयोग करें। मूल मिश्रण में पानी का प्रतिशत = $\frac{2}{7+2} \times 100 = \frac{200}{9}\%$

परिणामी मिश्रण में पानी का प्रतिशत = $\frac{3}{10} \times 100 = 30\%$

yoursmahboob

$\therefore$ पानी की अभीष्ट मात्रा $= \dfrac{729\left[30-\dfrac{200}{9}\right]}{100-30} = \dfrac{729\times 70}{9\times 70} = 81$ लिटर

दूसरी विधि:

यह उपर्युक्त विधि की तुलना में थोड़ा आसान है; आपको पानी का प्रतिशत मान निकालने की कोई आवश्यकता नहीं है। आप मिश्रण में मौजूद जल के भिन्नात्मक मान का उपयोग कर सकते हैं। निम्नलिखित सूत्र का प्रयोग करें:

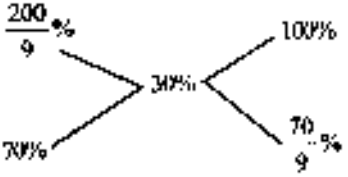
$$\text{पानी की अभीष्ट मात्रा} = \frac{\text{घोल (अभीष्ट भिन्नात्मक मान} - \text{प्रस्तुत भिन्नात्मक मान)}}{1 - \text{अभीष्ट भिन्नात्मक मान}}$$

$$= \frac{729\left(\dfrac{3}{3+7} - \dfrac{2}{2+7}\right)}{1-\dfrac{3}{3+7}}$$

$$= \frac{729\left(\dfrac{3}{10} - \dfrac{2}{9}\right)}{1-\dfrac{3}{10}} = \frac{729\left(\dfrac{7}{90}\right)}{\dfrac{7}{10}} = \frac{729}{9} = 81 \text{ लिटर}$$

तीसरी विधि:

मिश्रण विधि से इस प्रकार के प्रश्न को हल करने के लिए हम प्रतिशत मान या भिन्नात्मक मान में से किसी का भी इस्तेमाल कर सकते हैं:



$\therefore$ A और B को $1 : \dfrac{1}{9}$ या $9 : 1$ के अनुपात में लिया जाना चाहिए।

$\therefore$ पानी की अभीष्ट मात्रा $= \dfrac{729}{9}\times 1 = 81$ लिटर

नोट: भिन्नात्मक मान का इस्तेमाल करके मिश्रण विधि से इस प्रश्न को हल करने की कोशिश करें।

प्रमेय: समान आयतन वाले x ग्लासों में स्पिरिट और पानी का मिश्रण भरा है। प्रत्येक ग्लास में स्पिरिट और पानी का अनुपात $a_1 : b_1, a_2 : b_2, a_3 : b_3, \ldots, a_x : b_x$ है; इन सभी ग्लासों में भरे मिश्रण को एक पात्र में उलट लिया जाता है। पात्र में स्पिरिट और पानी का अनुपात निम्नलिखित होगा:

yoursmahboob

$$\left(\frac{a_1}{a_1+b_1}+\frac{a_2}{a_2+b_2}+\ldots\ldots+\frac{a_x}{a_x+b_x}\right):\left(\frac{b_1}{a_1+b_1}+\frac{b_2}{a_2+b_2}+\ldots\ldots+\frac{b_x}{a_x+b_x}\right)$$

उदा. 30: 10 लिटर क्षमता वाले तीन बर्तनों में दूध एवं पानी का मिश्रण भरा है। इन्हीं दूध एवं पानी का अनुपात क्रमशः 2 : 1, 3 : 1 और 3 : 2 है। यदि एक बड़े पात्र में इन तीनों बर्तनों का मिश्रण उड़ेल दिया जाए तो नए मिश्रण में दूध एवं पानी का अनुपात ज्ञात करें।

हल: उपर्युक्त प्रमेय के अनुसार, अभीष्ट अनुपात

$$=\left(\frac{2}{2+1}+\frac{3}{3+1}+\frac{3}{3+2}\right):\left(\frac{1}{2+1}+\frac{1}{3+1}+\frac{2}{3+2}\right)$$

$$=\left(\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{3}{5}\right):\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{2}{5}\right)=\frac{40+45+36}{3\times4\times5}:\frac{20+15+24}{3\times4\times5}$$

$= 121 : 59$

नोट: यह प्रश्न बिना इस प्रमेय के उपयोग के भी हल किया जा सकता है; गणना में सुविधा के लिए, आप बर्तनों की धारिता (2 + 1), (3 + 1) एवं (3 + 2) का लघुतम समापवर्त्य (60) मान लें। इस बात का कोई महत्त्व नहीं कि प्रत्येक बर्तन की धारिता 10 लिटर है या 60 लिटर या 1000 लिटर। मतलब की बात केवल इतनी है कि उनमें मानक मात्रा में मिश्रण भरा पड़ा है।

उदा. 31: यदि 2 किलोग्राम वस्तु को, जिसमें $\frac{1}{3}$ जस्ता है एवं शेष तांबा है, 3 किलोग्राम दूसरे धातु के साथ मिलाया जाता है, जिसका $\frac{1}{4}$ जस्ता है एवं शेष तांबा। परिणामी मिश्रण में जस्ता एवं तांबा का अनुपात क्या है ?

हल : मिश्रण में जस्ते की मात्रा

$$= 2\left(\frac{1}{3}\right)+3\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{2}{3}+\frac{3}{4}=\frac{8+9}{12}=\frac{17}{12}$$

परिणामी मिश्रण में तांबे की मात्रा $=3+2-\frac{17}{12}=5-\frac{17}{12}=\frac{43}{12}$

$\therefore$ अनुपात $=\frac{17}{12}:\frac{43}{12}=17:43$

उदा. 32: कोई व्यक्ति 600 रु. प्रति किलोलिटर वाले 5 किलोलिटर दूध को 540 रु. प्रति किलोलिटर वाले 6 किलोलिटर दूध के साथ मिलाता है। इस मिश्रण में कितने किलोलिटर पानी मिलाया जाए ताकि मिश्रण की औसत कीमत 480 रु. प्रति किलोलिटर हो?

हल: इस प्रश्न को मिश्रण विधि से हल करना आसान रहेगा

yoursmahboob

जब दो किस्म के दूध मिलाए जाते हैं तो दूध की कीमत $= \frac{5 \times 600 + 6 \times 540}{5+6}$

$= \frac{6240}{11}$ रु. प्रति किलोलिटर

पानी की कीमत = 0 रु. प्रति किलोलिटर

∴ पहला मिश्रण (दूध) दूसरा मिश्रण (पानी)

$\frac{6240}{11}$ — 480 — 0

480 — $\frac{960}{11}$

∴ दूध और पानी का अनुपात $= 480 : \frac{960}{11}$

$= 1 : \frac{2}{11} = 11 : 2$

इसका मतलब है कि 11 किलोलिटर दूध को 2 किलोलिटर पानी के साथ मिलाया जाना चाहिए।

∴ पानी की अभीष्ट मात्रा = 2 किलोलिटर

उदा. 33: यदि सामान को 450 रु. में खरीदकर उसके $\frac{1}{3}$ भाग को 10% हानि पर बेच दिए जाए तो शेष सामान को कितने प्रतिशत मुनाफा पर बेचा जाए ताकि कुल मिलाकर 20% का लाभ हो?

हल : पहला हिस्सा दूसरा हिस्सा

−10% — 20% — x%

$\frac{1}{3}$ — $\frac{2}{3}$

या, 1 : 2

यहाँ, 20 − (−10) = 20 + 10 = 30

∴ 30 की जगह 2 लिखा गया है इसलिए 1 की जगह 15 लिखा जाएगा।

∴ x = 20 + 15 = 35%

उदा. 34: यदि 840 रु. में कुछ सामान खरीदकर उसके $\frac{1}{4}$ 20% की हानि पर बेच दिया जाए तो शेष को कितने मुनाफे पर बेचा जाए, ताकि कुल मिलाकर 20% का लाभ हो?

yoursmahboob

हल: पहला हिस्सा — दूसरा हिस्सा

-20% — $x\%$

20%

$\frac{1}{4}$ — $\frac{3}{4}$

या, 1 : 3

यहाँ $20-(-20)=40$ की जगह तीन लिखा गया है, इसलिए 1 की जगह $\frac{40}{3}$ लिखा जाएगा।

$$\therefore x-20=\frac{40}{3}=\frac{100}{3}=33\frac{1}{3}\%$$

नोट: x का मान निकालने के लिए आप निम्नलिखित विधि का भी इस्तेमाल कर सकते हैं:

$$\frac{20-(-20)}{x-20}=\frac{3}{1} \quad \text{या,} \quad x-20=\frac{40}{3}$$

$$\therefore x=\frac{40}{3}+20=\frac{100}{3}=33\frac{1}{3}\%$$

दशांश 33. में,

$$\frac{20-(-10)}{x-20}=\frac{2}{1} \quad \text{या,} \quad 2x=40-30$$

$$\therefore x=\frac{70}{2}=35\%$$

उदा. 35: कोई व्यक्ति 1350 रु. में दो घोड़े खरीदता है तथा इनमें से एक को 6% हानि पर तथा दूसरे को 7.5% लाभ पर बेच देता है। कुल मिलाकर उसे न तो हानि होती है न ही लाभ। प्रत्येक घोड़े का मूल्य बताएँ।

हल: पहला घोड़ा — दूसरा घोड़ा

-6% — 7.5%

0

7.5 — 6

या 5 : 4

इस प्रकार, दोनों घोड़ों के लागत का अनुपात = 5 : 4

$$\therefore \text{पहले घोड़े की कीमत} = \frac{1350}{5+4}\times 5 = 750 \text{ रु.}$$

$$\text{तथा, दूसरे घोड़े की कीमत} = \frac{1350}{5-4}\times 4 = 600 \text{ रु.}$$

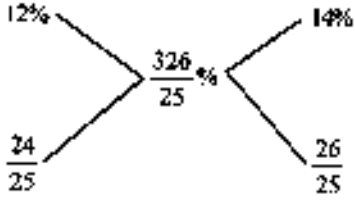
yoursmaiboob

उदा. 36: कोई व्यापारी दो साहूकारों से 2500 रु. उधार लेता है। पहले साहूकार को वह 12% प्रति वर्ष का ब्याज देता है तथा दूसरे को 14% प्रति वर्ष का। इस प्रकार उसे 1 वर्ष के अंत में 326 रु. ब्याज अदा करना पड़ता है। अलग-अलग ब्याज दरों पर उसने कितने रु. लिए?

हल: यह सवाल उदा.-25 की तरह ही है। पर हमलोग इसे अलग तरीके से हल करेंगे। पिछले उदाहरण में राशि का इस्तेमाल किया गया था, पर इस प्रश्न में ब्याज दर का इस्तेमाल किया जाएगा

व्यापारी ने कर्ज की कुल राशि पर 326 रु. ब्याज अदा किया।

$\therefore$ चुकाए गए ब्याज का औसत प्रतिशत $= \frac{326}{2500} \times 100 = \frac{326}{25}\%$



$\therefore$ राशि को निम्नलिखित अनुपात में विभाजित करना होगा;

$\frac{24}{25} : \frac{26}{25} = 12 : 13$

$\therefore$ 12% ब्याज पर उधार दी गई राशि $= \frac{2500}{12+13} \times 12 = 1200$ रु.

तथा 14% पर उधार दी गई राशि $= \frac{2500}{12+13} \times 13 = 1300$ रु.

उदा. 37: 24 रु. प्रति किलोग्राम वाले 25 किलोग्राम चाय में 42 रु. प्रति किलोग्राम कितना चाय मिलाया जाए ताकि मिश्रण को 40 रु. प्रति किलो के हिसाब से बेचने पर 25% का मुनाफा हो?

हल: इसे स्वयं हल करें। (संकेत के लिए उदा. 2 देखें।)

उदा. 38: 1050 रु. को 1400 पुरुषों एवं महिलाओं के बीच इस प्रकार विभाजित किया गया कि प्रत्येक पुरुष को 1 रु. एवं प्रत्येक महिला को 50 पैसे मिले। महिलाओं की संख्या निकालें।

(उत्तर: 700)

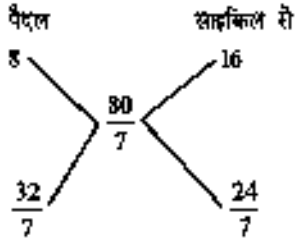
हल: इसे खुद हल करें। (संकेत के लिए उदा. 13 देखें।)

उदा. 39: कोई व्यक्ति 80 किलोमीटर की यात्रा 7 घंटे में पूरी करता है। इसमें से कुछ दूरी वह 8 किलोमीटर प्रति घंटे की रफ्तार से पैदल तय करता है तथा शेष दूरी 16 किलोमीटर प्रति घंटे की रफ्तार से साइकिल द्वारा तय करता है। उसने पैदल कितनी दूरी तय की?

हल: औसत चाल $= \frac{80}{7}$ किलोमीटर/घंटा

yoursmahboob

मिश्रण विधि से:



पैदल और साइकिल द्वारा यात्रा तय करने में लगा समय का अनुपात

$$= \frac{32}{7} : \frac{24}{7} = 4:3$$

पैदल चलने में लगा समय $= \frac{7}{4+3} \times 4 = 4$ घंटा

$\therefore$ पैदल तय की गई दूरी $= 8 \times 4 = 32$ किलोमीटर

उदा. 40: 7000 रु. का एक अंश 6% वार्षिक ब्याज पर लगाया गया तथा शेष 4% वार्षिक ब्याज पर दिया गया। 5 वर्षों बाद इन दोनों हिस्सों से कुल मिलाकर 1600 रु. साधारण ब्याज की प्राप्ति हुई। 6% प्रति वर्ष पर कितने रुपए उधार लगाए गए? (उत्तर: 2000 रु.)

हल: उदा. 25 एवं उदा. 36 में प्रयुक्त विधियों के आधार पर इसे स्वयं हल करें।

उदा. 41: दूध एवं पानी को पात्र A में 4 : 1 के अनुपात में मिलाया जाता है तथा पात्र B में 3 : 2 के अनुपात में है यदि A एवं B में से समान मात्रा निकालकर पात्र C में एक नया मिश्रण बनाया जाता है तो इस नये मिश्रण में दूध एवं पानी का अनुपात ज्ञात करें।

[उत्तर: 7 : 3]

हल : स्वयं हल करें। (संकेत के लिए उदा.-30 एवं इसमें प्रयुक्त प्रमेय देखें।)

उदा. 42: 12000 सदस्यों वाली एक फौज में यूरोपीय एवं भारतीय हैं। यूरोपीयों की औसत ऊँचाई 5 फुट 10 इंच है तथा भारतीयों की औसत ऊँचाई 5 फुट 9 इंच है। पूरे फौज की औसत ऊँचाई 5 फुट $9\frac{3}{4}$ इंच है। फौज में भारतीयों की संख्या ज्ञात करें।

हल : ***विस्तार विधि* (Detail Method) :**

माना कि भारतीयों की संख्या x है, तो

$$\frac{x(5 \text{ फुट } 9 \text{ इंच}) + (12000 - x)(5 \text{ फुट } 10 \text{ इंच})}{12000}$$

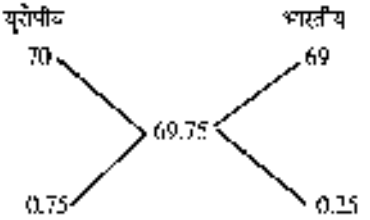
$$= 5 \text{ फुट } 9\frac{3}{4} \text{ इंच}$$

या, $x(96 \text{ इंच}) + (12000 - x)(70 \text{ इंच}) = 69.75 \text{ इंच} \times 12000$

या, $x - 12000(70 - 69.75) = 12000 \times 0.25 = 3000$

yoursmahboob

***मिश्रण विधि से* (By the Method of Alligation) :**



∴ अनुपात = 0.75 : 0.25 = 3 : 1

∴ भारतीयों की संख्या = $\frac{12000}{3-1} \times 1 = 3000$

उदा. 43: एक मिश्रधातु में, जस्ता एवं ताँबा का अनुपात 1 : 2 है। दूसरे मिश्रधातु में उन्हीं तत्त्वों का अनुपात 2 : 3 है। एक नए मिश्रधातु, जिसमें तत्त्वों का अनुपात 5 : 8 हो, बनाने के लिए दोनों मिश्रधातुओं को किस अनुपात में मिलाना होगा?

हल: ***विस्तार विधि* (Detail Method) :**

माना कि दोनों को $x : y$ के अनुपात में मिलाया जाता है।

तो, पहले मिश्रधातु में, जस्ता = $\frac{x}{3}$ एवं ताँबा = $\frac{2x}{3}$

दूसरे मिश्रधातु में, जस्ता = $\frac{2y}{5}$ एवं ताँबा = $\frac{3y}{5}$

अब, $\frac{x}{3} + \frac{2y}{5} : \frac{2x}{3} + \frac{3y}{5} = 5 : 8$

या, $\frac{5x+6y}{10x+9y} = \frac{5}{8}$

या, $40x + 48y = 50x + 45y$

या, $10x = 3y$

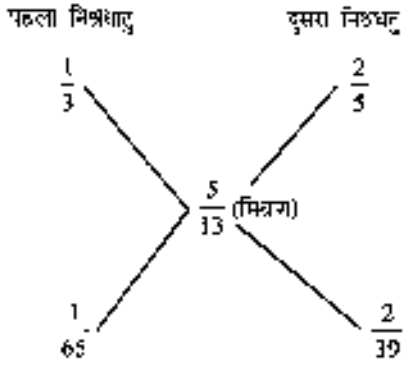
∴ $\frac{x}{y} = \frac{3}{10}$

इस प्रकार, अभीष्ट अनुपात = 3 : 10

***मिश्रण विधि* (Method of Alligation):**

तुम्हें इस बात की जानकारी अवश्य होनी चाहिए कि यह विधि या तो जस्ता के परिमाणात्मक मान पर या ताँबा के परिमाणात्मक मान पर लागू होती है। यहाँ पर हम जस्ता के परिमाणात्मक मान को लेते हैं।

yoursmahboob



इसलिए, उन्हें निम्नलिखित अनुपात में मिलाया जाता है।

$$\frac{1}{65} : \frac{2}{39} \text{ या } \frac{1}{65} \times \frac{39}{2} = \frac{3}{10} \text{ या } 3 : 10$$

नोट: तांबा के मिलावट को लेकर इस प्रश्न को हल करने की कोशिश करें

उदा. 44: चम्पा 7 रु. प्रति कि. ग्रा. की दर से 150 कि. ग्रा. गेहूँ खरीदती है। वह 50 कि. ग्रा. 10% लाभ पर बेचती है। बचे हुए गेहूँ को प्रति कि. ग्रा. किस दर से बेचना चाहिए ताकि उसे व्यापार में कुल 20% का लाभ हो ?

हल: 20% लाभ पर 150 कि. ग्रा. गेहूँ का विक्रय मूल्य

$$= 150 \times 7\left(\frac{120}{100}\right) = 1260 \text{ रु.}$$

10% लाभ पर 50 कि. ग्रा. गेहूँ का विक्रय मूल्य

$$= 50 \times 7\left(\frac{110}{100}\right) = 385 \text{ रु.}$$

∴ शेष 100 कि. ग्रा. गेहूँ का प्रति कि. ग्रा.

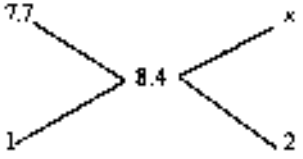
$$\text{विक्रय मूल्य} = \frac{1260 - 385}{100} = 8.75 \text{ रु.}$$

***मिश्रण विधि* (Method of Allegation) :**

10% लाभ पर प्रति कि. ग्रा. विक्रय मूल्य = 7. 70 रु.

20% लाभ पर प्रति कि. ग्रा. विक्रय मूल्य = 8. 40 रु.

अब, दोनों के बीच का अनुपात = 1 : 2



yoursmahboob

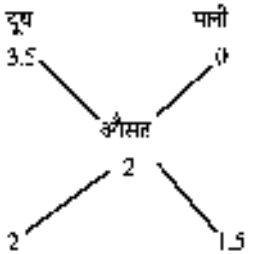
$$\Rightarrow \frac{8.4-7.7}{x-8.4}=\frac{2}{1} \qquad \therefore\ x-8.4=\frac{0.7}{2}=0.35$$

$\therefore\ x=8.75$

$\therefore$ शेष 100 कि. ग्रा. गेहूँ का प्रति कि. ग्रा. विक्रय मूल्य = 8.75 रु.

उदा. 45: एक पीपा में 3.5 रु. प्रति लिटर कीमत वाला 40 लिटर दूध है। उस पीपा में कितना पानी मिलाया जाए ताकि दूध की कीमत घटकर 2 रु. प्रति लिटर हो जाए?

हल: इस प्रश्न को कई विभिन्न तरीकों से हल किया जा सकता है। लेकिन मिश्रण विधि और सभी विधियों से सरल एवं आसान है। यहाँ हमलोग मिश्रण विधि को दूध, पानी एवं मिश्रण पर लागू करेंगे।



$\therefore$ दूध एवं पानी का अनुपात = 2 : 1.5 = 20 : 15 = 4 : 3

अभ्यास प्रश्न

1. सोना पानी की तुलना में 19 गुना भारी है तथा ताँबा 9 गुना। इन धातुओं को किस अनुपात में पिघलाया जाए ताकि मिश्रण पानी से 15 गुना भारी हो?
2. 10 रु. प्रति किलोग्राम वाले 15 किलोग्राम चाय में 4 रु. प्रति किलोग्राम वाला कितना कासनी (chicory) मिलाया जाए ताकि मिश्रण की कीमत 6.50 रु. प्रति किलोग्राम हो?
3. दूध और पानी के 40 लिटर मिश्रण में 10% पानी है। इसमें कितना पानी मिलाया जाए ताकि नए मिश्रण में 20% पानी हो?
4. 6.40 रु. में 80 सिक्कों का भुगतान है, जिसमें या तो 10 पैसे वाले सिक्के हैं या 5 पैसे वाले। 5 पैसे वाले सिक्कों की संख्या बताएँ।
5. किसी चिड़ियाघर में खरगोश और कबूतर हैं। यदि केवल सर की गिनती की जाए तो संख्या 200 है पर यदि पैरों को गिना जाए तो संख्या 580 है। कबूतरों की संख्या बताएँ।
6. किसी व्यक्ति के एक उधार देने के लिए 30000 रु. है। उसने अपनी कुछ पूँजी मोहन को 20% वार्षिक ब्याज दर पर उधार दे दी तथा शेष रकम सुरेश को 12% वार्षिक ब्याज दर पर उधार दी। वर्ष के अंत में उसे पूँजी का 17% ब्याज के रूप में प्राप्त होता है। उसने मोहन को कितना उधार दिया?
7. 80 लिटर का एक पीपा दूध और पानी के मिश्रण से भरा है। पीपा से 70% दूध एवं 30% पानी निकाल लेने पर पीपा 55% खाली हो जाता है। दूध और पानी की आरंभिक मात्रा बताएँ।
8. मोहन का व्यय और बचत 4 : 1 के अनुपात में है। उसकी आय 20% बढ़ जाती है। यदि उसके बचत में 12% की वृद्धि होती हो, तो उसका व्यय कितना प्रतिशत बढ़ जाना चाहिए।

youwanhoob

9. मुकेश प्रति माह 4000 रु. कमाता था। पिछले माह से उसके वेतन में 8% की वृद्धि हुई। मूल्य में वृद्धि से उसका खर्च भी 12% बढ़ गया तथा उसके बचत में 4% की कमी आई। उसका बढ़ा हुआ व्यय एवं आरंभिक बचत बताएँ।

10. किसी व्यक्ति के पास 60 कलमें हैं। वह इनमें से कुछ को 12% लाभ पर बेचता है एवं शेष को 8% हानि पर। कुल मिलाकर उसे 11% का मुनाफा होता है। कितनी कलमें 12% लाभ पर बेची गईं और कितनी 8% हानि पर?

11. एक आदमी के पास 40 कि. ग्रा. चाय है। उसका एक हिस्सा वह 5% की हानि पर एवं शेष को क्रय मूल्य पर बेच देता है। इस करोबार में उसे 3% की हानि होती है। क्रय मूल्य पर बेचे गए चाय की मात्रा ज्ञात करें।

12. 66 कि. ग्रा. मिलावटी (Adulterated) दूध में दूध एवं पानी का अनुपात 5 : 1 है। अनुपात को 5 : 3 करने के लिए पानी मिलाया जाता है. मिलाए गए पानी की मात्रा ज्ञात करें।

13. 7000 रु. में से कुछ राशि 6% वार्षिक ब्याज की दर पर उधार दिया जाता है तथा शेष को 4% वार्षिक ब्याज की दर पर। यदि दोनों हिस्सों से 5 वर्षों में कुल साधारण ब्याज 1600 रु. प्राप्त होता है तो 6% वार्षिक ब्याज की दर पर उधार दी गई राशि का मान ज्ञात करें।

14. एक 729 मि. लि. मिश्रण में दूध एवं पानी का अनुपात 7 : 2 है. एक नया मिश्रण, जिसमें दूध एवं पानी का अनुपात 7 : 3 हो, प्राप्त करने के लिए उसमें और कितना पानी मिलाना होगा?

15. एक बेईमान ग्वाला अपने दूध को क्रय मूल्य पर बेचने का दावा करता है परन्तु वह इसमें पानी मिलाता है और इससे वह 25% लाभ कमाता है। मिश्रण में पानी का प्रतिशत ज्ञात करें।

16. 41 रु. की एक राशि को कुल 50 लड़कों एवं लड़कियों में बाँटा जाता है। प्रत्येक लड़का 90 पैसे एवं प्रत्येक लड़की 65 पैसे प्राप्त करता है। लड़कों की संख्या ज्ञात करें।

17. एक कनस्तर में दो द्रव A एवं B 7 : 5 के अनुपात में मिश्रित हैं। जब कनस्तर में से 9 लिटर मिश्रण निकालकर उसकी जगह द्रव B डाल दिया जाता है तो द्रव A एवं B का अनुपात 7 : 9 हो जाता है। आरंभ में कनस्तर में द्रव A की कितना लिटर था?

18. 60 लिटर के एक मिश्रण में दूध एवं पानी का अनुपात 2 : 1 है। यदि मिश्रण में दूध एवं पानी के अनुपात को 1 : 2 करना हो तो और कितना पानी मिलाना होगा?

19. एक बर्तन में दूध एवं पानी का 56 लिटर मिश्रण है। मिश्रण में दूध एवं पानी का अनुपात 5 : 2 है। दूध एवं पानी के अनुपात को 4 : 5 करने के लिए मिश्रण में कितना लिटर पानी मिलाना होगा?

20. 39 रु. की एक राशि को कुल 45 लड़कों एवं लड़कियों के बीच वितरित करना है। प्रत्येक लड़की को 50 पैसे मिलता है जबकि प्रत्येक लड़का 1 रु. प्राप्त करता है। लड़कियों की संख्या ज्ञात करें।

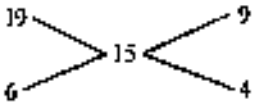
21. विशुद्ध दूध में मैंने कुछ पानी मिलाकर मिश्रण को दूध के क्रय मूल्य पर बेच दिया। यदि मुझे $16\frac{2}{3}\%$ का लाभ होता है तो मैंने किस अनुपात में दूध में पानी मिलाया है?

22. दूध एवं पानी को बर्तन A में 5 : 2 के अनुपात में मिलाया जाता है तथा बर्तन B में 8 : 5 के अनुपात में। दोनों बर्तनों में से मिश्रण को किस अनुपात में निकाला जाए ताकि एक नया मिश्रण तैयार हो जिसमें दूध एवं पानी का अनुपात 9 : 4 हो?

yoursmahboob

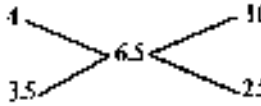
उत्तर

1. सोना तांबा



∴ सोना : तांबा = 6 : 4 = 3 : 2

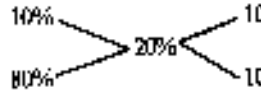
2. कासनी चाय



कासनी : चाय = 3.5 : 2.5 = 7 : 5

इसलिए, जब चाय 15 किलोग्राम है तो कासनी 21 किलोग्राम होना चाहिए।

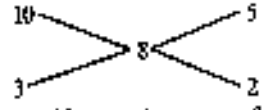
3. अशुद्ध दूध पानी



अशुद्ध दूध : पानी = 8 : 1

इसलिए यदि 40 लिटर अशुद्ध दूध है तो पानी की मात्रा = $\frac{40}{8} \times 1 = 5$ लिटर

4. प्रति सिक्का औसत मूल्य = $\frac{640}{80} = 8$ पैसे

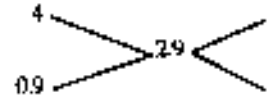


10 पैसे वाला सिक्का : 5 पैसे वाला सिक्का = 3 : 2

5 पैसे वाला सिक्का = $\frac{80}{5} \times 2 = 32$

5. प्रति सर पैरों का औसत = $\frac{580}{200} = 2.9$

खरगोश कबूतर



खरगोश : कबूतर = 0.9 : 1.1 = 9 : 11

∴ कबूतरों की संख्या = $\frac{200}{20} \times 11 = 110$

yoursmahboob

6. मोहन 20% 5% 17% 12% 3% सुरेश

∴ अनुपात = 5 : 3

∴ मोहन को दी गई राशि $= \frac{30000}{8} \times 5 = 18750$ रु.

7. दूध 70% 25% 55% 30% 15% पानी

∴ पीपा में दूध और पानी का अनुपात = 5 : 3

∴ दूध $= \frac{80}{8} \times 5 = 50$ लिटर

पानी $= \frac{80}{8} \times 3 = 30$ लिटर

8. व्यय x (व्यय में % वृद्धि) बचत 12 (बचत में % वृद्धि)

20 (आय में % वृद्धि)

4 1 (दिया गया है)

या, 8 2

$\therefore x = 22\%$

9. व्यय में % वृद्धि 12 बचत में % वृद्धि 4

8 (आय में % वृद्धि)

12 4

∴ व्यय : बचत = 12 : 4 = 3 : 1

∴ व्यय $= \frac{4000}{4} \times 3 = 3000$ रु.

एवं बचत = 4000 − 3000 = 1000 रु.

∴ बढ़ा हुआ व्यय $= 3000 \left[\frac{112}{100}\right] = 3360$ रु.

yoursmahboob

10. लाभ हानि

12% 8%

11%

19% 1%

∴ लाभ एवं हानि सहकर बेचे गए कलमों का अनुपात – 19 : 1

∴ 12% मुनाफे पर बेचे गए कलमों की संख्या – $\frac{60}{20} \times 19 = 57$

11. हानि सहकर लागत मूल्य पर

5% 0%

3%

3 2

∴ हानि सहकर एवं लागत मूल्य पर बेचे गए चाय का अनुपात – 3 : 2

∴ लागत मूल्य पर बेची गई मात्रा – $\frac{40}{5} \times 2 = 16$ किलोग्राम

नोट: प्रश्न 10 में हमने हानि को ऋण चिह्न से निर्देशित किया क्योंकि वहाँ कुल मिलाकर मुनाफा होता है और प्रत्येक को मुनाफा के संदर्भ में व्यक्त किया जाता है। [मुनाफा = (– हानि)] लेकिन प्रश्न 11 में कुल मिलाकर हानि होती है और प्रत्येक को हानि के संदर्भ में अभिव्यक्त किया जाता है, इसलिए हानि को भी धनात्मक रूप में अभिव्यक्त किया जाता है।

12. F_1 – मिलावटी (adulterated) दूध में दूध की मात्रा = $\frac{5}{6}$

F_2 – पानी में दूध की मात्रा = 0

F_3 – नए मिश्रण में दूध की मात्रा – $\frac{5}{8}$

F_1 F_2

$\frac{5}{6}$ 0

$\frac{5}{8}$

$\frac{5}{8}$ $\frac{5}{24}$

$\therefore F_1 : F_2 = \frac{5}{8} : \frac{5}{24} = 3 : 1$

∴ 66 किलोग्राम मिलावटी दूध में $\frac{66}{3} \times 1 = 22$ लिटर पानी है।

yoursmahboob

13. कुल मिलाकर ब्याज की दर $= \frac{1600 \times 100}{5 \times 7000} = \frac{32}{7}\%$

पहली राशि की दर — दूसरी राशि की दर

6% — 4%

$\frac{32}{7}\%$ (औसत दर)

$\frac{4}{7}\%$ — $\frac{10}{7}\%$

∴ दोनों राशियों का औसत $= 2 : 5$

∴ 6% ब्याज दर पर उधार दी गई राशि

$$= \frac{7000}{7} \times 2 = 2000 \text{ रु.}$$

14. ठीक प्रश्न-12 की तरह है।

15. यहाँ % मुनाफा पर मिश्रण विधि लागू किया जाएगा। यदि वह लागत मूल्य पर दूध बेचता है तो उसे 0% मुनाफा होता है, पर लागत मूल्य पर पानी बेचने से 100% मुनाफा होता है।

दूध — पानी

0% — 100%

25%

75% — 25%

∴ मिश्रण में दूध और पानी का अनुपात 3 : 1 होना चाहिए।

∴ मिश्रण में पानी का प्रतिशत $= \frac{1}{3+1} \times 100 = 25\%$

16. 'पैसे प्रति व्यक्ति' पर मिश्रण का नियम लागू करें।

प्रति विद्यार्थी पैसे $= \frac{4100}{50} = 82$

लड़के — लड़कियाँ

90 — 65

82

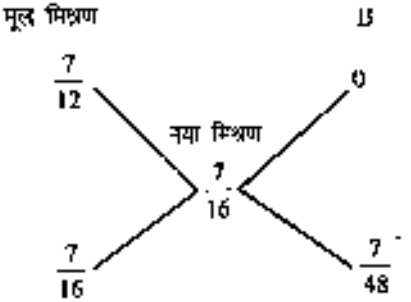
17 — 8

∴ लड़के : लड़कियाँ $= 17 : 8$

∴ लड़कों की संख्या $= \frac{50}{25} \times 17 = 34$

17. प्रत्येक मिश्रण में A की भिन्नात्मक मात्रा पर मिश्रण का नियम लगाएँ:

yoursmahboob

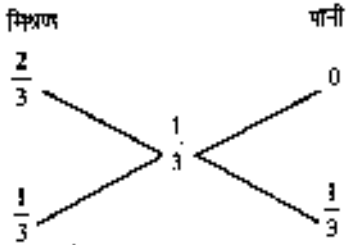


मूल मिश्रण एवं B का अनुपात = $\frac{7}{16} : \frac{7}{48} = 3 : 1$

जब 9 लिटर B मिलाया जाता है तो मूल मिश्रण $\left(\frac{9}{1} \times 3 =\right)$ 27 लिटर होना चाहिए।

∴ कनस्तर में आरंभिक परिमाण = (27 + 9 =) 36 लिटर

18. प्रत्येक मिश्रण में दूध के भिन्नात्मक मान पर मिश्रण विधि लागू करें।



∴ मिश्रण और जल का अनुपात = 1 : 1

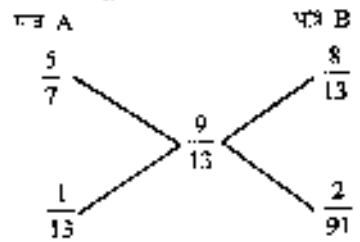
∴ यदि 60 लिटर घोल है, तो उसमें 60 लिटर पानी मिलाना होगा।

19. 'पैसे प्रति व्यक्ति' पर मिश्रण विधि का प्रयोग करें।

20. 'पैसे प्रति व्यक्ति' पर मिश्रण विधि का प्रयोग करें।

21. प्रश्न संख्या 15 की तरह।

22. प्रत्येक पात्र में दूध के भिन्नात्मक मान पर मिश्रण विधि का प्रयोग करें।



∴ पात्र A एवं पात्र B से लिए गए परिणाम का अनुपात = $\frac{1}{13} : \frac{2}{91} = 7 : 2$

yoursmahboob

समय और कार्य
(Time and Work)

कार्य पर आधारित समस्याओं को हल करने में निम्नलिखित तथ्य बड़े मददगार सिद्ध होते हैं:

(a) यदि कोई व्यक्ति 10 दिनों में कार्य पूरा कर सकता है तो 1 दिन में वह $\frac{1}{10}$ कार्य करेगा।

विलोमतः, यदि कोई व्यक्ति $\frac{1}{10}$ कार्य 1 दिन में पूरा कर सकता है तो पूरा कार्य 10 दिनों में संपन्न कर लेगा।

(b) यदि किसी कार्य को संपन्न करने में लगे व्यक्तियों की संख्या 5 : 4 के अनुपात में बदल दी जाएँ तो कार्य को पूरा करने में लगा समय 4 : 5 के अनुपात में बदल जाएगा।

(c) यदि A, B की तुलना में x गुना कर्मठ है तो A को वही कार्य करने में B की तुलना में $\frac{1}{x}$ समय लगेगा।

उपर्युक्त सभी बिन्दुओं का सारांश निम्नलिखित रूप में व्यक्त किया जा सकता है:

'यदि M_1 व्यक्ति W_1 कार्य को D_1 दिनों में सम्पन्न कर सकते हों तथा M_2 व्यक्ति W_2 कार्य को D_2 दिनों में सम्पन्न कर सकते हों तो इन दोनों के बीच संबंध को एक सामान्य सूत्र के माध्यम से व्यक्त किया जा सकता है: $M_1D_1W_2 = M_2D_2W_1$

इस संबंध को एक आधारभूत एवं 'ऑल इन-वन' सूत्र के रूप में स्वीकार किया जा सकता है। इसी प्रकार निम्नलिखित उक्तियाँ भी सही हैं:

(1) अधिक आदमी, कम दिन एवं विलोमतः कम आदमी, अधिक दिन।

(2) अधिक आदमी, अधिक काम एवं विलोमतः अधिक काम, अधिक आदमी।

(3) अधिक दिन, अधिक काम एवं विलोमतः अधिक काम, अधिक दिन।

यदि हम कार्य करने के घंटों को (यानि T_1 एवं T_2) को भी उपर्युक्त दोनों समूहों में शामिल कर लेते हैं तो संबंध निम्नलिखित होगा:

$$M_1D_1T_1W_2 = M_2D_2T_2W_1$$

पुनः, यदि दोनों समूहों में व्यक्तियों की कार्यक्षमता (यानि E_1 एवं E_2) भिन्न भिन्न हो तो संबंध निम्नलिखित होगा:

$$M_1D_1T_1E_1W_2 = M_2D_2T_2E_2W_1$$

अब, हमलोग सरल से शुरू करके जटिल एवं जटिलतर प्रश्नों को हल करने का प्रयास करेंगे।

उदा. 1: A कोई कार्य 5 दिनों में पूरा कर सकता है। उसी तरह के तीन कार्यों को पूरा करने में उसे कितना समय लगेगा ?

हल: आप स्मरण करें, इस उक्ति का: 'अधिक काम, अधिक दिन'।

yoursmahboob

इसका सीधा अर्थ है कि गुणा करने से उत्तर प्राप्त हो जाएगा।

$\therefore$ अभीष्ट समय $= 5 \times 3 = 15$ दिन

इस तरह से सवालों को हल करना बड़ा सरल है; पर यह जान लेना बेहतर रहेगा कि ऐसे सवालों के संदर्भ में मूल सूत्र $M_1D_1W_2 = M_2D_2W_1$ का इस्तेमाल किस प्रकार किया जाता है।

चूँकि दोनों स्थितियों में 'A' ही कार्य करता है;

$M_1 = M_2 = 1$ (इसे नजरंदाज किया जा सकता है।)

$D_1 = 5$ दिन, $W_1 = 1$, $D_2 = ?$ एवं $W_2 = 3$

इन मानों को सूत्र में रखने पर,

$5 \times 3 = D_2 \times 1$

$D_2 = 15$ दिन

उदा. 2: 16 व्यक्ति किसी कार्य को 10 दिनों में पूरा कर सकते हैं; उसी कार्य को 40 दिनों में संपन्न करने के लिए कितने व्यक्ति चाहिए होंगे ?

हल: 10 दिनों में कार्य पूरा करने के लिए 16 व्यक्ति चाहिए

$\therefore$ 40 दिनों में कार्य पूरा करने के लिए $\frac{16 \times 10}{40} = 4$ व्यक्ति चाहिए

पर यह तरीका वस्तुनिष्ठ प्रश्नों वाले परीक्षाओं में इस्तेमाल नहीं किया जा सकता। यहाँ हम यह देखते हैं कि मौलिक सूत्र : $M_1D_1W_2 = M_2D_2W_1$ किस तरह काम करता है?

$M_1 = 16, D_1 = 10, W_1 = 1$ एवं $M_2 = ?, D_2 = 40, W_2 = 1$

$\therefore$ सूत्र: $M_1D_1W_2 = M_2D_2W_1$ से

$16 \times 10 = M_2 \times 40$

या, $M_2 = \frac{16 \times 10}{40} = 4$ व्यक्ति

भिन्न के नियम से: कार्य को 40 दिनों में पूरा करने के लिए 10 से कम व्यक्ति चाहिए होंगे। इसलिए, 10 में किसी ऐसे भिन्न से गुणा करना होगा, जिसका मान 1 से कम हो।

और यह भिन्न है $\frac{10}{40}$। इसलिए व्यक्तियों की अभीष्ट संख्या $= \frac{16 \times 10}{40} = 4$

उदा. 3: 40 व्यक्ति 60 वृक्षों को 8 घंटे में काट सकते हैं। यदि 8 व्यक्ति कार्य छोड़ दें तो 12 घंटे में कितने वृक्ष काट लिए जाएँगे ?

हल: 40 व्यक्ति 8 घंटे कार्य करके 60 वृक्ष काटते हैं।

या, 1 व्यक्ति 1 घंटा कार्य करके $\frac{60}{40 \times 8}$ वृक्ष काटता है।

$\therefore$ 32 व्यक्ति 12 घंटे कार्य करके $\frac{60 \times 32 \times 12}{40 \times 8} = 72$ वृक्ष काट सकते हैं।

मौलिक सूत्र $M_1D_1W_2 = M_2D_2W_1$ से

yoursmahboob

$M_1 = 40, D_1 = 8$ (क्योंकि दिन और घंटे दोनों समय को सूचित करते हैं)
$W_1 = 60$ (वृक्षों की संख्या को कार्य माना जा सकता है)
$M_2 = 40 - 8 = 32$
$D_2 = 12$
$W_2 = ?$
इन मानों को सूत्र में रखने पर, $M_1D_1W_2 = M_2D_2W_1$
या, $40 \times 8 \times W_2 = 32 \times 12 \times 60$

या, $W_2 = \frac{32 \times 12 \times 60}{40 \times 8} = 72$ वृक्ष

भिन्न के नियम से:
पहले जहाँ 40 व्यक्ति थे, पर जब 8 व्यक्ति काम छोड़कर चले गए तो मात्र 32 व्यक्ति बचे। जैसे-जैसे व्यक्तियों की संख्या घटती जाती है, कटे गए वृक्षों की संख्या भी कम पड़ती जाएगी। इसलिए 60 में ऐसे भिन्न से गुणा करना होगा, जिसका मान 1 से कम हो और यह भिन्न है $\frac{32}{40}$। साथ ही, जैसे-जैसे घंटे की संख्या बढ़ती जाती है, काटे गए वृक्षों की संख्या भी बढ़नी चाहिए। इसलिए उपर्युक्त गुणनफल में ऐसे भिन्न से गुणा करना होगा, जिसका मान 1 से अधिक हो, और वह भिन्न है $\frac{12}{8}$।

इसलिए वृक्षों की अभीष्ट संख्या $= 60 \left[\frac{32}{40}\right]\left[\frac{12}{8}\right] = 72$ वृक्ष

नोट: अतिरिक्त चरणों को लिखे बिना इस सवाल को हल करने की कोशिश करें।

उदा. 4: 5 व्यक्ति 6 दिनों तक 6 घंटे प्रति दिन कार्य कर के 10 खिलौने तैयार कर सकते हैं तो कितने दिनों में 12 व्यक्ति 8 घंटे प्रति दिन कार्य करके 16 खिलौने तैयार कर सकेंगे ?

हल: इस उदाहरण में एक अतिरिक्त चर राशि 'समय (घंटा प्रति दिन)' है। इसलिए नैसर्गिक सूत्र $M_1D_1W_2 = M_2D_2W_1$ यहाँ लागू नहीं हो सकता। इसलिए यहाँ एक विस्तृत सूत्र दिया जा रहा है:
$M_1D_1T_1W_2 = M_2D_2T_2W_1$
यहाँ, $5 \times 6 \times 6 \times 16 = 12 \times D_2 \times 8 \times 10$

$\therefore D_2 = \frac{5 \times 6 \times 6 \times 16}{12 \times 8 \times 10} = 4$ दिन

नोट: उपर्युक्त उदाहरण में खिलौने की संख्या को कार्य के रूप में समझा जाता है।

भिन्न के नियम से: निम्नलिखित चरणों को देखें:

1. हमलोगों को दिनों की संख्या ज्ञात करनी है, इसलिए दिनों की प्रदत्त संख्या सबसे पहले लिखें।

yousmahboob

2. मनुष्यों की संख्या बढ़ रही है ⇒ कार्य करने में अपेक्षाकृत कम दिन लगेंगे ⇒ गुणक भिन्न 1 से कम होना चाहिए, और यह भिन्न है $\frac{5}{12}$.

3. खिलौने की संख्या बढ़ रही है ⇒ बनाने में अधिक दिन लगेंगे ⇒ गुणक भिन्न 1 से अधिक होना चाहिए और यह भिन्न है $\frac{16}{10}$.

4. कार्य करने के घंटे बढ़ रहे हैं ⇒ दिनों की संख्या कम हो जाएगी ⇒ गुणक भिन्न 1 से कम होना चाहिए और यह भिन्न है $\frac{6}{8}$.

∴ दिनों की अभीष्ट संख्या = $6\left[\frac{5}{12}\right]\left[\frac{16}{10}\right]\left[\frac{6}{8}\right]=3$ दिन

नोट: यदि आप भिन्न वाली इस विधि को अच्छी तरह समझ लें, तो आपका लेखन कार्य कम हो जाएगा और आप केवल $6\left[\frac{5}{12}\right]\left[\frac{16}{10}\right]\left[\frac{6}{8}\right]=3$ दिन लिखकर काम चला लेंगे।

प्रमेय: यदि A किसी कार्य को x दिनों में संपन्न कर सकता है और B उसी कार्य को y दिनों में पूरा कर सकता है तो A और B दोनों मिलकर उसी कार्य को $\frac{xy}{x+y}$ दिनों में पूरा कर सकते हैं।

प्रमाण: A, 1 दिन में $\frac{1}{x}$ कार्य कर सकता है।

B, 1 दिन में $\frac{1}{y}$ कार्य कर सकता है।

∴ A + B मिलकर 1 दिन में $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ कार्य कर सकते हैं।

∴ (A + B) पूरे कार्य को $\frac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$.

$$=\frac{1}{\frac{x+y}{xy}}=\frac{xy}{x+y}$$ दिनों में पूरा कर सकते हैं।

yourmahboob

उदा. 5: A कोई कार्य 5 दिनों में पूरा कर सकता है तथा B उसी कार्य को 6 दिनों में पूरा कर सकता है। यदि दोनों मिलकर कार्य करें तो उसी कार्य को कितने दिनों में पूरा कर सकेंगे?

हल: A, 1 दिन में $\frac{1}{5}$ कार्य कर सकता है।

B, 1 दिन में $\frac{1}{6}$ कार्य कर सकता है।

इसलिए A एवं B दोनों मिलकर 1 दिन में $\left[\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right]$ कार्य कर सकते हैं।

$\therefore$ A एवं B दोनों मिलकर पूरा कार्य $\frac{1}{\left[\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right]}$ दिनों में पूरा कर सकेंगे।

$$\frac{1}{\left[\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right]} = \frac{30}{11} = 2\frac{8}{11} \text{ दिन}$$

प्रमेय से, A और B इस कार्य को $\frac{5\times6}{5+6}$ दिनों $=\frac{30}{11}$ दिनों $=2\frac{8}{11}$ दिनों में पूरा कर सकेंगे।

प्रमेय: यदि A, B एवं C किसी कार्य को क्रमशः x, y एवं z दिनों में संपन्न करते हैं तो सब एक साथ मिलकर उसी कार्य को $\frac{xyz}{zy+yz+zx}$ दिनों में पूरा कर सकेंगे।

प्रमाण: स्वयं कोशिश करें।

उदा. 6: उपर्युक्त प्रश्न में C, जो 12 दिनों में कार्य संपन्न कर सकता है, भी शामिल हो जाए, तो कार्य को पूरा करने में कितना समय लगेगा?

हल: **प्रमेय से:**

A, B एवं C उस कार्य को

$$\frac{5\times6\times12}{5\times6+6\times12+5\times12} = \frac{360}{162} = 2\frac{2}{9}$$ दिनों में संपन्न कर सकते हैं।

नोट: उदा.-5 एवं उदा.-6 में आपने सूत्र की उपयोगिता को परख लिया होगा ? इस विधि से अन्य उदाहरणों को भी हल करने की कोशिश करें।

उदा. 7: मोहन किस काम को 10 दिनों में पूरा कर सकता है, रमेश उसी काम को 15 दिनों में पूरा कर सकता है। यदि दोनों मिलकर कार्य करें तो कितना समय लगेगा ?

हल: अभीष्ट समय $= \frac{10\times15}{10+15} = \frac{150}{25} = 6$ दिन

yoursmahboob

उदा. 8: उपर्युक्त प्रश्न में, सुरेश, जो उसी कार्य को 30 दिनों में पूरा कर सकता है, शामिल हो जाता है, तो कार्य कितने दिनों में पूरा होगा ?

हल: अभीष्ट समय $= \frac{10\times15\times30}{10\times15+10\times30+15\times30} = \frac{10\times15\times30}{900} = 5$ दिन

प्रमेय: यदि A और B मिलकर किसी काम को x दिनों में पूरा कर सकते हों तथा अकेले A उसी काम को y दिनों में पूरा कर सकता हो तो B अकेले उस काम को $\frac{xy}{y-x}$ दिनों में पूरा करेगा।

प्रमाण: स्वयं प्रयत्न करें।

उदा. 9: A और B मिलकर किसी काम को 6 दिनों में पूरा कर सकते हैं तथा A अकेले उसे 9 दिनों में पूरा कर सकता है तो B अकेले उसे कितने दिनों में संपन्न करेगा ?

हल: A और B 1 दिन में $\frac{1}{6}$ कार्य पूरा कर सकते हैं।

A अकेला 1 दिन में $\frac{1}{9}$ कार्य कर सकता है।

$\therefore$ B अकेला 1 दिन में $\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{9}\right)=\frac{1}{18}$ कार्य कर सकता है।

$\therefore$ अकेला B पूरे कार्य को $\frac{6\times9}{9-6}=\frac{54}{3}=18$ दिनों में संपन्न कर सकता है।

सूत्र से:

B अकेला उस काम को $\frac{6\times9}{9-6}=\frac{54}{3}=18$ दिन

उपर्युक्त सूत्र के विविध उपयोग

उदा. 10: A और B किसी कार्य को 12 दिनों में संपन्न कर सकते हैं, B और C उसी को 15 दिनों में तथा C और A मिलकर 20 दिनों में। यदि इनमें से प्रत्येक उस कार्य को अलग-अलग संपन्न करना चाहें तो उन्हें कितना समय लगेगा ?

हल: A + B, 12 दिनों में कार्य पूरा कर सकते हैं।
B + C, 15 दिनों में कार्य पूरा कर सकते हैं।
A + C, 20 दिनों में कार्य पूरा कर सकते हैं।

प्रमेय से: 2(A + B + C) इस कार्य को $\frac{12\times15\times20}{12\times15+12\times20+15\times20} = 5$ दिनों में पूरा कर सकते हैं।

$\therefore$ A + B + C इसे $5\times2=10$ दिनों में पूरा कर सकते हैं।

($\because$ कम आदमी, अधिक दिन)

yoursmahboob

अब, A इसी कार्य को $\frac{10\times15}{15-10}=30$ दिनों में पूरा कर सकता है

(उदा.-7 की तरह)

[क्योंकि A − (A + B + C) − (B + C)]

B इसी कार्य को $\frac{10\times20}{20-10}=20$ दिनों में पूरा कर सकता है।

[∵ B − (A + B + C) − (A + C)]

C इसी कार्य को $\frac{10\times12}{12-10}=60$ दिनों में पूरा कर सकता है।

[∵ C − (A − B + C) − (A + B)]

बारी-बारी से कार्य करना (Working alternately)

उदा. 11: दो महिलाएँ गंगा और सरस्वती अलग-अलग कार्य करके फसल क्रमशः 8 एवं 12 घंटों में काट सकती हैं। यदि वे बारी बारी से एक-एक घंटा कार्य करें तथा गंगा 9 बजे फसल काटना शुरू करे तो कटनी कब तक समाप्त हो जाएगी ?

हल: पहले घंटे में गंगा ने $\frac{1}{8}$ फसल को काटने की।

दूसरे घंटे में सरस्वती ने $\frac{1}{12}$ फसल की कटनी की।

इस प्रकार पहले दो घंटे में $\left[\frac{1}{8}+\frac{1}{12}\right]=\frac{5}{24}$ फसल काटी जा चुकी होगी।

∴ 8 घंटे में $\frac{5}{24}\times4=\frac{5}{6}$ फसल कट चुकी होगी। ..... (*)

अब, $\left(1-\frac{5}{6}\right)=\frac{1}{6}$ फसल काटना शेष है।

9वें घंटे में गंगा $\frac{1}{8}$ फसल काट लेती है।

∴ सरस्वती $\left[\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right]=\frac{1}{24}$ फसल $\frac{1}{24}\div\frac{1}{12}=\frac{1}{2}$ घंटे में काट लेगी।

∴ फसल काटने में लगा कुल समय $=\left[8+1+\frac{1}{2}\right]=9\frac{1}{2}$ घंटे

∴ काम $=9+9\frac{1}{2}=18\frac{1}{2}$ या $6\frac{1}{2}$ बजे अपराह्न में समाप्त हो जाएगा।

yousmahbob

नोट: (*): हमलोगों ने केवल 4 जोड़े घंटे के लिए ही कार्य की गणना की क्योंकि यदि 5 जोड़े घंटे के लिए कार्य की गणना की जाए तो किया गया कार्य 1 से अधिक होगा। इस प्रकार से प्राप्त नतीजा निरर्थक होगा।

उदा. 12: A और B किसी कार्य को 12 दिनों में संपन्न कर सकते हैं तथा B और C मिलकर 16 दिनों में। A के 5 दिनों तक कार्य करने तथा B को 7 दिनों तक कार्य करने के बाद इसमें C शामिल होता है तथा शेष कार्य को अकेले 13 दिनों में संपन्न कर लेता है। कितने दिनों में ये तीनों इस कार्य को अकेले अकेले संपन्न कर लेंगे?

हल: A और B 1 दिन में $\frac{1}{12}$ कार्य करते हैं।

B और C 1 दिन में $\frac{1}{16}$ कार्य करते हैं।

प्रश्नानुसार,

A के 5 दिनों का कार्य + B के 7 दिनों का कार्य + C के 13 दिनों का कार्य = 1

या, A के 5 दिनों का कार्य + B के 5 दिनों का कार्य + B के 2 दिनों का कार्य + C के 2 दिनों का कार्य + C के 11 दिनों का कार्य = 1

∴ (A + B) के 5 दिनों का कार्य + (B + C) के 2 दिनों के कार्य + C के 11 दिनों का कार्य = 1

$\therefore \frac{5}{12}+\frac{2}{16}+$ C के 11 दिनों का कार्य = 1

∴ C के 11 दिन का कार्य $= 1-\left[\frac{5}{12}+\frac{2}{16}\right]=\frac{11}{24}$

∴ C के 1 दिन का कार्य $=\frac{11}{24\times 11}=\frac{1}{24}$

B के 1 दिन का कार्य $=\frac{1}{16}-\frac{1}{24}=\frac{1}{48}$

A के 1 दिन का कार्य $=\frac{1}{12}-\frac{1}{48}=\frac{1}{16}$

∴ A, B और C अलग-अलग इस काम को क्रमशः 16, 48 एवं 24 दिनों में संपन्न कर सकते हैं।

उदा. 13: किसी कार्य को करने में B को A और C साथ मिलकर जितने दिनों में उस काम को करते हैं उसका तीन गुना समय लगता है तथा C को A और B के द्वारा लिए गए समय का दुगुना तीनों व्यक्ति साथ मिलकर इस कार्य को 10 दिनों में पूरा कर लेते हैं। प्रत्येक व्यक्ति अलग-अलग इस कार्य को कितनी अवधि में पूरा कर लेंगे?

yoursmahboob

हल: प्रश्नानुसार,

B के दैनिक कार्य का 3 गुना – (A + C) का दैनिक कार्य

B का दैनिक कार्य दोनों तरफ जोड़ दें।

B के दैनिक कार्य का 4 गुना – (A + B + C) का दैनिक कार्य – $\frac{1}{10}$

∴ B का दैनिक कार्य – $\frac{1}{40}$

इसी तरह,

C के दैनिक कार्य का 2 गुना – (A + B) का दैनिक कार्य

दोनों ओर C का दैनिक कार्य जोड़ने पर

C के दैनिक कार्य का 3 गुना – (A + B + C) का दैनिक कार्य – $\frac{1}{10}$

∴ C का दैनिक कार्य = $\frac{1}{30}$

अब, A का दैनिक कार्य = $\frac{1}{10} - \left[\frac{1}{40} + \frac{1}{30}\right] = \frac{1}{24}$

∴ A, B एवं C इस कार्य को क्रमशः 24, 40 एवं 30 दिनों में पूरा कर सकते हैं।

***द्रुत विधि* (Quicker Method):**

कार्य करने में B द्वारा लिया गया समय – (A + B + C द्वारा लिया गया समय) × (3 + 1)

– 10 (3 + 1) = 40 दिन

इसी तरह, C द्वारा लिया गया समय = 10 (2 + 1) – 30 दिन

तथा A द्वारा लिया गया समय = $\frac{1}{\frac{1}{10} - \left[\frac{1}{40} + \frac{1}{30}\right]} = 24$ दिन

उदा. 14: यदि 3 पुरुष या 4 महिलाएँ किसी खेत को 43 दिनों में काटती हैं तो 7 पुरुष एवं 5 महिलाएँ उसी खेत को कितने दिनों में काटेंगे?

हल: ***पहली विधि***

3 मनुष्य खेत का $\frac{1}{43}$ भाग 1 दिन में काटते हैं।

∴ 1 मनुष्य खेत का $\frac{1}{43 \times 3}$ भाग 1 दिन में काटेगा।

4 महिलाएँ खेत का $\frac{1}{43}$ भाग 1 दिन में काटती हैं।

yoursmahboob

∴ 1 महिला खेत को $\frac{1}{43\times4}$ भाग 1 दिन में काटेगी।

∴ 7 पुरुष एवं 5 महिलाएँ 1 दिन में $\left(\frac{7}{43\times3}+\frac{5}{43\times4}\right)=\frac{1}{12}$ खेत काटते हैं।

∴ 7 पुरुष एवं 5 महिलाएँ पूरा खेत 12 दिनों में काटेंगे

दूसरी विधि

3 पुरुष = 4 महिलाएँ

∴ 1 पुरुष = $\frac{4}{3}$ महिलाएँ

∴ 7 पुरुष = $\frac{28}{3}$ महिलाएँ

∴ 7 पुरुष + 5 महिलाएँ = $\frac{28}{3}+5=\frac{43}{3}$ महिलाएँ

अब प्रश्न कुछ इस प्रकार हो जाता है

यदि 4 महिलाएँ खेत को 43 दिनों में काटती हैं तो $\frac{43}{3}$ महिलाएँ इसे कितने दिनों में काटेंगी?

मौलिक सूत्र से,

$$4\times43=\frac{43}{3}\times D2$$

$$\therefore D_2=\frac{4\times43\times3}{13}=12 \text{ दिन}$$

द्रुत विधि (Quicker Method):

$$\text{दिन की अभीष्ट संख्या}=\frac{1}{\left[\frac{7}{43\times3}+\frac{5}{43\times4}\right]}=\frac{43\times3\times4}{7\times4+5\times3}=12 \text{ दिन}$$

नोट: उपर्युक्त सूत्र का स्मरण रखना बड़ा आसान है।

यदि प्रश्न को दो हिस्सों में विभाजित कर दें और पहले हिस्से को 'अथवा (OR) – हिस्सा' तथा दूसरे को 'और (AND) – हिस्सा' कहें तो,

$$\frac{7}{43\times3}=\frac{\text{'और (AND) – हिस्सा' में पुरुषों की संख्या}}{\text{दिनों की संख्या}\times\text{'अथवा (OR) – हिस्सा' में पुरुषों की संख्या}}$$

इसी तरह आप हर के दूसरे हिस्से का भी पता लगा सकते हैं।

yourmanhoob

उदा. 15: यदि 12 पुरुष एवं 16 बच्चे किसी कार्य को 5 दिनों में कर सकते हों तथा 13 पुरुष एवं 24 बच्चे उसे 4 दिनों में कर सकते हों तो 7 पुरुष एवं 10 बच्चों को वही कार्य करने में कितना वक्त लगेगा ?

हल: 12 पुरुष एवं 16 बच्चे कार्य को 5 दिनों में कर सकते हैं। .... (1)

13 पुरुष एवं 24 बच्चे उसी कार्य को 4 दिनों में संपन्न कर सकते हैं। .... (2)

अब यह समझना आसान है कि कार्य करनेवालों की संख्या को किसी संख्या से गुणा किया जाता है तो समय में उसी संख्या से भाग अवश्य दिया जाना चाहिए। ('अधिक कार्यकर्ता, कम समय' वाले नियम से)। इसलिए समीकरण (1) एवं (2) में क्रमशः 5 एवं 4 से गुणा करने पर,

5 (12 पुरुष + 16 बच्चे) उस काम को $\frac{5}{5}=1$ दिन में कर सकते हैं।

4 (13 पुरुष + 12 बच्चे) उस कार्य को $\frac{4}{4}=1$ दिन में कर सकते हैं।

यदि पुरुष = पु. एवं बच्चा = ब., तो

या, 5(12 पु. + 16 ब.) = 4(13 पु. + 24 ब.)

या, 60 पु. + 80 ब. = 52 पु. + 96 ब. .....(*)

या, 60 पु. − 52 पु. = 96 ब. − 80 ब.

या, 8 पु. = 16 ब.

∴ 1 पुरुष = 2 बच्चे

इस प्रकार,

12 पुरुष + 16 बच्चे = 24 बच्चे + 16 बच्चे = 40 बच्चे

तथा, 7 पुरुष + 10 बच्चे = 14 बच्चे + 10 बच्चे = 24 बच्चे

अब, दिए गए प्रश्न का स्वरूप कुछ इस प्रकार हो जाता है:

यदि 40 बच्चे किसी कार्य को 5 दिनों में कर सकते हों तो 24 बच्चे उसी कार्य को कितने दिनों में संपन्न करेंगे ?

'मौलिक सूत्र' से

$$40 \times 5 = 24 \times D_1 \text{ ..... (*) (*)}$$

या, $D_1 = \frac{40 \times 5}{24} = 8\frac{1}{3}$ दिन

नोट: अभ्यास के दौरान (*) को पहले चरण के रूप में लिखा जाना चाहिए। शेष गणना मन में ही संपन्न करें। एक बार आपको यह पता पर चल जाए कि 1 पुरुष = 2 बच्चे, तो आपका अगला कदम (*) (*) होना चाहिए। इस प्रकार आप पल भर में नतीजे तक पहुँच सकते हैं।

उदा. 16: कुछ खास व्यक्ति मिलकर किसी कार्य को 60 दिनों में संपन्न कर सकते हैं। यदि इसमें 8 और व्यक्ति शामिल होते तो कार्य पूरा होने में 10 दिन कम लगता। काम के लिए कितने आदमी रखे गए थे?

yoursmahboob

हल: मान लिया कि मूलतः x लोगों ने काम शुरू किया था।

$(x+8)$ व्यक्ति इसे $(60-10)=50$ दिनों में पूरा करते हैं।

अब 8 आदमी जितना काम 50 दिनों में करते हैं उतना ही काम x आदमी 10 दिन में करते हैं।

$\therefore$ 'मौलिक सूत्र' से,

$8\times 50=x\times 10$

$\therefore x=\dfrac{8\times 50}{10}=40$ व्यक्ति

दूसरी विधि (Another Approach): x आदमी कार्य को 60 दिनों में तथा $(x+8)$ आदमी कार्य को $(60-10=)$ 50 दिनों में करते हैं जो मौलिक सूत्र से,

$60x=50(x+8)$

$\therefore x=\dfrac{50\times 8}{10}=40$ आदमी

द्रुत विधि (Quicker Method): यहाँ प्रदत्त एवं अभीष्ट अंकड़ों के बीच एक विशेष संबंध पाया जाता है:

श्रमिकों की (वास्तविक) संख्या

$$=\frac{\text{श्रमिकों की अतिरिक्त संख्या}\times\text{दूसरे दल को कार्य करने में लगा समय}}{\text{जितने कम दिन लगे}}$$

$$=\frac{8\times(60-10)}{10}=\frac{8\times 50}{10}=40 \text{ पुरुष}$$

उदा. 17: A की कार्यक्षमता B की तीन गुनी है। इसलिए A को कार्य पूरा करने में B से 60 दिन कम लगते हैं। यदि दोनों साथ मिलकर काम करें तो कार्य कितने दिनों में समाप्त कर लेंगे?

हल: 'A की कार्यक्षमता B की तिगुनी है' से तात्पर्य यह है कि A यदि किसी कार्य को 1 दिन में पूरा करता है तो B उसी को 3 दिनों में पूरा करेगा।

इसलिए, यदि कार्य करने के दिनों में 2 दिनों का अंतर हो तो A उस कार्य को 1 दिन में करता है एवं B 3 दिनों में।

लेकिन यहाँ अंतर 60 दिनों का है।

इसलिए A उस कार्य को 30 दिनों में पूरा करेगा एवं B 90 दिनों में।

तब A एवं B दोनों मिलकर उस कार्य को $\dfrac{30\times 90}{30+90}=\dfrac{45}{2}=22.5$ दिनों में पूरा करेंगे।

उदा. 18: यदि मैं 8 घंटे प्रतिदिन कार्य करके किसी कार्य को 15 दिनों में पूरा कर सकता हूँ तथा यदि आप 9 घंटे प्रतिदिन कार्य करें तो इसे $6\frac{2}{3}$ दिनों में पूरा कर सकते हैं। यदि हम दोनों साथ-साथ 10 घंटे कार्य करें, तो काम कितने दिनों में समाप्त हो जाएगा ?

yourmahboob

हल: सर्वप्रथम मान लें, हम में से प्रत्येक व्यक्ति प्रतिदिन मात्र 1 घंटा कार्य करता है। तब मैं इस कार्य को $(15 \times 8 =)$ 120 दिनों में संपन्न कर सकता हूँ और आप इसे $\left(\frac{20}{3} \times 9 =\right)$ 60 दिनों में पूरा कर पाएँगे।

हम दोनों मिलकर इस कार्य को $\left(\frac{120 \times 60}{120 + 60}\right)$ 40 दिनों में पूरा कर लेंगे।

पर, यदि हम दोनों प्रतिदिन 10 घंटे काम करें तो काम मात्र 4 दिनों में समाप्त हो जाएगा।

उदा. 19: A किसी काम को 6 दिनों में पूरा करता है एवं B 8 दिनों में। C को यही कार्य पूरा करने में ठीक उतने ही दिन लगते हैं, जितने दिनों में A एवं B मिलकर इसे पूरा करते हैं। यदि B एवं C मिलकर कार्य करें तो यही कार्य कितने दिनों में पूरा हो जाएगा?

हल: (A + B) इस कार्य को $\left(\frac{6 \times 8}{6 + 8}\right) \frac{24}{7}$ दिनों में पूरा करेंगे।

C को यही कार्य करने में $\frac{24}{7}$ दिन लगते हैं।

$\therefore$ (B + C) यह काम $\frac{\frac{24}{7} \times 8}{\frac{24}{7} + 8} = \frac{24 \times 8}{24 + 56} = 2\frac{2}{5}$ दिनों में पूरा करेंगे।

उदा. 20: A की कार्यक्षमता B की दुगुनी है। दोनों मिलकर वे 14 दिनों में काम पूरा कर लेते हैं। दोनों अलग-अलग इस काम को कितने दिनों में पूरा कर लेंगे?

हल: मान लिया कि B इस कार्य को 2x दिनों में पूरा करता है। चूँकि A की कार्यक्षमता B की तुलना में दुगुनी है, इसलिए A उसी काम को x दिनों में पूरा कर लेगा।

(A + B) इसी काम को $\frac{2x^2}{3x} = 14$ दिनों में पूरा करते हैं।

या, $x = 21$

इस प्रकार A इस कार्य को 21 दिनों में कर सकता है और B इसे 42 दिनों में पूरा करेगा।

द्रुत विधि (Quicker Method):

यदि (2 : 1) गुण कार्यक्षमता वाला व्यक्ति किसी कार्य को 14 दिनों में पूरा करता है तो 1 गुना कार्यक्षमता वाला व्यक्ति उसे $14 \times 3 = 42$ दिनों में पूरा करेगा तथा दुगुना कार्यक्षमता वाला व्यक्ति उसे $\frac{42}{2} = 21$ दिनों में संपन्न कर सकेगा।

नोट: जो व्यक्ति जितना अधिक कार्यक्षमता वाला होता है, उसे उतना ही कम समय लगता है। दूसरे शब्दों में यह कहा जा सकता है कि कार्यक्षमता (E), कार्य को पूरा करने में लगे समय (D) के व्युत्क्रमानुपाती होता है। गणितीय रूप में,

yoursmahboob

$E \propto \frac{1}{D}$ या, $E = \frac{K}{D}$, जहाँ K एक अचर (constant) है।

या, ED = अचर (constant)

या, $E_1D_1 = E_2D_2 = E_3D_3 = \ldots\ldots = E_nD_n$

उपर्युक्त प्रश्न के संदर्भ में;

$E_1D_1 = E_2D_2 = E_3D_3$

या, $3 \times 14 = 2 \times 21 = 1 \times 42$

इस प्रकार उपर्युक्त कथन की सार्थकता सिद्ध हो जाती है।

उदा. 21: 5 पुरुष एवं 2 बच्चे मिलकर प्रति घंटा 1 पुरुष एवं 1 बच्चा साथ मिलकर प्रति घंटा जितना कार्य करता है उसका 4 गुना कार्य संपन्न कर सकते हैं। एक पुरुष एवं एक बच्चा के कार्य की तुलना करें।

हल: पहला दल, दूसरे दल की तुलना में 4 गुना ज्यादा कार्यक्षमता वाला (efficient) है। इसका मतलब क्या हुआ? इसका सीधा अर्थ यह है कि दूसरे दल को कार्य करने में पहले दल की अपेक्षा 4 गुना समय लगेगा।

(उदा.-20 के अंत में दिए गए नोट देखें)।

यदि पु. = पुरुष एवं ब. = बच्चा हो तो,

(5पु. + 2ब.) का 1 दिन का कार्य = (1पु. + 1ब.) का 4 दिनों का कार्य

या, (5पु. + 2ब.) का 1 दिन का कार्य = (4पु. + 4ब.) का 1 दिन का कार्य

या, 5पु. + 2ब. = 4पु. + 4ब.

या, पु. = 2ब.

$\therefore \frac{\text{पु.}}{\text{ब.}} = \frac{2}{1}$

इसका अर्थ है कि पुरुष बच्चे की तुलना में दुगुना ज्यादा कार्यक्षमता वाला है।

उदा. 22: 12 पुरुष या 15 महिलाएँ किसी फसल को 14 दिनों में काट सकते हैं। यदि 7 पुरुष एवं 5 महिलाएँ मिलकर खेत की कटाई करें, तो इसे कितने दिनों में काटेंगे ?

हल: यह उदा.-14 की तरह ही है। उदा.-14 में इस तरह के प्रश्न को हल करने की 3 विधियों की चर्चा की गई है। यदि आपको सूझ गया हो तो दिनों की अभीष्ट संख्या

$$= \frac{1}{\frac{7}{14 \times 12} + \frac{5}{14 \times 15}} = \frac{1}{\frac{1}{24} + \frac{1}{42}}$$

$$= \frac{24 \times 42}{24 + 42} = \frac{168}{11} = 15\frac{3}{11} \text{ दिन}$$

उदा. 23: 10 पुरुष किसी कार्य को 10 दिनों में संपन्न कर सकते हैं जबकि कार्य को इतने ही दिनों में पूरा करने के लिए 12 महिलाओं की आवश्यकता होती है। यदि 15 पुरुषों एवं 6 महिलाओं को कार्य में लगा दिया जाए तो इसे पूरा करने में कितने दिन लगेंगे ?

yoursmahboob

हल: 10 पुरुषों को कार्य पूरा करने में 10 दिन लगते हैं।

$\therefore$ 15 पुरुषों को कार्य पूरा करने में $10\left(\frac{10}{15}\right)=\frac{20}{3}$ दिन लगेंगे। (पिन के नियम से)

इसी प्रकार 6 महिलाएँ कार्य को $10\left(\frac{12}{6}\right)=20$ दिनों में पूरा करेंगी।

(पिन के नियम से)

$\therefore$ 15 पुरुष एवं 6 महिलाएँ इसी कार्य को $\frac{\frac{20}{3}\times 20}{\frac{20}{3}+20}=\frac{20\times 20}{80}=5$ दिनों में पूरा करेंगे।

द्रुत विधि (Quicker Method):

उपर्युक्त प्रश्न को निम्नलिखित रूप में भी लिखा जा सकता है: "यदि 10 पुरुष या 12 महिलाएँ किसी कार्य को 10 दिनों में पूरा करती हैं तो 15 पुरुष एवं 6 महिलाएँ उसे कितने दिनों में पूरा करेंगी"?

इस प्रकार यह प्रश्न उदा. 14 एवं उदा. 22 के जैसा ही है।

$$\therefore \text{ दिनों की अभीष्ट संख्या } = \frac{1}{\frac{15}{10\times 10}+\frac{6}{12\times 10}}$$

$$=\frac{1}{\frac{3}{20}+\frac{1}{20}}=\frac{20}{4}=5 \text{ दिन}$$

उदा. 24: A एवं B किसी कार्य को क्रमशः 45 एवं 40 दिनों में पूरा कर सकते हैं। उन्होंने एक साथ कार्य शुरू किया परंतु A ने कुछ समय बाद कार्य छोड़ दिया तथा B ने शेष कार्य 23 दिनों में संपन्न कर लिया। कितने दिनों तक कार्य करने के बाद A ने छोड़ दिया था?

हल: B अकेला 23 दिनों तक कार्य करता है।

$\therefore$ B द्वारा 23 दिनों में किया गया कार्य $=\frac{23}{40}$

$\therefore$ (A + B) एक साथ मिलकर $\left(1-\frac{23}{40}=\right)\frac{17}{40}$ कार्य करते हैं।

$\therefore$ (A + B) पूरा कार्य करते हैं $\frac{40\times 45}{40+45}=\frac{40\times 45}{85}$ दिनों में।

yoursmahboob

$\therefore$ (A + B) $\frac{17}{40}$ कार्य संपन्न करेंगे $\frac{40 \times 45}{85} \times \frac{17}{40} = 9$ दिनों में।

द्रुत विधि (Quicker Method):

यदि बीच के चरणों को नजरंदाज कर दिया जाए तो निम्नलिखित रूप में सूत्र लिखा जा सकता है:

$$\frac{40 \times 45}{40 + 45} \times \left[\frac{40 - 23}{40}\right] = 9 \text{ दिन}$$

उदा. 25: कुछ खास व्यक्ति मिलकर किसी कार्य को 160 दिनों में पूरा करते हैं। यदि 18 व्यक्ति और होते तो कार्य पूरा करने में 20 दिन कम लगता। आरंभ में वहाँ कितने व्यक्ति थे ?

हल: यह प्रश्न उदा.-16 के जैसा ही है। द्रुत विधि का उपयोग कीजिए।

आरंभ में मनुष्यों की संख्या = $\frac{18 \times (160 - 20)}{20} = 126$

उदा. 26: 4 पुरुष एवं 6 महिलाएँ किसी कार्य को 8 दिनों में पूरा करते हैं, जबकि 3 पुरुषों एवं 7 महिलाओं को वही कार्य पूरा करने में 10 दिन लगते हैं। 10 महिलाएँ इसी कार्य को कितने दिनों में पूरा कर लेंगी ?

हल: **पहली विधि:** यदि 1 दिन के कार्य पर विचार करें, तो

4 पु. + 6 म. = $\frac{1}{8}$ ..... (1)

3 पु. + 7 म. = $\frac{1}{10}$ ..... (2)

(1) × 3 (2) × 4 से,

18 म. + 28 म. = $\frac{3}{8} - \frac{4}{10}$

या, 10 म. = $\frac{1}{40}$

$\therefore$ 10 महिलाएँ कार्य को 40 दिनों में पूरा कर सकती हैं।

दूसरी विधि: उदा. 15 में इस्तेमाल किया गया सिद्धांत देखें। यहाँ

8(4 पु. + 6 म.) = 10(3 पु. + 7 म.)

या, 2 पु. = 22 म.

$\therefore$ 4 पु. = 44 म.

4 पुरुष + 6 महिलाएँ = 50 महिलाएँ कार्य को 8 दिनों में पूरा करती हैं।

$\therefore$ 10 महिलाएँ उसी कार्य को $\frac{8 \times 50}{10} = 40$ दिनों में पूरा करती हैं।

yourmahboob

उदा. 27: 1 पुरुष या 2 महिलाएँ या 3 बच्चे किसी कार्य को 44 दिनों में पूरा कर सकते हैं तो 1 पुरुष 1 महिला एवं 1 बच्चा एक साथ मिलकर उस कार्य को कितने दिनों में पूरा कर पाएँगे ?

हल: यह उदा.-14 का बढ़ाया हुआ (extended) रूप है।

इसलिए, सूत्रानुसार,

$$\text{दिनों की अपेक्षित संख्या} = \frac{1}{\frac{1}{44\times1}+\frac{1}{44\times2}+\frac{1}{44\times3}} = \frac{44\times1\times2\times3}{6+3+2} = 24 \text{ दिन}$$

नोट:

$$\frac{1}{44\times1} = \frac{\text{'और (AND)– हिस्सा' में पुरुषों की संख्या}}{\text{दिनों की संख्या} \times \text{'अथवा (OR) – हिस्सा' में पुरुषों की संख्या}}$$

$$\therefore \frac{1}{44\times2} = \frac{\text{'और (AND)– हिस्सा' में महिलाओं की संख्या}}{\text{दिनों की संख्या} \times \text{'अथवा (OR) – हिस्सा' में महिलाओं की संख्या}}$$

इसी तरह आप $\frac{1}{44\times3}$ को भी परिभाषित कर सकते हैं।

उदा. 28: 3 पुरुष एवं 4 बच्चे किसी कार्य को 8 दिनों में पूरा करते हैं तथा 4 पुरुष एवं 4 बच्चे उसी कार्य को 6 दिनों में पूरा करते हैं। 2 पुरुष एवं 2 बच्चे मिलकर उसी कार्य को कितने दिनों में पूरा कर लेंगे?

हल: यह प्रश्न उदा. 15 के जैसा ही है। खुद प्रयास कीजिए।

उदा. 29: A की कार्यक्षमता B की 3 गुनी है। साथ-मिलकर वे किसी कार्य को 15 दिनों में पूरा कर सकते हैं। B इस कार्य को कितने दिनों में समाप्त कर लेगा ?

हल: यह प्रश्न उदाहरण 20 के जैसा ही है।

तिगुना 1 1 गुना = 4 गुना कार्यक्षमता वाला व्यक्ति कार्य को 15 दिनों में पूरा कर लेता है

$\therefore$ 1 गुना कार्यक्षमता वाला B इसे $15 \times 4 = 60$ दिनों में समाप्त कर लेगा।

उदा. 30: व्यक्तियों का एक दल किसी कार्य को 10 दिनों में पूरा करने का निश्चय करता है, लेकिन इनमें से 5 अनुपस्थित हो जाते हैं। यदि शेष व्यक्ति इसी कार्य को 12 दिनों में पूरा कर पाते हैं तो व्यक्तियों की संख्या आरंभ में कितनी थी ?

हल: मान लिया कि आरंभ में x व्यक्ति थे, तो मौलिक सूत्र (basic formula) से,

$M_1D_1 = M_2D_2$

या, $10x = 12(x-5)$

$$\therefore x = \frac{12\times5}{2-10} = 30 \text{ आदमी}$$

उदा. 31: कोई भवन-निर्माता 40 दिनों में भवन निर्माण करने का निश्चय करता है। उसने आरंभ में इसके लिए 100 लोगों को नियुक्त किया तथा 35 दिनों बाद उसने 100 और लोगों को

yourmanboob

नियुक्त किया तथा निर्धारित समय में निर्माण कार्य पूरा कर लिया। यदि उसने अतिरिक्त व्यक्ति नियुक्त नहीं किए होते तो कार्य निर्धारित समय के कितने दिनों बाद पूरा होता?

हल: मान लिया कि केवल 100 आदमी काम को x दिनों में पूरा कर लेंगे।

100 व्यक्तियों द्वारा 35 दिनों में किया गया कार्य + 200 व्यक्तियों द्वारा (40 – 35 =) 5 दिनों में किया गया कार्य = 1

या, $\frac{35}{x}+\frac{200\times5}{100x}=1$

या, $\frac{45}{x}=1$

$\therefore x=45$ दिन

इसलिए यदि 100 व्यक्ति और नियुक्त नहीं किए गए होते तो काम निर्धारित समय के (45 – 40)=5 दिन बाद तक चलता।

द्रुत विधि: (Quicker Method):

200 व्यक्ति शेष कार्य को (40 – 35 =) 5 दिनों में पूरा करते हैं

$\therefore$ 100 व्यक्ति शेष कार्य को $\left(\frac{5\times200}{100}=\right)10$ दिनों में पूरा करेंगे।

$\therefore$ दिनों की अभीष्ट संख्या = (10 – 5 =) 5 दिन

उदा. 32: 30 व्यक्तियों का एक दल 38 दिनों में एक कार्य समाप्त करता है। 25 दिनों बाद 5 और व्यक्ति नियुक्त किए गए और कार्य समय से एक दिन पूर्व पूरा कर लिया गया। यदि 5 अतिरिक्त व्यक्तियों को नियुक्त नहीं किया गया होता तो कार्य पूरा होने में कितने दिनों की देरी होती?

हल: यह प्रश्न उदा.-31 के अनुरूप है। इसे हल करने के लिए हमारी द्रुत-विधि एक जैसी होगी:

35 व्यक्ति शेष कार्य को 12 दिनों में पूरा करते हैं।

[12 = 38 – 25 – 1]

$\therefore$ 30 व्यक्ति उसी कार्य को $\frac{12\times35}{30}=14$ दिनों में पूरा करेंगे।

$\therefore$ कार्य 25 + 14 = 39 दिनों समाप्त हो गया होता।

अर्थात् निर्धारित समय के 1 दिन बाद तक कार्य पूरा होगा।

उदा. 33: A किसी कार्य को 25 दिनों में कर सकता है और B उसी कार्य को 20 दिनों में कर सकता है। वे 5 दिनों तक साथ-साथ काम करते हैं। इसके बाद A कार्य छोड़कर चला जाता है। कितने दिनों में B कार्य समाप्त कर लेगा?

हल: (A + B) द्वारा 5 दिनों में किया गया कार्य $=5\left[\frac{1}{25}+\frac{1}{20}\right]=\frac{5\times45}{25\times20}=\frac{9}{20}$

शेष कार्य $=1-\frac{9}{20}=\frac{11}{20}$

yoursmahboob

$\therefore$ B शेष कार्य को $\left(20\times\frac{11}{20}=\right)11$ दिनों में पूरा करेगा

उदा. 34: A और B किसी कार्य को अलग-अलग क्रमशः 9 एवं 12 दिनों में पूरा कर सकते हैं। A कार्य शुरू करता है और वे दोनों बारी बारी से कार्य करते हैं। कितने दिनों में कार्य पूरा हो जाएगा?

हल: यह प्रश्न उदा. 11 जैसा ही है।

(A + B) का दो दिनों का कार्य = $\frac{1}{9}+\frac{1}{12}=\frac{7}{36}$

हमें पता है कि $5\times\frac{7}{36}=\frac{35}{36}$ (1 से थोड़ा ही कम है) अर्थात् (A + B) 5 जोड़े दिनों तक कार्य करते हैं अर्थात् 10 दिनों तक कार्य करते हैं।

शेष कार्य $\left[1-\frac{35}{36}\right]=\frac{1}{36}$ A द्वारा पूरा किया जाता है।

A $\frac{1}{36}$ कार्य $\left(9\times\frac{1}{36}=\right)\frac{1}{4}$ दिनों में पूरा कर सकता है

$\therefore$ दिनों की कुल संख्या = $10+\frac{1}{4}=10\frac{1}{4}$ दिन

उदा. 35: 8 बच्चे एवं 12 पुरुष किसी कार्य को 9 दिनों में पूरा कर सकते हैं। प्रत्येक बच्चा पुरुष की अपेक्षा दुगुना समय लेता है। कितने दिनों में 12 व्यक्ति उसी कार्य को पूरा कर लेंगे?

हल: 2 बच्चा = 1 पुरुष

$\therefore$ 8 बच्चे + 12 पुरुष = (4 + 12 =) 16 पुरुष

$\therefore$ 12 व्यक्ति उस कार्य को $9\left[\frac{16}{12}\right]$ = 12 दिनों में पूरा कर लेंगे। ..... (*)

नोट: (*) परिणाम तक पहुँचने के लिए या तो $M_1D_1=M_2D_2$ (मौलिक सूत्र) का इस्तेमाल कीजिए या 'भिन्न का नियम' (rule of fraction) का। हमारा सुझाव है कि आप भिन्न के नियम का ही इस्तेमाल करें; चूँकि अपेक्षाकृत कम व्यक्ति उसी कार्य को अधिक दिनों में पूरा करेंगे, इसलिए 9 में $\frac{16}{12}$ से गुणा किया जाना चाहिए। जाहिर है कि $\frac{16}{12}$ का मान 1 से बड़ा है।

उदा. 36: 30 व्यक्ति प्रति दिन 7 घंटे कार्य करके उस कार्य को 18 दिनों में पूरा कर सकते हैं। 21 व्यक्ति प्रति दिन 8 घंटे कार्य करके उसी काम को कितने दिनों में पूरा पाएँगे?

हल: सूत्र से, $M_2D_2T_1W_2=M_1D_2T_2W_1$

चूँकि दोनों ही स्थितियों में काम बराबर है:

yoursmahboob

$\therefore M_1D_1T_1 = M_2D_2T_2$ ..... (*)

$\therefore D_2 = \frac{M_1 D_1 T_1}{M_2 T_2} = \frac{30 \times 18 \times 17}{21 \times 8} = 22\frac{1}{2}$ दिन

नोट: (*) व्यक्ति-दिन घंटा किसी भी कार्य के लिए अचर (constant) होता है

उदा. 37: A, B एवं C किसी कार्य को क्रमशः 8, 16 एवं 24 दिनों में पूरा करते हैं। वे तीनों एक साथ कार्य शुरू करते हैं। A कार्य पूरा होने तक लगा रहता है, C कार्य समाप्त होने के 2 दिन पहले छोड़ देता है और B कार्य पूरा होने के 1 दिन पहले। कितने समय में कार्य पूरा हो जाता है ?

हल: मान लिया कि कार्य x दिनों में पूरा हो जाता है

$\therefore$ A का x दिनों का कार्य + B का $(x-1)$ दिनों का कार्य + C का $(x-2)$ दिनों का कार्य = 1

या, $\frac{x}{8} + \frac{x-1}{16} + \frac{x-2}{24} = 1$

या, $\frac{6x + 3x - 3 + 2x - 4}{48} = 1$

या, $11x = 55$ $\therefore x = 5$ दिन

उदा. 38: 400 व्यक्तियों के लिए 31 दिनों के भोजन की व्यवस्था है। 28 दिनों के बाद 280 व्यक्ति स्थान छोड़कर चले जाते हैं। कितने दिनों तक बचा हुआ भोजन शेष लोगों के काम आ सकेगा?

हल: बचा हुआ भोजन (31 − 28 =) 3 दिनों तक चलता, यदि कोई भी व्यक्ति स्थान छोड़कर नहीं जाता।

$\therefore$ बचा हुआ भोजन शेष 120 व्यक्तियों के लिए $3 \times \frac{400}{120}$ दिनों तक चलेगा।

$\therefore$ उत्तर $= 3 \times \left[\frac{400}{120}\right] = 10$ दिन

नोट: कम व्यक्तियों के लिए भोजन अधिक दिनों तक चलेगा। इसलिए 3 को $\frac{140}{120}$ (जिसका मान 1 से अधिक है) से गुणा किया जाता है।

उदा. 39: A किसी काम को पूरा करने में उतना ही समय लेता है जितना समय B और C एक साथ मिलकर उस काम को पूरा करने में लेता है। A और B साथ काम करके उसे 10 दिनों में समाप्त कर देता है। C अकेला इस काम को 15 दिनों में पूरा कर सकता है। B अकेला उस काम को कितने दिनों में पूरा कर सकता है?

हल: **द्रुत विधि (Quicker Method)**

(A − B) + (C) काम को $\left(\frac{15 \times 10}{15 + 10}\right) = 6$ दिनों में पूरा कर सकते हैं।

yoursmahboob

चूँकि A का दिन = (B + C) का दिन

∴ B + C पूरा काम कर सकता है $(6 \times 2 =)$ 12 दिनों में

∴ $B[B = \{B + C\} - C]$ कर सकता है $\left(\frac{15 \times 12}{15 - 12}\right) = 60$ दिनों में।

उदा. 40: A, B एवं C किसी काम को क्रमशः 16, $12\frac{4}{5}$ एवं 32 दिनों में पूरा करते हैं। वे एक साथ काम प्रारंभ करते हैं परंतु 4 दिनों के बाद A काम छोड़ देता है। B काम पूरा होने के 3 दिन पहले काम छोड़ देता है। कितने दिनों में काम पूरा होता है?

हल : माना कि काम x दिनों में पूरा होता है।

A का 4 दिनों का काम + B का $(x - 3)$ दिनों का काम + C का x दिनों काम = 1

या, $\frac{4}{16} + \frac{(x-3) \times 5}{64} + \frac{x}{32} = 1$

या, $\frac{16 + 5x - 15 + 2x}{64} = 1$

या, $7x + 1 = 64$ ∴ $x = 9$ दिन

उदा. 41: राजू एक काम को 16 दिनों में पूरा कर सकता है। रामू उसी काम को $12\frac{4}{5}$ दिनों में जबकि गीता 32 दिनों में पूरा कर सकती है। सभी एक साथ काम करना प्रारंभ करते हैं परन्तु राजू 4 दिनों बाद काम छोड़ देता है। रामू काम समाप्त होने के 3 दिन पहले काम छोड़ देता है। काम कितने दिनों में समाप्त हो जाएगा?

हल : माना कि काम x दिनों में समाप्त होता है

तो राजू का 4 दिनों का काम + रामू का $(x - 3)$ दिनों का काम + गीता का x दिनों का काम = 1

या, $\frac{4}{16} + \frac{x-3}{4} + \frac{x}{32} = 1$

या, $\frac{1}{4} + \frac{5(x-3)}{64} + \frac{x}{32} = 1$

या, $\frac{5(x-3) + 2x}{64} = \frac{3}{4}$

या, $7x - 15 = 48$

∴ $x = \frac{48 + 15}{7} = \frac{63}{7} = 9$ दिन

yourbanhoob

उदा. 42: A और B किसी काम को 56 रु. में करने का वादा करता है। A उसी काम को अकेला 7 दिनों में कर सकता है तथा B 8 दिनों में। यदि एक बच्चे की मदद से वे काम को 3 दिनों में समाप्त कर देते हैं तो बच्चे को क्या मिलेगा?

हल: A का 3 दिनों का काम + B का 3 दिनों का काम + बच्चे का 3 दिनों का काम = 1

या, $\frac{3}{7}+\frac{3}{8}+$ बच्चे का 3 दिनों का काम = 1

या, बच्चे का 3 दिनों का काम $= 1-\left(\frac{3}{7}+\frac{3}{8}\right)=\frac{11}{56}$

हिस्सों का अनुपात $= \frac{3}{7} : \frac{3}{8} : \frac{11}{56}$

$= \frac{3\times56}{7} : \frac{3\times56}{8} : \frac{11\times56}{56}$

$= 24 : 21 : 11$

$\therefore$ बच्चे का हिस्सा $= \frac{56}{24+21+11}\times11 = 11$ रु.

उदा. 43: A किसी काम को शुरू करता है एवं 2 दिन करने के बाद छोड़ देता है। उसके बाद B को बुलाया जाता है। और वह उस काम को 9 दिनों में समाप्त कर देता है। यदि A ने 3 दिन काम करके छोड़ा होता तो B शेष काम को 6 दिनों में ही समाप्त कर दिया होता। प्रत्येक अकेला कितने दिनों में काम समाप्त कर सकता है?

हल: ***विस्तार विधि* (Detail Method) :**

माना कि A एवं B क्रमशः x एवं y दिनों में काम को समाप्त कर सकते हैं। अब,

A का 2 दिन का काम + B का 9 दिन का काम = 1

या, $\frac{2}{x}+\frac{9}{y} = 1$

उसी तरह, $\frac{3}{x}+\frac{6}{y} = 1$

उपर्युक्त समीकरण को हल करने के लिए $\frac{1}{x}=a$ एवं $\frac{1}{y}=b$ रखते हैं।

इस प्रकार,

$2a+9b = 1$ ..... (1) एवं

$3a+6b = 1$ ..... (2)

(2) × 3 − (1) × 3 से,

$5a = 1 \therefore a = \frac{1}{5}$ or, $x = \frac{1}{a} = 5$ दिन

yoursmahboob

एवं $y = \frac{1}{b} = 15$ दिन

द्रुत विधि (Quicker Method) :

इस स्थिति में : A काम समाप्त करेगा $\frac{3\times 9 - 2\times 6}{9-6} = \frac{15}{3} = 5$ दिनों में

B के लिए, हमें उपर्युक्त परिणाम का प्रयोग करना चाहिए।

चूँकि B करता है $\left(1-\frac{2}{5}\right)\frac{3}{5}$ काम 9 दिनों में।

$\therefore$ B करता है 1 काम $\left(\frac{9\times 5}{3}\right) = 15$ दिनों में

उदा. 44: यदि 5 आदमी एवं 3 लड़के 23 एकड़ 4 दिनों में काट सकते हैं, तथा 3 आदमी एवं 2 लड़के 7 एकड़ दो दिनों में काट सकते हैं, तो 7 आदमियों को कितने लड़कों की मदद की आवश्यकता होगी ताकि वे 6 दिनों में 45 एकड़ काट सकें?

हल: सर्वप्रथम हमें आदमी एवं लड़का में संबंध ज्ञात करना चाहिए। दो प्रदत्त वक्तव्यों से दो समीकरण प्राप्त किया जा सकता है। पहले वक्तव्य से यह निष्कर्ष निकलता है कि

5 आदमी एवं 3 लड़के 1 दिन में $\frac{23}{4}$ एकड़ काट सकते हैं

हम इसे इस प्रकार लिखते हैं :

$$5 \text{ आ.} + 3 \text{ ल.} = \frac{23}{4} \qquad \ldots(1)$$

उसी प्रकार दूसरे वक्तव्य से,

$$3 \text{ आ.} + 2 \text{ ल.} = \frac{7}{2} \qquad \ldots(2)$$

अब, संबंध ज्ञात करने के लिए,

$$\frac{5 \text{ आ.} + 3 \text{ ल.}}{3 \text{ आ.} + 2 \text{ ल.}} = \frac{23}{4} \div \frac{7}{2} = \frac{23}{14}$$

या, 70 आ. + 42 आ. = 69 आ. + 46 ल.

$\therefore$ 1 आ. = 4 ल. (या, एक आदमी 4 लड़का के बराबर है)

$\therefore$ 5 आ. + 3 ल. = 5 × 4 + 3 = 23 लड़का (पहले वक्तव्य के लिए)

अब, सूत्र का प्रयोग करें : $M_1D_1W_2 = M_2D_2W_1$

$$\therefore \quad M_2 = \frac{M_1D_1W_2}{D_2W_1} = \frac{23\times 4\times 45}{6\times 23} = 30 \text{ लड़के}$$

$\therefore$ 30 − 7 × 4 = 2 लड़के की मदद की आवश्यकता होगी।

yourinfoob

उदा. 45: एक ठेकेदार 12 कि. मी. लंबा कैनाल 350 दिनों में खोदने के लिए 45 आदमियों को काम पर लगाता है। 200 दिनों बाद वह पाता है कि कैनाल का केवल 4.5 कि. मी. ही पूरा हो पाया है। काम को समय पर पूरा करने के लिए उसे और कितना आदमी लगाने होंगे?

हल : मिल के नियम (Rule of Fraction) को लागू करने के लिए हम उपर्युक्त प्रश्न को निम्नलिखित तरीके से लिख सकते हैं:

200 दिनों में 4.5 कि. मी. कैनाल 45 आदमी खोद सकते हैं तो कितने और आदमियों की आवश्यकता होगी (12 – 4.5=) 7.5 कि. मी. कैनाल (350 – 200=) 150 दिनों में खोदने के लिए?

***मिल के नियम से* (By Rule of Fraction) :**

$$45\left(\frac{200}{150}\right)\left(\frac{7.5}{4.5}\right) = 100 \text{ आदमी}$$

∴ अभीष्ट अतिरिक्त आदमियों की संख्या = 100 – 45 = 55 आदमी

***सूत्र विधि से* (By Direct Formula) :**

$$M_1D_1W_2 = M_2D_2W_1$$

या, $45 \times 100 \times 7.5 = M_2 \times 150 \times 4.5$

$$\therefore M_2 = \frac{45 \times 200 \times 7.5}{100 \times 4.5} = 100$$

∴ अभीष्ट अतिरिक्त आदमियों की संख्या

= 100 – 45 = 55 आदमी

उदा. 46: 8 आदमी एवं 16 महिलाएँ एक काम को 8 दिनों में करते हैं। 40 आदमी एवं 48 महिलाएँ उसी काम को 2 दिनों में करते हैं। 6 आदमी एवं 12 महिलाएँ मिलकर उस काम को कितने दिनों में करेंगे?

हल : ***विधि 1:*** काम करने वाले व्यक्तियों की संख्या, दिनों की संख्या के व्युत्क्रमानुपाती होता है। (अर्थात् अधिक आदमी, कम दिन या कम आदमी, अधिक दिन) इसलिए हम निम्नलिखित प्रकार से समीकरण को नहीं लिख सकते :

8 आ. + 16 म. = 8 या 40 आ. + 48 म. = 2

अब, हमें यह दो चीजों को हल करना है जो एक दूसरे का समानुपाती हो। स्पष्टतः, इस संदर्भ में दो चीजें, ***व्यक्तियों की संख्या*** एवं ***काम*** है। इसलिए, हम संबंधों को परिवर्तित करते हैं एवं प्रत्येक समूह के द्वारा 1 दिन में किया गया काम ज्ञात करते हैं। तो समीकरण निम्नलिखित है :

$$8 \text{ आ.} + 16 \text{ आ.} = \frac{1}{8} \qquad \text{.....(1)}$$

एवं $$40 \text{ आ.} + 48 \text{ म.} = \frac{1}{2} \qquad \text{.....(2)}$$

एवं हमें हल करना है : 6 आ. + 12 म. = ?

yoursmahboob

अब, (2) − 3 × (1) से,

$$16 \text{ आ.} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{8} \quad \therefore \quad 6 \text{ आ.} - \frac{6}{16 \times 8}$$

फिर, 5 × (1) − (2) से,

$$32 \text{ म.} = \frac{5}{8} - \frac{1}{2} = \frac{1}{8} \quad \therefore \quad 12 \text{ म.} - \frac{12}{32 \times 8}$$

अब, $6 \text{ आ.} \quad 12 \text{ म.} = \frac{6}{16 \times 8} + \frac{12}{32 \times 8} = \frac{3}{64} + \frac{3}{64}$

$$= \frac{6}{64} = \frac{3}{32}$$

इसलिए, 6 आदमी एवं 12 महिलाएँ काम को $\left(\frac{32}{3}\right) = 10\frac{2}{3}$ दिनों में करेंगे।

विधि II : हम एक आदमी एवं एक महिला के काम की तुलना करेंगे

प्रश्नानुसार,

8(8 आ. + 16 म.) = 2 (40 आ. + 48 म.)

या, 64 आ. + 128 म. = 80 आ. + 96 म.

या, 16 आ. = 32 म. ∴ 1 आ. = 2 म.

अब, 8 आ. + 16 म. = 16 म. + 16 म. = 32 म.

(पहली सूचना से)

6 आ. + 12 म. = 12 म. + 12 म. = 24 म.

(अभीष्ट सूचना से)

अब, सूत्र से,

$$M_1D_1 = M_2D_2$$

तो, $32 \times 8 = 24 \times D_2$

$$\therefore \quad D_2 = \frac{32 \times 8}{24} = \frac{32}{3} = 10\frac{2}{3} \text{ दिन}$$

नोट : इस विधि से आप काफी तेजी से प्रश्नों को हल कर सकते हैं। इसलिए हमारा यह सुझाव है कि आप इस विधि का अनुसरण करें। एक और विधि विशेष स्थितियों के लिए (जो यहाँ लागू होता है) नीचे अंकित किया गया है।

विधि III:

(काफी तेज लेकिन केवल विशेष स्थितियों के लिए): सर्वप्रथम आपको यह जानना आवश्यक है कि यह विधि किस तरह के प्रश्नों पर लागू होता है। पुरुषों एवं महिलाओं की संख्या प्रश्न भाग में देखें। दोनों संख्याओं का अनुपात निकालें जैसा कि नीचे दिया गया है।

आदमी : महिला = 6 : 12 = 1 : 2

yoursmartbook

अब उसी अनुपात के लिए प्रश्न-भाग को देखें।

यहाँ पर, पहले प्रश्न-भाग का समान अनुपात है अर्थात् 8 : 16 = 1 : 2। अब हम इसी विधि का प्रयोग कर सकते हैं। यदि इस प्रकार का अनुपात प्रश्न भाग में नहीं हो तो हम इस विधि का प्रयोग नहीं कर सकते हैं,

8 आ. + 16 म. 8 दिनों में कार्य करते हैं

या, 8(आ. + 2 म.) 8 दिनों में कार्य करते हैं।

या, (आ. + 2 म.) 8 × 8 दिनों में कार्य करते हैं।

$\therefore$ 6(आ. + 2 म.) $\frac{64}{6}=\frac{32}{3}$ दिनों में कार्य करते हैं।

$\therefore$ 6 आ. + 12 म. $10\frac{2}{3}$ दिनों में कार्य करते हैं।

उदा. 47: 38 आदमी 6 घंटे प्रति दिन काम करके 12 दिनों में काम समाप्त करते हैं। 57 आदमी 8 घंटे प्रति दिन काम करके उस काम को कितने दिनों में पूरा करेंगे? यदि पहले समूह के 2 आदमी 1 घंटे में उतना ही काम करते हैं, जितना दूसरे समूह के 3 आदमी $1\frac{1}{2}$ घंटे में करते हैं।

हल : *विस्तार विधि* (Detailed Solution):

2 × पहला समूह का 1 आदमी = 3 × दूसरा समूह का 1.5 आदमी

या, पहला समूह के 2 आदमी = दूसरा समूह का 4.5 आदमी

$\therefore$ पहला समूह के 38 आदमी = $\frac{4.5}{2}\times 38$ = 19 × 4.5

चूँकि (19 × 4.5) आदमी एक काम 6 घंटे प्रति दिन करके 12 दिनों में करते हैं।

$\therefore$ 1 आदमी एक काम 1 घंटा दिन करके (12 × 19 × 4.5 × 6) दिनों में करता है।

$\therefore$ 57 आदमी 2 काम 8 घंटे प्रति दिन करके $\frac{12\times 19\times 4.5\times 6}{57\times 8}\times 2$ = 27 दिन

द्रुत विधि (Quicker Method) :

पहले समूह एवं दूसरे समूह के व्यक्तियों की कार्यक्षमता का अनुपात

$= E_1 : E_2 = (3\times 1.5) : 2\times 1 = 4.5 : 2$ ..... (*)

अब आप सूत्र का प्रयोग करें

$M_1D_1T_1E_1W_2 = M_2D_2T_2E_2W_1$ ..... (**)

$\therefore D_2 = \frac{38\times 12\times 6\times 4.5\times 2}{57\times 8\times 2\times 1} = 27$ दिन

नोट : (*) पहले समूह से कम आदमी उतना ही काम कम दिनों में करते हैं, इसलिए वे ज्यादा कार्य कुशल (efficient) हैं।

(*)(*) M व्यक्तियों की संख्या को निरूपित करता है।

yoursmahboob

D दिनों की संख्या को निरूपित करता है।
T कार्य करने के घंटों को निरूपित करता है।
E कार्यक्षमता को निरूपित करता है।
W कार्य को निरूपित करता है।
एवं प्रत्यय (Suffix) 1 एवं 2 उनके समूहों को निरूपित करता है।

अभ्यास प्रश्न

1. मोहन किसी कार्य को 20 दिनों में पूरा करता है और सोहन उसी कार्य को 30 दिनों में पूरा करता है। यदि दोनों मिलकर काम करें तो कार्य कितने दिनों में पूरा हो जाएगा ?
2. रजा, रिंकू एवं राम किसी कार्य को क्रमशः 6, 12 एवं 24 दिनों में पूरा करते हैं वे तीनों मिलकर इसे कितने दिनों में पूरा करेंगे ?
3. A और B मिलकर किसी कार्य को 6 दिनों में पूरा कर सकते हैं। B अकेला उसे 8 दिनों में पूरा कर सकता है तो A अकेला उसे कितने दिनों में पूरा कर सकता है ?
4. A एवं B मिलकर किसी कार्य को 30 दिनों में कर सकते हैं, B और C 40 दिनों में तथा C और A, 60 दिनों में पूरा कर सकते हैं। यदि तीनों मिलकर कार्य करें तो कितने दिनों में पूरा कर लेंगे?
5. A 25 घंटे में 75 पृष्ठ नकल कर सकता है, A और B मिलकर 27 घंटे में 135 पृष्ठ नकल कर सकते हैं। B को 42 पृष्ठ नकल करने में कितना वक्त लगेगा ?
6. A, B और C क्रमशः 10, 12 एवं 15 दिनों में कार्य पूरा कर सकते हैं। यदि B दो दिनों बाद काम करना बंद कर दे तो A और C को शेष कार्य पूरा करने में कितना वक्त लगेगा ?
7. B किसी काम को 6 घंटे में पूरा कर सकता है, B और C उसी कार्य को 4 घंटे में पूरा कर सकते हैं तथा A, B एवं C को वही कार्य करने में $2\frac{2}{3}$ घंटे लगते हैं। A और B मिलकर इसे कितने घंटे में पूरा कर लेंगे?
8. 8 घंटे प्रति दिन काम करके मैं 15 दिनों में किसी काम को पूरा कर सकता हूँ। यदि आप प्रति दिन 9 घंटे काम करें, तो यह $6\frac{2}{3}$ दिनों में समाप्त हो सकता है। यदि हम दोनों साथ मिलकर प्रति दिन 10 घंटे कार्य करें तो यह कितने दिनों में समाप्त हो जाएगा?
9. A किसी कार्य को 7 दिनों में समाप्त कर देता है। यदि दिए हुए समय में A की कार्यक्षमता B की दुगुनी हो और दोनों मिलकर कार्य करें तो कार्य कितने दिनों में समाप्त हो जाएगा ?
10. किसी कार्य को संपन्न करने में A को 6 दिन लगता है और B को 12 दिन। C को उतना ही समय लगता है, जितने में A और B साथ मिलकर कार्य पूरा करते हैं। यदि B और C साथ मिलकर कार्य करें तो वह कितने दिनों में पूरा हो जाएगा ?
11. A की कार्यक्षमता B की अपेक्षा दुगुनी है तथा दोनों मिलकर किसी कार्य को 16 दिनों में पूरा कर लेते हैं। यदि वे दोनों अलग-अलग काम करें तो काम कितने दिनों में समाप्त हो जाएगा?
12. यदि 3 पुरुष या 5 महिलाएँ किसी खेत को 43 दिनों में काट सकते हैं तो 5 पुरुष एवं 6 महिलाएँ इसे कितने दिनों में काटेंगे?

yourmanbooks

13. 5 पुरुष एवं 2 बच्चे यदि साथ कार्य करें तो 1 पुरुष एवं 1 बच्चा के द्वारा किया गया प्रति घंटा कार्य की तुलना में चार गुना कार्य कर सकते हैं। पुरुष एवं बच्चे के कार्य को परस्पर तुलना करें।

14. 1 पुरुष, 3 महिलाएँ एवं 4 बच्चे किसी कार्य को 96 घंटे में पूरा कर सकते हैं, 2 पुरुष एवं 8 बच्चे इसे 80 घंटे में पूरा कर सकते हैं तथा 2 पुरुष एवं 3 महिलाएँ इसे 120 घंटे में पूरा कर सकते हैं। यदि 5 पुरुष एवं 12 बच्चे मिलकर कार्य करें तो यह कितने देर में समाप्त हो जाएगा ?

15. A और B किसी कार्य को अलग अलग क्रमशः 9 एवं 12 दिनों में पूरा कर सकते हैं। यदि वे बारी-बारी से कार्य करें तथा कार्य की शुरुआत A करे, तो कार्य कितने दिनों में समाप्त हो जाएगा?

16. कोई रकम A के 21 दिनों की मजदूरी एवं B की 28 दिनों की मजदूरी के लिए पर्याप्त है। यदि इस रकम में से दोनों की मजदूरी का भुगतान किया जाए तो कितने दिनों की मजदूरी अदा की जा सकेगी ?

17. तीन-चौथाई समय में A, B की तुलना में आधा ही कार्य पूरा कर पाता है। यदि दोनों मिलकर कार्य 18 दिनों में पूरा कर लेते हैं, तो B को इसे पूरा करने में कितना वक्त लगेगा?

18. 10 पुरुष किसी कार्य को 10 दिनों में पूरा करते हैं, जबकि इसी कार्य को 10 दिनों में पूरा करने के लिए 12 महिलाओं की आवश्यकता होती है। यदि 15 पुरुष एवं 6 महिलाएँ मिलकर कार्य करें तो इसे पूरा करने में कितना वक्त लगेगा?

19. A और B अलग-अलग किसी कार्य को क्रमशः 30 एवं 40 दिनों में पूरा कर सकते हैं। उन्होंने एक साथ कार्य शुरू किया पर A ने कुछ दिनों बाद काम छोड़ दिया तथा B ने शेष कार्य को 12 दिनों में पूरा किया। कितने दिनों तक कार्य करने के बाद A ने कार्य करना छोड़ दिया था?

20. कुछ व्यक्ति मिलकर किसी कार्य को 60 दिनों में पूरा करते हैं। यदि 8 व्यक्ति और शामिल हो जाएँ तो कार्य पूरा करने में 10 दिन कम लगेंगे। आरंभ में कितने व्यक्तियों ने मिलकर कार्य करना शुरू किया था ?

21. 8 बच्चे एवं 12 पुरुष मिलकर किसी कार्य को 9 दिनों में पूरा कर लेते हैं। यदि प्रत्येक बच्चा एक पुरुष की तुलना में कार्य पूरा करने में दुगुना समय लेता है तो उसी कार्य को 12 पुरुष मिलकर कितने दिनों में पूरा करेंगे?

22. 2 पुरुष एवं 3 महिलाएँ मिलकर किसी कार्य को 10 दिनों में पूरा करते हैं, जबकि 4 पुरुष इसे 10 दिनों में पूरा कर लेते हैं। कितने दिनों में 3 पुरुष एवं 3 महिलाएँ इसे पूरा कर लेंगे?

23. 3 पुरुष एवं 4 बच्चे किसी कार्य को 8 दिनों में पूरा करते हैं, जबकि 4 पुरुष एवं 4 बच्चे मिलकर इसे 6 दिनों में पूरा कर सकते हैं। कितने दिनों में 2 पुरुष एवं 4 बच्चे इसे पूरा कर लेंगे?

24. यदि 1 पुरुष या 2 महिलाएँ या 3 बच्चे किसी काम को 44 दिनों में पूरा कर लेते हैं तो उसी काम को 1 पुरुष, 1 महिला एवं 1 बच्चा मिलकर कितने दिनों में पूरा करेंगे ?

उत्तर

1. $\frac{20 \times 30}{20+30} = 12$ दिन

yoursmahboob

2. $\frac{6\times12\times24}{6\times12+12\times24+6\times24} = \frac{6\times12\times24}{72+288+144}$

$= \frac{6\times12\times24}{504} = 3\frac{3}{7}$ दिन

3. $\frac{6\times8}{8-6} = 24$ दिन

4. 2(A + B + C) कार्य समाप्त करेंगे $\frac{30\times40\times60}{30\times40+30\times60+40\times60} = \frac{40}{3}$ दिनों में

∴ (A + B + C) कार्य समाप्त करेंगे $\frac{80}{3} = 26\frac{2}{3}$ दिनों में।

5. A 1 घंटा में $\frac{75}{25} = 3$ पृष्ठ नकल कर सकता है।

(A + B) 1 घंटा में $\frac{135}{27} = 5$ पृष्ठ नकल कर सकते हैं।

∴ B 1 घंटा में (5 − 3) = 2 पृष्ठ नकल कर सकते हैं।

∴ B को 42 पृष्ठ नकल करने में $\frac{42}{2} = 21$ घंटे लगेंगे।

6. A + B + C, 2 दिनों में $2\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{12}+\frac{1}{15}\right) = 2\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}$ कार्य करते हैं।

इसके बाद B कार्य करना छोड़ देता है।

∴ (A + B) पूरा कार्य समाप्त करेंगे $\frac{10\times12}{12+10} = \frac{60}{11}$ दिनों में

∴ (A + B) $\frac{1}{2}$ कार्य समाप्त करेंगे $\frac{30}{11} = 2\frac{8}{11}$ दिनों में

7. A + B + C कार्य कर सकते हैं $\frac{8}{3}$ घंटे में ..... (1)

B + C कार्य कर सकते हैं 4 घंटे में ..... (2)

B कार्य कर सकता है 6 घंटे में ..... (3)

(2) एवं (3) से,

C कार्य कर सकता है $\frac{4\times6}{6-4} = 12$ घंटे में ..... (4)

(1) एवं (4) से,

yoursmahboob

(A + B) इसी कार्य को पूरा कर सकते हैं

$$\frac{\frac{8}{3}\times 12}{12-\frac{8}{3}}=\frac{32\times 3}{28}=\frac{24}{7}=3\frac{3}{7}$$ घंटे में

8. दिए गए समय को घंटा में बदल लें।
मैं इस कार्य को $15\times 8=120$ घंटे में पूरा करता हूँ

आप इसे $\frac{20}{3}\times 9=60$ घंटे में पूरा करते हैं।

हम दोनों यदि साथ मिलकर कार्य पूरा करें तो $\frac{120\times 60}{120-60}=40$ घंटे लगते हैं।

$\therefore$ दिनों की संख्या $=\frac{40}{10}=4$ दिन

बीच के चरणों को नजरंदाज कर देने पर, सूत्र से,

$$\frac{1}{10}\left[\frac{(15\times 8)\times\left[\frac{20}{3}\times 9\right]}{(15\times 8)+\left[\frac{20}{3}\times 9\right]}\right]=\frac{1}{10}\left[\frac{120\times 60}{180}\right]=4 \text{ दिन}$$

नोट: उदा.–16 का हल देखिए। वहाँ विधि कुछ भिन्न है। हमारा सुझाव यह है कि आप पहले बताई गई विधि का ही उपयोग करें।

9. A, B की तुलना में दुगुना कार्यक्षमता वाला है इसलिए B 14 दिनों में कार्य समाप्त करेगा।

$\therefore$ (A + B) कार्य समाप्त करेंगे $\frac{7\times 14}{7+14}=\frac{14}{3}=4\frac{2}{3}$ दिनों में

10. (A – B) को $\frac{6\times 12}{6+12}=4$ दिन लगते हैं।

$\therefore$ C को 4 दिन लगता है।

तथा, (B + C) को $\frac{12\times 4}{12+4}=3$ दिन लगते हैं।

11. मान लिया कि B, $2x$ दिनों में कार्य समाप्त करता है।
$\therefore$ A, x दिनों में कार्य समाप्त करता है।

यदि साथ साथ कार्य करें तो दोनों मिलकर इसे $\frac{2x^2}{3x}=16$ दिनों में कर सकते हैं

$\therefore x=24$ दिन

yoursmahboob

∴ A 24 दिनों में कर सकता है एवं B, 48 दिनों में

नोट: द्रुत विधि के लिए हल किया गया उदा. 20 देखें।

12. 3 पुरुष = 5 महिलाएँ

∴ 5 पुरुष = $\frac{5}{3} \times 5 = \frac{25}{3}$ महिलाएँ

∴ 5 पुरुष + 6 महिलाएँ = $\frac{25}{3} + 6 = \frac{43}{3}$ महिलाएँ

दिया गया है कि 5 महिलाओं को काम पूरा करने में 43 दिन लगते हैं।

∴ $\frac{43}{3}$ महिलाएँ इसे $43 \times \left(\frac{3}{43}\right) \times 5 = 15$ दिनों में पूरा करेंगी।

द्रुत विधि (Quicker Method): (उदा.-14 देखें)

दिनों की अभीष्ट संख्या = $\frac{1}{\left[\frac{5}{3 \times 43} + \frac{6}{5 \times 43}\right]} = 15$ दिन

13. 5पु. + 2ब. = 4(1पु. + 1ब.)

या, पु. = 2ब.

∴ $\frac{पु.}{ब.} = \frac{2}{1}$

∴ बच्चे की तुलना में पुरुष दुगुना कार्य करता है।

14. 1पु. + 3म. + 4ब. कार्य पूरा करते हैं 96 घंटे में ..... (1)

2पु. + 8ब. कार्य पूरा करते हैं 80 घंटे में ..... (2)

या, 1पु. + 4ब. कार्य पूरा करते हैं 160 घंटे में ..... (3)

या, 2पु. + 3म. कार्य पूरा करते हैं 120 घंटे में ..... (4)

(1) एवं (3) से,

3म. कार्य पूरा करते हैं $\frac{160 \times 96}{160 - 96} = 240$ घंटे में ..... (5)

(4) एवं (5) से,

2पु. कार्य पूरा करते हैं $\frac{240 \times 120}{240 - 120} = 240$ घंटे में ..... (6)

∴ 5पु. कार्य पूरा करते हैं $240 \times \frac{2}{5} = 96$ घंटे में ..... (7)

(2) एवं (6) से,

8ब. कार्य पूरा करते हैं $\frac{80 \times 240}{240 - 80} = 120$ घंटे में

yoursmahboob

$\therefore$ 12व. कार्य पूरा करते हैं $\frac{120 \times 8}{12} = 80$ घंटे में ..... (8)

(7) एवं (8) से,

5पु. + 12व. कार्य पूरा करते हैं,

$\frac{90 \times 80}{96 + 80} = \frac{480}{11} = 43\frac{7}{11}$ घंटे में

15. 2 दिनों में (A + B) द्वारा किया गया कार्य = $\frac{1}{9} + \frac{1}{12} = \frac{4+3}{36} = \frac{7}{36}$

5 × 2 दिनों में से $\frac{7 \times 5}{36} = \frac{35}{36}$ कार्य पूरा कर लेंगे।

अर्थात् 5 × 2 = 10 दिनों बाद, $1 - \frac{35}{36} = \frac{1}{36}$ कार्य शेष रह जाता है, जिसे अकेला A को पूरा करना है।

$\because$ A 1 कार्य करता है 9 दिनों में

$\therefore$ A $\frac{1}{36}$ कार्य करता है $9 \times \frac{1}{36} = \frac{1}{4}$ दिनों में

$\therefore$ दिनों की कुल संख्या $= 10 + \frac{1}{4} = 10\frac{1}{4}$ दिन

16. मान लिया कि रकम 21 एवं 28 के ल. स. (LCM) अर्थात 84 रु. के बराबर है.

तब, A को $\frac{84}{21} = 4$ रु./दिन मिलता है

एवं B को $\frac{84}{28} = 3$ रु./दिन मिलता है

A + B को 4 + 3 = 7 रु./दिन मिलता है

$\therefore$ 84 रु. पर्याप्त है, उन दोनों को $\frac{84}{7} = 12$ दिन की मजदूरी का भुगतान करने के लिए।

***द्रुत विधि* (Quicker Method):**

अपेक्षित दिनों की संख्या = $\frac{\text{दिनों की संख्या का गुणनफल}}{\text{दिनों की संख्या का योगफल}} = \frac{21 \times 28}{21 - 28} = 12$ दिन

17. मान लिया कि B कार्य पूरा करता है x दिनों में

$\rightarrow$ A $\frac{1}{x}$ कार्य पूरा करता है $\frac{3x}{4}$ दिनों में

yoursmahboob

$\therefore$ A पूरा कार्य करता है $\frac{3x}{2}$ दिनों में।

$\therefore$ (A + B) कार्य सम्पन्न करते हैं $\frac{x \times \frac{3x}{2}}{x+\frac{3x}{2}} = 18$ दिनों में (दिया गया है)

या, $\frac{\frac{3}{2}x^2}{\frac{5}{2}x} = 18$

$\therefore x = \frac{18 \times 5}{3} = 30$ दिन

18. 15 पुरुष कार्य पूरा करते हैं $\frac{10 \times 10}{15} = \frac{20}{3}$ दिनों में

6 महिलाएँ कार्य पूरा करती हैं $\frac{12 \times 10}{6} = 20$ दिनों में

15 पुरुष + 6 महिलाएँ कार्य पूरा करती हैं $\frac{\frac{20}{3} \times 20}{\frac{20}{3} + 20} = \frac{20 \times 20}{80} = 5$ दिनों में

19. उदा. 24 देखें।

सूत्र से (Direct Formula): अभीष्ट दिनों की संख्या $= \frac{30 \times 40}{30+40}\left[\frac{40-12}{40}\right] = 12$ दिन

20. मान लिया कि आरंभ में मात्र x आदमी थे।
तब 1 व्यक्ति कार्य पूरा करेगा $60x$ दिनों में।
दूसरी स्थिति में, 1 व्यक्ति कार्य पूरा करता है $(x + 8)50$ दिनों में
अब, $60x = 50(x + 8)$

$\therefore x = \frac{400}{10} = 40$ आदमी

***द्रुत विधि* (Quicker Method):**

आदमियों की संख्या $= \frac{\text{अतिरिक्त व्यक्तियों की संख्या} \times (60-10)}{10} = \frac{8 \times 50}{10} = 40$ व्यक्ति

21. यदि प्रत्येक बच्चा को एक पुरुष की तुलना में दुगुना समय लगता है तो 8 बच्चे = 4 पुरुष
$\therefore$ 8 बच्चे + 12 पुरुष = 16 पुरुष

yoursmahboob

16 पुरुष कार्य पूरा करते हैं 9 दिनों में।

$\therefore$ 12 पुरुष कार्य पूरा करते हैं $\frac{9\times16}{12}=12$ दिनों में।

22. 4 पुरुष कार्य पूरा करते हैं 10 दिनों में

$\therefore$ 2 पुरुष कार्य पूरा करते हैं 20 दिनों में

$\therefore$ 3 महिलाएँ कार्य पूरा करती हैं $\frac{10\times20}{20-10}=20$ दिनों में

तथा 3 पुरुष कार्य पूरा करते हैं $\frac{40}{3}$ दिनों में

$\therefore$ 3 पुरुष एवं 3 महिलाएँ कार्य पूरा करते हैं $\frac{20\times\frac{40}{3}}{20+\frac{40}{3}}=\frac{20\times40}{100}=8$ दिनों में

23. 3 पुरुष एवं 4 बच्चे कार्य पूरा करते हैं 8 दिनों मे ..... (1)

$\therefore$ 4 पुरुष एवं 4 बच्चे कार्य पूरा करते हैं 6 दिनों में ..... (2)

(1) को (2) में से घटाने पर

1 पुरुष कार्य पूरा करते हैं $\frac{8\times6}{8-6}=24$ दिनों में ..... (3)

$\therefore$ 3 पुरुष कार्य पूरा करता है $\frac{24}{3}=8$ दिनों में ..... (4)

(1) एवं (4) से हम इस निष्कर्ष पर पहुँचते हैं कि बच्चे कोई कार्य नहीं करते हैं

$\therefore$ 2 पुरुष + 4 बच्चे = 2 पुरुष कार्य को पूरा करते हैं $\frac{24}{2}=12$ दिनों में

24. 1 पुरुष = 2 महिलाएँ = 3 बच्चे

$\therefore$ 1 पुरुष + 1 महिला + 1 बच्चा = 3 बच्चे + $\frac{3}{2}$ बच्चे + 1 बच्चा = $\frac{11}{2}$ बच्चे।

अब 3 बच्चे कार्य पूरा करते हैं 44 दिनों में

$\therefore \frac{11}{2}$ बच्चे कार्य पूरा करते हैं $\frac{44\times3\times2}{11}=24$ दिनों में।

yoursmahboob

कार्य और मजदूरी
(Work and Wages)

प्रमेय: किसी व्यक्ति को दी जानेवाली मजदूरी हमेशा किए गए कार्य के समानुपाती एवं कार्य करने में लगे समय के व्युत्क्रमानुपाती होता है।

उदा. 1: A किसी कार्य को 6 दिनों में संपन्न करता है एवं B उसे मात्र 5 दिनों में काम का ठेका 220 रु. है। B को कितने रुपए मिलेंगे, यदि दोनों मिलकर कार्य करें.

हल: ***पहली विधि* (Method I):**

A का 1 दिन का कार्य - $\frac{1}{6}$

B का 1 दिन का कार्य - $\frac{1}{5}$

उनकी मजदूरी का अनुपात - $\frac{1}{6} : \frac{1}{5} = 5 : 6$

$\therefore$ B का हिस्सा - $\frac{220}{5+6} \times 6 = 120$ रु.

***दूसरी विधि* (Method II):** चूँकि मजदूरी कार्य में व्यतीत समय के विपरीत अनुपात में होता है, इसलिए उनकी मजदूरी 5 : 6 के अनुपात में होनी चाहिए।

$\therefore$ B का हिस्सा $\frac{220}{11} \times 6 = 120$ रु

उदा. 2: एक व्यक्ति कोई काम 10 दिनों में पूरा करता है। एक बच्चे की मदद से वही काम 6 दिनों में पूरा कर सकता है। यदि उन्हें इस कार्य की मजदूरी 50 रु. मिलती है तो बच्चे को कितना मिलेगा?

हल: बच्चा कार्य पूरा कर सकता है $\frac{10 \times 6}{10-6} = 15$ दिनों में

[प्रमेय का स्मरण करें]

पुरुष का हिस्सा : बच्चे का हिस्सा = 15 : 10 = 3 : 2

पुरुष का हिस्सा = $\frac{50}{5} \times 3 = 30$ रु.

उदा. 3: A, B एवं C किसी कार्य को क्रमशः 6, 8 एवं 12 दिनों में पूरा कर सकते हैं। तीनों मिलकर कार्य पूरा करते हैं और इसका उन्हें 1350 रु. मिलता है। उस राशि में से B को कितना मिलेगा?

हल: A का 1 दिन का कार्य = $\frac{1}{6}$

yoursmahboob

B का 1 दिन का कार्य = $\frac{1}{8}$

C का 1 दिन का कार्य = $\frac{1}{12}$

A का हिस्सा : B का हिस्सा : C का हिस्सा = $\frac{1}{6}:\frac{1}{8}:\frac{1}{12}$

प्रत्येक अनुपात में हरों के ल. स. (LCM) से गुणा करने पर अनुपात 4 : 3 : 2 हो जाता है।

$\therefore$ B का हिस्सा = $\frac{1350}{9}\times 3 = 450$ रु.

द्रुत विधि (Quicker Method):

A का हिस्सा : B का हिस्सा : C का हिस्सा

= B का समय × C का समय : A का समय × C का समय : A का समय × B का समय

= 90 : 72 : 48 = 4 : 3 : 2

$\therefore$ B का हिस्सा = $\frac{1350}{9}\times 3 = 450$ रु.

उदा. 4: A, B एवं C एक काम का ठेका 550 रु. में लेता है। A एवं B मिलकर कार्य का $\frac{7}{11}$ हिस्सा पूरा कर लेते हैं। C को कितना प्राप्त होता है ?

हल: $\because$ A + B ने $\frac{7}{11}$ कार्य किया एवं

C ने $\left(1-\frac{7}{11}\right) = \frac{4}{11}$ कार्य पूरा किया।

$\therefore$ (A + B) का हिस्सा : C का हिस्सा = $\frac{7}{11}:\frac{4}{11}$ = 7 : 4

C का हिस्सा = $\frac{550}{11}\times 4 = 200$ रु.

उदा. 5: दो व्यक्ति मिलकर 200 रु. में किसी कार्य को पूरा करने का निश्चय करते हैं। उनमें से एक अकेला उसे 6 दिनों में पूरा कर सकता है और दूसरा उसे 8 दिनों में। एक बच्चे की मदद से वे इस कार्य को 3 दिनों में पूरा कर लेते हैं। रकम किस तरह विभाजित की जानी चाहिए?

हल: पहले व्यक्ति का 3 दिनों का कार्य = $\frac{3}{6}$

yoursmahboob

दूसरे व्यक्ति का 3 दिनों का कार्य – $\frac{3}{8}$

बच्चे का 3 दिनों का कार्य – $1 - \left[\frac{3}{6} + \frac{3}{8}\right] = \frac{1}{8}$

उनके हिस्से का अनुपात – $\frac{3}{6} : \frac{3}{8} : \frac{1}{8} = 4 : 3 : 1$

$\therefore$ पहले व्यक्ति का हिस्सा – $\frac{200}{8} \times 4 = 100$ रु.

दूसरे व्यक्ति का हिस्सा – $\frac{200}{8} \times 3 = 75$ रु.

बच्चे का हिस्सा – $\frac{200}{8} \times 1 = 25$ रु.

उदा. 6: 45 महिलाओं की 48 दिनों की मजदूरी 15,525 रु. है। कितने पुरुष 16 दिनों तक कार्य करें ताकि उनकी सम्मिलित मजदूरी 5750 रु. हो, जबकि पुरुष की दैनिक मजदूरी महिला की तुलना में दुगुनी है?

हल: एक महिला का 1 दिन की मजदूरी = $\frac{15,525}{45 \times 48} = \frac{115}{16}$ रु.

$\therefore$ एक पुरुष का 1 दिन की मजदूरी = $2 \times \frac{115}{16} = \frac{115}{8}$ रु.

अत. पुरुषों की संख्या = $\frac{\text{कुल मजदूरी}}{\text{दिनों की संख्या} \times \text{1 पुरुष का 1 दिन की मजदूरी}}$

$= \frac{5750 \times 8}{16 \times 115} = 25$ पुरुष

नोट: हमलोगों को निम्नलिखित सूत्र याद रखना चाहिए:

कुल मजदूरी = एक व्यक्ति का 1 दिन की मजदूरी × व्यक्तियों की संख्या × दिनों की संख्या

उदा. 7: 3 पुरुष एवं 4 बच्चे मिलकर 7 दिनों में 756 रु. कमाते हैं। 11 पुरुष एवं 13 बच्चे मिलकर 8 दिनों में 3008 रु. कमाते हैं। कितने समय में 7 पुरुष एवं 9 बच्चे मिलकर 2480 रु. कमा पाएँगे?

हल: (3 पु. + 4 ब.) 1 दिन में $\frac{756}{7} = 108$ रु. कमाते हैं। ..... (1)

(11 पु + 13 ब.) 1 दिन में $\frac{3008}{8} = 376$ रु. कमाते हैं। ..... (2)

yoursrahboob

(1) से यह स्पष्ट है कि 1 दिन में 1 रु. कमाने के लिए $\frac{3\text{पु.}+9\text{ब.}}{108}$ व्यक्ति होने चाहिए।

इसी तरह (2) से,

1 दिन में 1 रु. कमाने के लिए $\frac{11\text{पु.}+13\text{ब.}}{376}$ व्यक्ति होने चाहिए

प्रश्नानुसार,

$$\frac{3\text{पु.}+9\text{ब.}}{108} = \frac{11\text{पु.}+13\text{ब.}}{376} \text{ ..... } (*)$$

या, पु. $(3 \times 376 - 11 \times 108)$ = ब. $(108 \times 13 - 4 \times 376)$ ..... (*)(*)

$$\therefore \frac{\text{पु.}}{\text{ब.}} = \frac{100}{60} = \frac{5}{3}$$

अब (1) से,

(3 पु. + 4 ब.) 1 दिन में 108 रु. कमाते हैं।

या, $3\text{पु.} + 4 \times \frac{3}{5}\text{ब.}$ 1 दिन में 108 रु. कमाते हैं।

या, $\frac{27\text{पु.}}{5}$ 1 दिन में 108 रु. कमाते हैं।

1 पुरुष 1 दिन में $\frac{108 \times 5}{27} = 20$ रु. कमाता है।

इस प्रकार यह स्पष्ट है कि एक पुरुष प्रति दिन 20 रु. कमाता है तथा एक बच्चा प्रति दिन $\left(20 \times \frac{3}{5} =\right) 12$ रु. कमाता है।

$\therefore$ (7 पु. + 9 ब.) 1 दिन में $(7 \times 20 + 9 \times 12 =)$ 248 रु. कमाते हैं।

$\therefore$ 10 दिनों में ये 2480 रु. कमाएँगे।

नोट: (*) LHS एवं RHS दोनों एक ही राशि को निर्दिष्ट करते हैं:

(*) 1 दिन में 1 रु. कमाने वाले व्यक्तियों की संख्या

(*)(*) हम लोग इस चरण पर सीधे वज्र गुणन एवं विभाजन (cross-multiplication-division rule) के नियम से पहुँच सकते हैं। प्रदत्त सूचनाओं को निम्नलिखित रूप में सजाएँ:

पुरुष	बच्चे		कमाई		दिन
3	4	×	756	÷	7
11	13	×	3008	÷	8

अब, पुरुष $\left[\frac{3 \times 3008}{8} - \frac{11 \times 756}{7}\right]$ = बच्चे $\left[\frac{13 \times 756}{7} - \frac{4 \times 3008}{8}\right]$

या, पु. $(3 \times 376 - 11 \times 108)$ = ब. $(108 \times 13 - 4 \times 376)$

yoursmahboob

या $\frac{पु.}{ब.} = \frac{5}{3}$

उदा. 8: 12 पुरुष एवं 13 बच्चे मिलकर 3 दिनों में 326.25 रु. कमा सकते हैं। 5 पुरुष एवं 6 बच्चे मिलकर 5 दिनों में 237.5 रु. कमा सकते हैं। कितने समय में 3 पुरुष एवं 4 बच्चे मिलकर 210 रु. कमा लेंगे?

हल: स्वयं हल करें। (उदा.-7 की तरह)

उदा. 9: A, B एवं C मिलकर 9 दिनों में 1350 रु. कमाते हैं। A एवं C मिलकर 5 दिनों में 470 रु. कमाते हैं। B और C मिलकर 10 दिनों में 760 रु. कमाते हैं। C की दैनिक आय बताएँ।

हल: A + B + C की दैनिक आय = $\frac{1350}{9}$ रु. = 150 रु. ..... (1)

A + C की दैनिक आय = $\frac{470}{5}$ रु. = 94 रु. ..... (2)

B + C की दैनिक आय = $\frac{760}{10}$ रु. = 76 रु. ..... (3)

(1) एवं (2) से, B की दैनिक आमदनी = 150 − 94 = 56 रु. ..... (4)

(3) एवं (4) से, C की दैनिक आमदनी = 76 − 56 = 20 रु.

अभ्यास प्रश्न

1. दो व्यक्ति A एवं B मिलकर कोई कार्य पूरा करते हैं। यदि इस कार्य को वे अलग-अलग पूरा करें तो क्रमशः 12 एवं 18 दिन लगेंगे। मजदूरी के तौर पर उन्हें 149.25 रु. मिलते हैं। A और B का हिस्सा बताएँ।
2. A, B और C मिलकर कोई कार्य पूरा करते हैं। बतौर मजदूरी उन्हें 53.50 रु. का भुगतान किया जाता है। इस कार्य को A अकेले 5 दिनों में, B अकेले 6 दिनों में और C अकेले 7 दिनों में समाप्त कर सकते हैं। उनके बीच मजदूरी का बँटवारा किस तरह से किया जाएगा ?
3. यदि 45 महिलाओं को 48 दिनों की आमदनी 15525 रु. हो तो कितने पुरुष 16 दिनों तक कार्य करें ताकि उन्हें मजदूरी के तौर पर 5750 रु. मिले, यदि एक पुरुष की दैनिक मजदूरी एक महिला की तुलना में दुगुनी हो?
4. यदि 3 पुरुष एवं 4 महिलाएँ 7 दिनों में 210 रु. कमाते हों और 11 पुरुष एवं 13 बच्चे 8 दिनों में 830 रु. कमाते हों तो कितने समय में 7 पुरुष एवं 9 बच्चे 1100 रु. कमाएँगे ?
5. यदि 12 पुरुष एवं 13 बच्चे 3 दिनों में 365.25 रु. कमाते हों तथा 5 पुरुष एवं 6 बच्चे 5 दिनों में 237.50 रु. कमाते हों तो कितने समय में 3 पुरुष एवं 4 बच्चे 210 रु. कमाएँगे ?

उत्तर

1. मजदूरी का विभाजन दिनों की संख्या के विपरीत अनुपात में होता है। इसलिए रकम का विभाजन 18:12 के अनुपात में होगा।

∴ A को मिलेगा: $\frac{149.25}{30} \times 18 = 89.55$ रु.

yoursmahboob

तथा B को मिलेगा: $\frac{149.25}{30} \times 12 = 59.50$ रु.

2. A का हिस्सा : B का हिस्सा : C का हिस्सा $= 6 \times 7 : 5 \times 7 : 5 \times 6$
$= 42 : 35 : 30$

$\therefore$ A का हिस्सा $= \frac{53.50}{42 + 35 + 30} \times 42 = \frac{53.50}{107} \times 42 = 21$ रु.

B का हिस्सा $= \frac{53.50}{107} \times 30 = 15$ रु.

3. उदा.-6 देखिए।
4. उदा.-7 देखिए
5. उदा.-4 देखिए।

yoursmahboob

नल एवं हॉज

(Pipes and Cisterns)

परिचय (Introduction): नल एवं हॉज से संबंधित प्रश्न बिलकुल समय एवं काम के प्रश्नों की तरह ही होते हैं। इस प्रकार, यदि एक नल एक हॉज को 6 घंटे में भरता है, तो नल हॉज का $\frac{1}{6}$ भाग 1 घंटा में भरेगा।

नल एवं हॉज प्रश्नों में केवल एक ही अंतर होता है कि इसमें निकासी (outlets) के साथ-साथ प्रवेशिका (inlets) भी होती है। इस प्रकार, इसमें एक कारक (agent) ऐसा होता है जो ऋणात्मक कार्य भी करता है। वह कारक निकास या outlet कहलाता है। शेष प्रक्रिया लगभग समान होती है।

प्रवेशिका (Inlet): एक नल जो कि एक हॉज (tank or cistern or reservoir) से जुड़ा होता है तथा उसे भरता है तो वह नल प्रवेशिका या inlet कहलाती है।

निकास (Outlet): एक नल जो कि एक हॉज से जुड़ा होता है तथा उसे खाली करता है तो वह नल निकास या outlet कहलाता है।

सूत्र (Formulae):

(i) यदि एक नल एक हॉज को x घंटे में भरता है तो 1 घंटा में हॉज का $\frac{1}{x}$ भाग भरता है।

(ii) यदि एक नल एक हॉज को y घंटे में खाली करता है तो 1 घंटा में एक भरा हुआ हॉज का $\frac{1}{y}$ भाग खाली करता है।

(iii) यदि एक नल एक हॉज को x घंटे में भर सकता है तथा दूसरा नल एक भरे हॉज को y घंटे में खाली कर सकता है तो 1 घंटा में हॉज का $\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)$ भाग भरा जाता है, जब दोनों नलों को एक साथ खोल दिया जाता है।

$\therefore$ हॉज को भरने में लगा समय, जब दोनों नलों को खोल दिया जाता है $= \frac{xy}{y-x}$

(iv) यदि एक नल एक हॉज को x घंटे में भर सकता है तथा एक दूसरा नल उसी हॉज को y घंटे में भर सकता है तो जब दोनों नलों को एक साथ खोल दिया जाता है तो 1 घंटा में हॉज का $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$ भाग भरा जाएगा।

yoursmahboob

$\therefore$ हौज को पूरी तरह भरने में लगा समय $= \frac{xy}{x+y}$

(v) यदि एक नल एक हौज को x घंटे में भर सकता है तथा दूसरा नल उसी हौज को y घंटे में भर सकता है लेकिन तीसरा एक खाली करने वाला नल भरे हुए हौज को z घंटे में खाली कर सकता है तथा सभी को एक साथ खोल दिया जाता है तो एक घंटा में हौज का $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{z}\right)$ भाग भर जाता है।

$\therefore$ हौज को भरने में लगा समय $= \frac{xyz}{yz+xz-xy}$ घंटा

(vi) एक नल एक हौज को x घंटे में भर सकता है। हौज की तली (bottom) में एक छिद्र होने की वजह से यह y घंटे में भरा जाता है। यदि हौज पूरी तरह से भरा हुआ है तो छिद्र के द्वारा हौज को खाली करने में लगा समय $= \frac{xy}{y-x}$ घंटा

उदा. 1: दो नल A एवं B एक हौज को क्रमशः 36 घंटे एवं 45 घंटे में भर सकते हैं। यदि दोनों नलों को एक साथ खोल दिया जाता है तो हौज को भरने में कितना समय लगेगा?

हल: 1 घंटा में अकेले A द्वारा भरा गया हौज का भाग $= \frac{1}{36}$

1 घंटा में अकेले B द्वारा भरा गया हौज का भाग $= \frac{1}{45}$

$\therefore$ (A+B) द्वारा 1 घंटा में भरा गया भाग $= \left(\frac{1}{36}+\frac{1}{45}\right) = \frac{9}{180} = \frac{1}{20}$

इसलिए, दोनों नल एक साथ मिलकर हौज को 20 घंटे में भरते हैं।

सूत्र विधि (Direct Method): सूत्र (iv) से,

अभीष्ट समय $= \frac{36 \times 45}{36+45} = 20$ घंटा

उदा. 2: एक नल एक हौज को 15 घंटे में भर सकता है तली में एक छिद्र होने की वजह से नल इसे 20 घंटे में भर देता है। यदि हौज पूरी तरह भरा हो तो छिद्र उसे खाली करने में कितना समय लेगा?

हल: छिद्र द्वारा एक घंटा में किया गया काम $= \left(\frac{1}{15}-\frac{1}{20}\right) = \frac{1}{60}$

$\therefore$ छिद्र हौज को 60 घंटे में खाली कर देगा।

yoursmahboob

सूत्र विधि (Direct Method): सूत्र *(iv)* से,

अभीष्ट समय $= \frac{15 \times 20}{20 - 15} = 60$ घंटे।

उदा. 3: नल A एक हौज को 20 घंटे में भर सकता है जबकि नल B अकेले उसे 30 घंटे में भर सकता है तथा नल C भरे हुए हौज को 40 घंटे में खाली करता है। यदि सभी नलों को एक साथ खोल दिए जाएँ तो हौज को भरने में कितना समय लगेगा?

हल: 1 घंटा में भरा गया भाग $= \left(\frac{1}{20} + \frac{1}{30} - \frac{1}{40}\right) = \frac{7}{120}$

$\therefore$ हौज पूरी तरह भर जाएगा $= \frac{120}{7} = 17\frac{1}{7}$ घंटे में

सूत्र विधि (Direct Method): सूत्र (v) से,

$$\frac{20 \times 30 \times 40}{30 \times 40 + 20 \times 40 - 20 \times 30} = \frac{120}{7} = 17\frac{1}{7} \text{ घंटा}$$

उदा. 4: दो नल A एवं B एक हौज को क्रमशः 1 घंटा एवं 45 मिनट में भरते हैं। एक निकास नल *(outlet)* C है। यदि सभी तीन नलों को एक साथ खोल दिया जाए तो हौज 50 मिनट में भर जाता है। भरे हुए हौज को नल C कितने समय में खाली कर देगा?

हल: 1 मिनट में C द्वारा किया गया काम $= \left(\frac{1}{60} + \frac{1}{75} - \frac{1}{50}\right) = \frac{3}{300} = \frac{1}{100}$

C भरे हुए हौज को 100 मिनट में खाली कर देगा।

उदा. 5: एक हौज में 1 से. मी., $1\frac{1}{3}$ से. मी. एवं 2 से. मी. व्यास के तीन नल लगे हुए हैं, इनमें से पानी के आने का अनुपात वही है जो इनके व्यास के वर्गों का। सबसे बड़ा नल अकेला हौज को 61 मिनट में भर सकता है। यदि तीनों नल एक साथ खोल दिए जाएँ तो बताओ हौज कितनी देर में भर जाएगा?

हल: 1 मिनट में 2 से. मी. व्यास का नल हौज का $\frac{1}{61}$ भाग भरता है।

1 मिनट में 1 से. मी. व्यास का नल हौज का $\frac{1}{61} \times \frac{1}{4}$ भाग भरता है ..... (*)

1 मिनट में $1\frac{1}{3}$ से. मी. व्यास का नल हौज का $\frac{1}{61} \times \frac{4}{9}$ भाग भरता है। ..... (**)

yoursmahboob

$\therefore$ 1 मिनट में हौज का $\left(\frac{1}{61}+\frac{1}{61\times4}+\frac{4}{61\times9}\right)$ अर्थात् $\frac{1}{36}$ भाग भर जाता है।

$\therefore$ पूरा हौज 36 मिनट में भर जाएगा।

नोट: (*) यह दिया हुआ है कि पानी आने की मात्रा नल के व्यास के वर्ग का समानुपाति है।

चूँकि 2 से. मी. व्यास वाला नल हौज का $\frac{1}{61}$ भाग भरता है इसलिए 1 से. मी. व्यास वाला नल हौज का $\frac{1}{61}\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{61}\times\frac{1}{4}$ भाग भरता है।

(**) $1\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$ से. मी. व्यास वाला नल हौज का $\frac{1}{61}\times\frac{1}{4}\left(\frac{4}{3}\right)^2=\frac{1}{61}\times\frac{4}{9}$ भाग भरता है।

उदा. 6: एक हौज के तली में एक छिद्र है। जब हौज की मरम्मत कर दी जाती है तो उसे $3\frac{1}{2}$ घंटे में भरा जा सकता है। छिद्र की वजह से अब उसे भरने में आधा घंटा अधिक समय लगता है। यदि हौज पूरी तरह भरा हो तो छिद्र हौज को कितनी देर में खाली कर देगा?

हल: अपेक्षित समय $=\frac{3.5\times4}{4-3.5}=28$ घंटा

उदा. 7: दो नल A एवं B एक हौज को क्रमशः 24 मिनट एवं 32 मिनट में भरता है। यदि दोनों नलों को एक साथ खोल दिया जाता है तो B को कितने समय बाद बंद कर दिया जाना चाहिए ताकि हौज 18 मिनट में भर जाए?

हल: मान लिया कि B को x मिनट बाद बंद कर दिया जाता है। (A+B) के द्वारा x मिनट में भरा गया भाग + A के द्वारा $(18-x)$ मिनट में भरा गया भाग = 1

$\therefore x\left(\frac{1}{24}+\frac{1}{32}\right)+(18-x)\times\frac{1}{24}=1$

या $\frac{7x}{96}+\frac{18-x}{24}=1$

या $7x+4(18-x)=96$

या $3x=24 \therefore x=8$

yoursmahboob

इसलिए, B को 8 मिनट बाद बंद कर देना चाहिए।

सूत्र विधि (Direct Formula):

नल B को $\left(1-\frac{18}{24}\right)\times 32 = 8$ मिनट बाद बंद कर देना चाहिए।

उदा. 8: दो नल P एवं Q एक हॉज को क्रमशः 24 घंटे एवं 32 घंटे में भरता है। यदि दोनों नलों को एक साथ खोल दिया जाए तो पहला नल P को कब बन्द कर दिया जाना चाहिए ताकि हॉज 16 घंटे में भर सके?

हल: माना कि पहला नल P को x घंटे बाद बंद कर दिया जाता है।

तो पहला का x घंटे का काम + दूसरे का 16 घंटे का काम = 1

या $\frac{x}{24}+\frac{16}{32}=1$

$\therefore \frac{x}{24}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

$\therefore x=12$ घंटे

सूत्र विधि (Direct Formula):

पहला नल को $\left(1-\frac{16}{32}\right)\times 24$ घंटा = 12 घंटा तक काम करना चाहिए।

उदा. 9: जब दो नल एक साथ काम करते हैं तो एक हॉज 12 घंटे में भर जाता है। एक नल हॉज को 10 घंटे ज्यादा तेजी से भरता है। हॉज को पूरी तरह से भरने में तेजी से काम करने वाले नल को कितना समय लगेगा?

हल: मान लिया कि तेज नल x घंटे में हॉज को भर देता है।

तो धीमा नल हॉज को $(x+10)$ घंटे में भरता है।

जब दोनों को खोला जाता है, तो हॉज भरा जाएगा:

$$\frac{x(x+10)}{x+(x+10)}=12$$

या, $x^2-14x-120=0$

$\therefore x=20,-6$

लेकिन x ऋणात्मक नहीं हो सकता है इसलिए तेज नल हॉज को 20 घंटे में भरेगा।

उदा. 10: तीन नल A, B, एवं C एक हॉज को 6 घंटे में भरते हैं। 2 घंटे एक साथ काम करने

yousmahboob

के बाद C को बंद कर दिया जाता है तथा A एवं B हौज को 8 घंटे में भर देते हैं। नल C उसी हौज को भरने में कितना समय लेगा?

हल: A + B + C एक घंटे में हौज का $\frac{1}{6}$ भाग भरता है।

A + B + C 2 घंटे में हौज का $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ भाग भरता है

खाली भाग $\left(1-\frac{1}{3}-\right)\frac{2}{3}$ जिसे (A + B) 8 घंटे में भरते हैं।

$\therefore$ (A + B) हौज को $\frac{8\times3}{2}=12$ घंटे में भरते हैं।

प्रश्नानुसार, (A + B + C) हौज को 6 घंटे में भर सकते हैं।

$\therefore$ (A + B + C) (A + B) हौज को $\frac{12\times6}{12-6}=12$ घंटे में भर सकते हैं।

उदा. 11: एक हौज में एक छिद्र है जो 8 घंटे में उसे खाली कर सकता है। एक नल को खोल दिया जाता है जो हौज में 6 लिटर पानी 1 मिनट में भरता है तथा अब हौज 12 घंटे में खाली कर दिया जाता है। हौज में कितना लिटर पानी अँटेगा?

हल: भरने वाला (filler-tap) नल हौज को $\frac{12\times8}{12-8}=24$ घंटे में भर सकता है।

$\therefore$ हौज की धारिता (capacity) = 24 × 60 × 6 = 8640 लिटर

उदा. 12: एक हौज साधारणतया 8 घंटे में भर दिया जाता है परंतु तली में एक छिद्र हो जाने की वजह से इसे भरने में 2 घंटे अधिक समय लगता है। यदि हौज भरा हुआ हो तो छिद्र उसे कितनी देर में खाली कर देगा?

हल: प्रश्न से यह स्पष्ट है कि भरने वाला नल हौज को 8 घंटे में भरता है तथा यदि दोनों भरने वाला नल तथा छिद्र एक साथ काम करे तो हौज 10 घंटे में भर दिया जाता है।

इसलिए, छिद्र हौज को $\frac{8\times10}{10-8}=40$ घंटे में खाली कर देगा।

उदा. 13: एक नल एक हौज को 12 मिनट में भर सकता है तथा दूसरा नल उसी 15 मिनट में भर सकता है, लेकिन एक तीसरा नल उसे 6 मिनट में खाली कर सकता है। प्रारंभ में 5 मिनट तक पहले दोनों नलों को खोल दिया जाता है तथा उसके बाद तीसरा नल भी खोल दिया जाता है। हौज कितने समय में खाली हो जाएगा?

yoursmahboob

हल: हौज 5 मिनट में $5\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{15}\right)=\frac{3}{4}$ भाग भर जाएगा। 1 मिनट में तीनों नलों द्वारा किया गया कार्य $=\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{15}\right)-\frac{1}{6}=-\frac{1}{60}$

ऋणात्मक चिह्न सूचित करता है कि 1 मिनट में हौज का $\frac{1}{60}$ भाग खाली हो जाता है

$\therefore \frac{3}{4}$ भाग खाली होता है $60\times\frac{3}{4}=45$ मिनट में

उदा. 14: यदि तीनों नलों को एक साथ खोल दिया जाता है तो एक हौज 12 घंटे में भर जाता है। उनमें से कोई एक नल उसे 10 घंटे में भर सकता है तथा दूसरा नल उसे 15 घंटे में तीसरा नल किस तरह से काम करता है?

हल: हमें तीसरे नल की प्रकृति ज्ञात करनी है कि यह भरने वाला नल है या खाली करने वाला। मान लिया कि यह एक भरने वाला नल है जो x घंटे में हौज को भरता है।

हो, $\frac{10\times15\times x}{10\times15+10x+15x}=12$

या, $150x=150\times12+25x\times12$

या, $-150x=1800$

$\therefore x=-12$

ऋणात्मक चिह्न यह दर्शाता है कि तीसरा नल खाली करने वाला नल है जो हौज को 12 घंटे में खाली करता है।

उदा. 15: A, B, एवं C तीन नल एक हौज से जुड़े हुए हैं। A एवं B एक साथ हौज को 6 घंटे में भरते हैं। B एवं C एक साथ हौज को 10 घंटे में भरते हैं। A एवं C एक साथ हौज को $7\frac{1}{2}$ घंटे में भरते हैं। A, B, एवं C अलग अलग हौज को कितने समय में भरता है?

हल: (A + B) 6 घंटे में भरते हैं।

(B + C) 10 घंटे में भरते हैं।

(A + C) $7\frac{1}{2}=\frac{15}{2}$ घंटे में भरते हैं।

yoursmahboob

$\therefore\ 2(A+B+C), \dfrac{6\times10\times\frac{15}{2}}{6\times10+6\times\frac{15}{2}+10\times\frac{15}{2}} = \dfrac{6\times5\times15}{180} = \dfrac{5}{2}$ घंटे में भरते हैं।

$\therefore$ $A+B+C$ हॉज को 5 घंटे में भरते हैं।

अब, A, $\left[-(A+B+C)-(B+C)\right]\dfrac{10\times5}{10-15} - 10$ घंटे में भरता है।

इसी प्रकार, B, $\left(\dfrac{\frac{15}{2}\times5}{\frac{15}{2}-5}\right) 15$ घंटे में भरता है।

एवं C, $\left(\dfrac{5\times6}{6-5}\right) 30$ घंटे में भरता है।

उदा. 16: किसी हॉज को दो नल अलग अलग क्रमशः 20 घंटे एवं 30 घंटे में भर सकते हैं। दोनों नलों को हॉज को भरने के लिए एक साथ खोल दिए जाते हैं लेकिन जब हॉज का $\frac{1}{3}$ भाग भर जाता है तो हॉज में एक छिद्र हो जाता है जिसके द्वारा दोनों नलों के द्वारा भरा गया पानी का $\frac{1}{3}$ भाग बाहर निकल जाता है। हॉज को भरने में कुल कितना समय लगा?

हल: हॉज को भरने में दोनों नलों द्वारा लिया गया समय $= \dfrac{20\times30}{20+30} = 12$ घंटा

$\therefore$ हॉज का $\frac{1}{3}$ भाग $\dfrac{12}{3} = 4$ घंटे में भरा जाता है

अब, भरे गए पानी का $\frac{1}{3}$ भाग बाहर निकल जाता है

$\Rightarrow$ भरने वाला नल पहले की तुलना में $\left(1-\frac{1}{3}\right) - \frac{2}{3}$ कार्यकुशल (efficient) है।

$(12-4) = 8$ घंटे का काम अब $8\div\frac{2}{3} = \dfrac{8\times3}{2} = 12$ घंटे में पूरा किया जाएगा।

$\therefore$ कुल समय $= 4 + 12 = 16$ घंटा

yoursmahboob

अथवा

चूँकि भरे गए पानी का $\frac{1}{3}$ भाग बाहर निकल जाता है, छिद्र हौज को $12 \times 3 = 36$ घंटे में खाली कर देगा। अब, दो नलों तथा छिद्र के द्वारा हौज को भरने में लिया गया समय

$$= \frac{36 \times 12}{36 - 12} = 18 \text{ घंटा}$$

$\therefore$ दो नल एवं छिद्र के द्वारा हौज का $\frac{2}{3}$ भाग भरने में लगा समय

$$= 18 \times \frac{2}{3} = 12 \text{ घंटा}$$

$\therefore$ कुल समय = 4 घंटा + 12 घंटा = 16 घंटा

उदा. 17: एक हौज साधारणतया 8 घंटे में भरा जाता है परंतु इसके तली में एक छिद्र होने की वजह से हौज को भरने में 2 घंटा अधिक समय लगता है। यदि हौज भरा हुआ हो तो छिद्र के द्वारा इसे खाली करने में कितना समय लगेगा?

हल: **विस्तार विधि (Detail Method):**

माना कि हौज को छिद्र x घंटे में खाली कर देता है। तो 1 घंटा में हौज का भरा गया भाग $= \frac{1}{8} - \frac{1}{x} = \frac{x-8}{8x}$

$\therefore$ हौज $\frac{8x}{x-8}$ घंटे में भरा जाएगा।

अब, $\frac{8x}{x-8} = 8 + 2 = 10$ घंटा

या, $8x = 10x - 80$

या, $\therefore x = 40$ घंटा

द्रुत विधि (Quicker approach): भरने वाला नल 2 घंटा अधिक लेता है

$\Rightarrow$ छिद्र 10 घंटे में उतना ही खाली करता है जितना भरने वाला नल 2 घंटे में भरता है।

$\Rightarrow$ छिद्र 10 घंटे में खाली करता है $= \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$ भाग

$\Rightarrow$ छिद्र पूरे हौज को $4 \times 10 = 40$ घंटे में खाली करता है।

yoursmahboob

सूत्र विधि (Direct Formula):

छिद्र इसे $\frac{8\times(8+2)}{2}=40$ घंटे में खाली करेगा

उदा. 18: तीन नल A, B एवं C एक हौज से जुड़े हैं। A एवं B अलग-अलग हौज को क्रमशः 10 मिनट एवं 15 मिनट में भर सकते हैं तथा C एक खाली करने वाला नल है। एक व्यक्ति दोनों नल A एवं B को हौज भरने के लिए खोलकर चला जाता है और वापस उस समय आता है जब हौज को भर जाना चाहिए था। परंतु वह पाता है कि हौज खाली करने वाला नल भी खुला रह गया था। अब वह इस नल को बंद कर देता है तथा हौज 2 मिनट में पूर्णतया भर जाता है। नल C अकेले भरे हुए हौज को कितने समय में खाली कर देगा?

हल: **विस्तार विधि (Detail Method):**

माना कि नल C हौज को x मिनट में खाली करता है।

A एवं B एक साथ हौज को $\frac{10\times15}{10+15}=6$ मिनट में भर सकता है.

चूँकि खाली करने वाला नल C 6 मिनट तक खुला रहता है इसलिए नल C 6 मिनट में हौज का $\frac{6}{x}$ भाग खाली करता है।

अब, हौज का $\frac{6}{x}$ भाग नल A एवं B द्वारा 2 मिनट में भर दिया जाएगा।

$\therefore$ हौज $\frac{x}{3}$ मिनट में पूर्णतया भर जाएगा।

प्रश्नानुसार, $\frac{x}{3}=6$ $\quad\therefore x=18$ मिनट

द्रुत विधि (Quicker Method):

अभीष्ट उत्तर $=\left(\frac{xy}{x+y}\right)^2\frac{1}{t}$ मिनट

यहाँ, $x=10$ मिनट

$y=15$ मिनट

$t=2$ मिनट

$\therefore$ नल C द्वारा हौज को खाली करने में लगा समय

$$=\left(\frac{10\times15}{10+15}\right)^2\times\frac{1}{2}=\frac{6\times6}{2}=18 \text{ मिनट}$$

अभ्यास प्रश्न

1. नल A एवं B एक हौज को क्रमशः 10 घंटे एवं 15 घंटे में भर सकते हैं। दोनों साथ मिलकर इसे कितने घंटों में भर सकते हैं?

yoursmahboob

2. एक नल एक हौज को 8 घंटे में भर सकता है तथा दूसरा इसे 16 घंटे में खाली कर सकता है। यदि दोनों नलों को एक साथ खोल दिया जाता है तो हौज कितने घंटों में भर जाएगा?

3. एक नल एक हौज को x घंटे में भर सकता है तथा दूसरा इसे y घंटे में खाली कर सकता है वे एक साथ इसे कितने घंटे में भर सकते हैं? यदि $y > x$ हो।

4. एक नल एक हौज को 2 घंटे में भर सकता है तथा दूसरा इस हौज को 3 घंटे में खाली कर सकता है। यदि दोनों नलों को एक साथ खोल दिया जाता है तो हौज को कितने समय में भर देगा?

5. एक हौज को दो नल A एवं B से क्रमशः 4 घंटे एवं 6 घंटे में भरा जा सकता है। जब हौज पूरी तरह से भर हो तो उसे एक तीसरा नल C से 8 घंटे में खाली किया जा सकता है। यदि सभी नलों को एक साथ एक ही समय में खोल दिया जाता है तो हौज कितनी देर में भर जाएगा?

6. एक हौज को नल A से 32 मिनट में भरा जा सकता है तथा नल B से 36 मिनट में। जब हौज भरा होता है तो एक नल C से उसे 20 मिनट में खाली किया जा सकता है. यदि सभी तीनों नलों को एक साथ खोल दिया जाए तो आधा हौज कितने समय में भरा जाएगा?

7. यदि दो नल एक साथ काम करता है तो एक हौज 6 घंटे में भर जाएगा। एक नल दूसरे नल की तुलना में 5 घंटा ज्यादा तेजी से हौज को भरता है. तेज नल हौज को भरने में कितना समय लेगा?

8. तीन नल A, B एवं C एक हौज को 6 घंटे में भरता है। दो घंटे एक साथ काम करने के बाद C को बन्द कर दिया जाता है तथा A एवं B उसे 7 घंटे में भर सकते हैं। हौज को भरने में C अकेला कितना समय लेगा?

9. एक हौज में एक छिद्र है जो उसे 8 घंटे में खाली कर सकता है एक नल को, जो एक मिनट में 6 लिटर पानी हौज में भरता है, खोल दिया जाता है तो अब हौज 12 घंटे में खाली हो जाता है। हौज में कितना लिटर पानी अँटेगा?

10. दो नल किसी हौज को अलग-अलग क्रमशः 10 मिनट एवं 15 मिनट में भर सकते हैं तथा जब एक खाली करने वाला नल खोल दिया जाता है तो वे एक साथ मिलकर 18 मिनट में भर सकते हैं। खाली करने वाला नल भरे हुए हौज को कितने समय में खाली कर देगा?

11. एक हौज को दो नल क्रमशः 12 मिनट एवं 15 मिनट में भर सकते हैं। हौज में एक खाली करने वाला नल भी है। जब सभी नलों को एक साथ खोल दिया जाता है तो खाली हौज 20 मिनट में भर जाता है। एक भरे हुए हौज को खाली करने वाला नल कितने समय में खाली कर देगा?

12. एक हौज को एक नल के द्वारा 20 मिनट में भरा जा सकता है तथा दूसरे नल के द्वारा 25 मिनट में। दोनों नलों को 5 मिनट तक खोलकर रखा जाता है तथा उसके बाद दूसरे नल को बन्द कर दिया जाता है हौज को पूरी तरह से भर जाने में कितना समय और लगेगा?

13. एक हौज को साधारणतया 8 घंटे में भर जाता है परंतु हौज की तली में एक छिद्र होने की वजह

yourshahbob

से उसे भरने में 2 घंटे अधिक समय लगते हैं। यदि हौज भरा है तो छिद्र उसे कितने घंटे में खाली कर देगा?

14. दो नल X एवं Y एक हौज को क्रमशः 24 मिनट एवं 32 मिनट में भर सकते हैं। यदि दोनों नलों को एक साथ खोल दिया जाता है तो कितने समय बाद Y को बन्द कर दिया जाना चाहिए ताकि हौज 18 मिनट में भर जाए?

15. एक हौज की नली का छिद्र भरे हुए हौज को 6 घंटे में खाली कर देता है। एक प्रवेशिका (inlet) नल 4 लिटर प्रति मिनट की दर से हौज में पानी भरता है। जब हौज भरा हो तो प्रवेशिका नल को खोल दिया जाता है तथा छिद्र की वजह से हौज 8 घंटे में खाली हो जाता है। तो हौज की धारिता (capacity) लिटर में ज्ञात करें।

उत्तर

1. A+B एक साथ हौज को $\frac{10\times15}{10+15}=6$ घंटे में भर सकते हैं।

2. $\frac{8\times16}{16-8}=16$ घंटे।

3. $\frac{xy}{y-x}$ घंटे।

4. प्रश्न सं. 2 एवं 3 की तरह ही है

5. (A + B + C) हौज को

$$\frac{4\times6\times8}{6\times8-4\times8-6\times4}=\frac{4\times6\times8}{56}=\frac{24}{7}=3\frac{3}{7}$$ घंटे में भरेंगे।

नोट: इसको निम्नलिखित तरीके से भी हल किया जा सकता है।

$A+B, \frac{4\times6}{4-6}=\frac{12}{5}$ घंटे में भर सकते हैं।

$\therefore$ A+B+C भर सकते हैं $\frac{\frac{12}{5}\times8}{8-\frac{12}{5}}=\frac{12\times8}{28}=\frac{24}{7}=3\frac{3}{7}$ घंटे में।

6. A+B−C हौज को भर सकते हैं।

$$\frac{32\times36\times20}{36\times20+32\times20-32\times36}=\frac{32\times36\times20}{208}=\frac{1440}{13}$$ घंटे में।

$\therefore$ A+B+C आधा हौज को भरते हैं $\frac{720}{13}=55\frac{5}{13}$ घंटे में।

yourmahboob

7. मान लिया कि तेज नल हौज को x घंटे में भरता है। धीमा नल $(x+5)$ घंटे में भरता है।

अब, दोनों नल हौज को $\frac{x(x+5)}{x+x+5}=6$ घंटे में भर सकते हैं:

या, $x^2+5x=12x+30$ या, $x^2-7x-30=0$ $\therefore x=10$ या -3

ऋणात्मक मान को नजरअंदाज करते हैं।

$\therefore$ तेज नल हौज को 10 घंटे में भरता है।

8. $A+B+C$ एक हौज को 6 घंटे में भर सकते हैं .....(1)

$\therefore$ $A+B-C$ हौज का $\frac{1}{3}$ भाग 2 घंटे में भर सकते हैं।

अब, हौज का $\left(1-\frac{1}{3}=\right)\frac{2}{3}$ भाग $(A+B)$ द्वारा 7 घंटे में भरा जाता है।

$\therefore$ $A+B$ हौज को $\frac{7\times3}{2}=\frac{21}{2}$ घंटे में भरते हैं। .....(2)

(1) एवं (2) से, C हौज को

$$\frac{6\times\frac{21}{2}}{\frac{21}{2}-6}=\frac{6\times21}{9}=14 \text{ घंटे में भरता है।}$$

9. भरने वाला नल हौज को $\frac{12\times8}{12-8}=24$ घंटे में भरता है।

$\therefore$ हौज की धारिता $=6\times60\times24=8640$ लिटर

10. दो नल एक हौज को $\frac{10\times15}{10+15}=6$ मिनट में भरते हैं। ..... (1)

दो भरने वाला नल + एक छिद्र हौज को 18 मिनट में भरता है। ..... (2)

$\therefore$ (1) एवं (2) से, छिद्र हौज को खाली करता है $\frac{18\times6}{18-6}=9$ मिनट में।

11. प्रश्न सं. 10 की तरह है।

12 दोनों नल 5 मिनट में भरते हैं; हौज का $\left(\frac{5}{20}+\frac{5}{25}=\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)$ हौज का $\frac{9}{20}$

yoursmahboob

अब, $1-\frac{9}{20}=\frac{11}{20}$ भाग पहला नल से भरा जाता है।

पहला नल हौज का $\frac{11}{20}$ भाग $\frac{11}{20}\times 20=11$ मिनट में भर सकता है।

13. मान लिया कि छिद्र हौज को x घंटे में खाली करता है।

तो, $\frac{8\times x}{x-8}=8+2$

या, $8x=10x-80$ $\therefore x=\frac{80}{2}=40$ घंटे।

द्रुत विधि (Quicker Approach):

चूँकि भरने वाला नल 2 घंटे अधिक लेता है।

$\Rightarrow$ छिद्र 10 घंटे में उतना ही खाली करता है जितना भरने वाला नल 8 घंटे में भरता है।

$\Rightarrow$ छिद्र 10 घंटे में $\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$ खाली करता है (चूँकि भरने वाला नल 8 घंटे में भरता है)

$\Rightarrow$ छिद्र भरे हुए हौज को 40 घंटे में खाली करता है।

सूत्र विधि (Direct Formula):

छिद्र खाली करेगा $\frac{8\times(8+2)}{2}=40$ घंटे में।

नोट: उपर्युक्त सूत्र $\frac{xy}{x-y}$ की तरह ही है। क्योंकि इसे निम्नप्रकार से भी लिखा जा सकता है। $\frac{8\times 10}{10-8}=40$ घंटे।

14. नल X, 18 मिनट तक खुला रहता है

X 18 मिनट में हौज का $\frac{18}{24}=\frac{3}{4}$ भाग भरता है

हौज का शेष $\frac{1}{4}$ भाग Y के द्वारा भरा जाता है $32\left(\frac{1}{4}\right)=8$ मिनट में।

इसलिए Y को 8 मिनट बाद बंद कर देना होगा।

15. यह उत्तर संख्या 9 की तरह ही है।

yoursmahboob

समय और दूरी
(Time and Distance)

सूत्र:

i) चाल = $\frac{\text{दूरी}}{\text{समय}}$

ii) समय = $\frac{\text{दूरी}}{\text{चाल}}$

iii) दूरी = चाल × समय

iv) यदि किसी निकाय की गति a : b के अनुपात में बदल दी जाए तो समान दूरी तय करने में लगा समय b : a के अनुपात में बदल जाता है:

v) x किलोमीटर/घंटा = $\left(x \times \frac{15}{18}\right)$ मीटर/सेकेंड

vi) x मीटर/सेकेंड = $\left(x \times \frac{18}{5}\right)$ किलोमीटर/घंटा

उदा. 1: 18 किलोमीटर/घंटा को चाल को मीटर/सेकेंड में बदलें।

हल: 18 किलोमीटर/घंटा = $\left(18 \times \frac{5}{18}\right)$ मीटर/से. = 5 मीटर/से.

उदा. 2: 10 मी./से. को कि.मी./घंटा में बदलें।

हल: 10 मी./से. = $\left(10 \times \frac{18}{5}\right)$ कि.मी./घंटा = 36 कि.मी./घंटा

प्रमेय: यदि कोई निश्चित दूरी x किलोमीटर/घंटे की गति से तय की जाती है और पुनः वही दूरी y किलोमीटर/घंटे की गति से तय की जाती है तो यात्रा के दौरान औसत चाल = $\frac{2xy}{x+y}$ कि.मी./घंटा

प्रमाण: मान लिया कि दूरी = A किलोमीटर

x किलोमीटर/घंटा की दर से A किलोमीटर की दूरी तय करने में लगा समय = $\frac{A}{x}$ घंटा

y किलोमीटर/घंटा की दर से A किलोमीटर की दूरी तय करने में लगा समय = $\frac{A}{y}$ घंटा

इस प्रकार, कुल दूरी 2A किलोमीटर तय करने में लगा समय = $\left(\frac{A}{x}+\frac{A}{y}\right)$ घंटा

yoursmahboob

$\therefore$ औसत चाल $= \dfrac{2A}{\dfrac{A}{x}+\dfrac{A}{y}} = \dfrac{2Axy}{A(x+y)} = \dfrac{2xy}{x+y}$ कि.मी./घंटा

उदा. 3: कोई व्यक्ति एक निश्चित दूरी 70 किलोमीटर/घंटा की गति से कार से तय करता है तथा वह 55 किलोमीटर/घंटा की रफ्तार से स्कूटर से अपने प्रस्थान बिंदु (Starting Point) पर वापस लौटता है। यात्रा के दौरान उसकी औसत चाल क्या थी ?

हल: औसत चाल $= \dfrac{2\times 70\times 55}{70+55}$ कि.मी./घंटा $= 61.6$ कि.मी. प्रति घंटा

उदा. 4: कोई व्यक्ति घर से दफ्तर की दूरी स्कूटर से तय करता है। यदि वह 30 किलोमीटर/घंटे की औसत रफ्तार से चले तो दफ्तर पहुँचने में 10 मिनट की देर हो जाती है। पर यदि वह 40 किलोमीटर/घंटे की औसत रफ्तार से चले तो दफ्तर समय से 5 मिनट पहले पहुँच जाता है। घर और दफ्तर के बीच की दूरी बताएँ।

हल: मान लिया कि दूरी $= x$ किलोमीटर

30 कि.मी./घंटा की औसत रफ्तार से दूरी तय करने में लगा समय $= \dfrac{x}{30}$ घंटा

40 कि.मी./घंटा की औसत रफ्तार से दूरी तय करने में लगा समय $= \dfrac{x}{40}$ घंटा

लिए गए समय के बीच का अंतर $= 15$ मिनट $= \dfrac{1}{4}$ घंटा

$\therefore \dfrac{x}{30}-\dfrac{x}{40}=\dfrac{1}{4}$ या, $4x - 3x = 30$ या, $x = 30$

$\therefore$ अभीष्ट दूरी $= 30$ किलोमीटर

सूत्र विधि (Direct Formula):

$$\text{अभीष्ट दूरी} = \left(\frac{\text{दोनों चालों का गुणनफल}}{\text{दोनों चालों का अंतर}} \times \text{आगमन समय के बीच का अंतर}\right)$$

प्रदत्त प्रश्न के संदर्भ में,

$$\text{अभीष्ट दूरी} = \frac{30\times 40}{40-30}\times\frac{10+5}{60} = 30 \text{ किलोमीटर}$$

नोट: 10 मिनट की देरी एवं समय से 5 मिनट पूर्व से तात्पर्य है $10 + 5 = 15$ मिनट का अंतर। चूँकि अन्य इकाइयाँ किलोमीटर/घंटा में व्यक्त हैं, इसलिए समय के अंतर को भी 'घंटा' में बदल लिया जाना चाहिए।

द्रुत विधि (Quicker Method):

इस तरह के प्रश्नों को कम समय में हल करने के लिए चाल के अंतर और समय के अंतर को दो कॉलम में लिखें। चाल के अंतर के गुणक और समय के अंतर के गुणक को दो कॉलम में लिखते हैं। क्रस-गुणन दूरी के बराबर होता है।

yourmahboob

चाल का अंतर (कि. मी. प्रति घंटा में)	समय का अंतर (घंटा में)
10	$\frac{1}{4}$ (या 15 मिनट, नोट देखें)
20	$\frac{1}{2}$
30	$\frac{3}{4}$
40	1

चूँकि प्रश्न में 30 कि.मी./घंटा तथा 40 कि.मी./घंटा दो तरह के चाल दिए हुए हैं

$\therefore$ घर से दफ्तर की दूरी 30×1 या $40 \times \frac{3}{4} = 30$ कि. मी.

उदा. 5: 5 किलोमीटर/घंटा की रफ्तार से चलने वाला एक व्यक्ति अपने गंतव्य तक 5 मिनट की देरी से पहुँचता है। यदि वह 6 किलोमीटर/घंटा की रफ्तार से चले तो समय पर पहुँचता है। घर से उसके गंतव्य की दूरी बताएँ।

हल: यह उदा.-4 की तरह है। यहाँ समय का अंतर है मात्र 5 मिनट।

$\therefore$ अभीष्ट दूरी $= \frac{5 \times 6}{6 - 5} \times \frac{5}{60}$

$= \frac{5}{2}$ किलोमीटर $= 2.5$ किलोमीटर

उदा. 6: 10 किलोमीटर/घंटा की रफ्तार से चलने पर एक बच्चा स्कूल 15 मिनट देर से पहुँचता है। अगली बार वह अपनी चाल 2 किलोमीटर/घंटा बढ़ा देता है, फिर भी वह 5 मिनट देर से पहुँचता है। घर से उसके स्कूल की दूरी बताएँ।

हल: यहाँ समय का अंतर $= 15 - 5 = 10$ मिनट $= \frac{1}{6}$ घंटे

अगली यात्रा के दौरान उसकी गति $= 10 + 2 = 12$ कि.मी./घंटा

$\therefore$ अभीष्ट दूरी $= \frac{12 \times 10}{12 - 10} \times \frac{1}{6} = 10$ किलोमीटर

द्रुत विधि (Quicker Method):

चाल का अंतर (कि. मी./घंटा में)	समय का अंतर (घंटा में)
2	$\frac{1}{6}$ (या 10 मिनट)
4	$\frac{2}{6}$

yoursmahboob

6	$\frac{3}{6}$
8	$\frac{4}{6}$
10	$\frac{5}{6}$
12	1

$\therefore$ दूरी $= 10 \times 1$ या $12 \times \frac{5}{6} = 10$ कि. मी.

उदा. 7: एक लड़का 3 किलोमीटर/घंटा की रफ्तार से विद्यालय जाता है और 2 किलोमीटर/घंटा की रफ्तार से पुनः गाँव वापस आ जाता है। यदि उसे कुल मिलाकर 5 घंटे लगते हों तो गाँव एवं विद्यालय के बीच की दूरी बताएँ।

हल: मान लिया कि अभीष्ट दूरी $= x$ किलोमीटर

पहली यात्रा में लगा समय $= \frac{x}{3}$ घंटा एवं

दूसरी यात्रा में लगा समय $= \frac{x}{2}$ घंटा

$\therefore \frac{x}{3} + \frac{x}{2} = 5 \Rightarrow \frac{2x + 3x}{6} = 5 \rightarrow 5x = 30$

$\therefore x = 6$

$\therefore$ अभीष्ट दूरी $= 6$ किलोमीटर

सूत्र विधि (Direct Formula):

$$\text{अभीष्ट दूरी} = \text{कुल समय} \times \frac{\text{दोनों चालों का गुणनफल}}{\text{दोनों चालों का योगफल}}$$

$$\therefore \quad = 5 \times \frac{3 \times 2}{3 + 2} = 6 \text{ किलोमीटर}$$

उदा. 8: कोई मोटरगाड़ी 10 घंटे में यात्रा पूरी करती है। आधी दूरी 21 कि.मी./घंटा की दर से एवं शेष दूरी 24 किलोमीटर/घंटा की दर से। दूरी बताएँ।

हल: यह प्रश्न उदा. 7 की तरह है। यहाँ समीकरण उदा.–7 की तरह सीधे सूत्र का इस्तेमाल नहीं कर सकते हैं। यदि हम उपर्युक्त सूत्र का इस्तेमाल करें तो आधी दूरी ही प्राप्त हो सकेगी। (पर ऐसा क्यों?) सर्वप्रथम विस्तृत विधि देखें।

मान लिया कि तय की गई दूरी $= x$ किलोमीटर

प्रश्नानुसार,

$\frac{x}{2}$ किलोमीटर की दूरी 21 कि.मी./घंटा की रफ्तार से तय की जाती है और शेष $\frac{x}{2}$ कि.

yoursmahboob

मी. 24 कि.मी./घंटे की रफ्तार से तय की जाती है।

$\therefore$ संपूर्ण यात्रा में लगा समय = $\frac{x}{2 \times 21} + \frac{x}{2 \times 24} = 10$ घंटे

$\therefore x = \frac{2 \times 10 \times 21 \times 24}{21 + 24} = 224$ किलोमीटर

सूत्र विधि (Direct Formula):

दूरी = $\frac{2 \times \text{समय} \times S_1 \times S_2}{S_1 + S_2} = 224$

जहाँ, S_1 = शुरू की आधी यात्रा के दौरान चाल, एवं

S_2 = बाद की आधी यात्रा के दौरान चाल

उपर्युक्त प्रश्न के संदर्भ में

दूरी = $\frac{2 \times 10 \times 21 \times 24}{21 + 24} = 224$ किलोमीटर

नोट: *एक निरर्थक हल:* कभी-कभी परीक्षार्थी यह भी सोचते हैं कि चूँकि शुरू की आधी दूरी 21 किलोमीटर/घंटा की रफ्तार से तय की गई, इसलिए तय की गई दूरी = $21 \times (10 \div 2) = 21 \times 5 = 105$ किलोमीटर

एवं इसी तरह बाद की आधी दूरी = $24 \times 5 = 120$ किलोमीटर

$\therefore$ कुल दूरी = $105 + 120 = 225$ किलोमीटर

पर ध्यान रखिए, यहाँ आधी यात्रा से तात्पर्य है, आधी दूरी, न कि आधा समय। इसलिए हल करने का यह तरीका तर्क संगत नहीं है।

उदा. 9: दिल्ली और अमृतसर के बीच की दूरी 450 किलोमीटर है। एक रेलगाड़ी 4 बजे शाम में दिल्ली से चल कर अमृतसर के लिए रवाना होती है। गाड़ी की औसत चाल है 60 कि.मी./घंटा। दूसरी गाड़ी अमृतसर से सायं 5.20 बजे दिल्ली के लिए रवाना होती है। इस गाड़ी की औसत चाल है 80 कि.मी./घंटा। दिल्ली से कितनी दूरी पर ये गाड़ियाँ एक-दूसरे से मिलेंगी और किस समय?

हल: मान लिया कि रेलगाड़ियाँ दिल्ली से x किलोमीटर की दूरी पर मिलती हैं। मान लें कि दिल्ली एवं अमृतसर से चलनेवाली गाड़ियाँ क्रमशः A एवं B हैं।

$\therefore$ (B द्वारा $(450 - x)$ किलोमीटर की दूरी तय करने में लगा समय) − (A द्वारा x किलोमीटर की दूरी तय करने में लगा समय) = $\frac{40}{60}$ ..... (नोट देखें)

$\frac{450 - x}{80} - \frac{x}{60} = \frac{40}{60}$

$\therefore 3(450 - x) - 4x = 160 \Rightarrow 7x = 1190 \Rightarrow x = 170$

$\therefore$ रेलगाड़ियाँ एक-दूसरे से दिल्ली से 170 किलोमीटर की दूरी पर मिलती हैं।

A को 170 किलोमीटर की दूरी तय करने में लगा समय

yoursmahboob

$$= \left(\frac{170}{60}\right) \text{ घंटे} = 2 \text{ घंटा } 50 \text{ मिनट}$$

∴ गाड़ियाँ एक-दूसरे से 6.50 बजे शाम में मिलेंगी।

नोट: दायाँ पक्ष (RHS) = 4.00 बजे शाम − 3.20 बजे शाम

= 40 मिनट

$$= \frac{40}{60} \text{ घंटा}$$

LHS के निर्धारण में इस तथ्य का सहारा लिया गया है कि अमृतसर से चलने वाली रेलगाड़ी ने मिलन-स्थल तक पहुँचने में 40 मिनट अधिक समय लिया, क्योंकि इसने अपनी यात्रा सायं 3.20 बजे ही शुरू कर दी थी, जबकि दिल्ली से चलने वाली गाड़ी ने अपनी यात्रा सायं 4 बजे शुरू की थी। मिलन-बिन्दु पर दोनों रेलगाड़ियाँ एक ही समय में पहुँचती हैं।

उदा. 10: अपनी सामान्य गति (usual speed) के $\frac{3}{4}$ चाल से चलने पर एक व्यक्ति अपने दफ्तर 10 मिनट देर से पहुँचता है। इस दूरी को तय करने में आम तौर से उसे कितना वक्त लगता है?

हल: मान लिया कि आम तौर पर उसे x मिनट लगते हैं; सामान्य गति के $\frac{3}{4}$ चाल से चलने पर लगा समय = $\frac{4x}{3}$ मिनट (सूत्र पाठ के सूत्र-iv से)

$$\therefore \frac{4x}{3} - x = 10 \Rightarrow \frac{x}{3} = 10 \Rightarrow x = 30 \text{ मिनट}$$

सूत्र से (Direct Formula):

$$\text{आम तौर से लिया गया समय} = \frac{\text{विलम्ब किया गया समय}}{\left(1 + \frac{3}{4} - 1\right)}$$

$$= \frac{10}{\left(\frac{4}{3} - 1\right)} = \frac{10}{\frac{1}{3}} = 30 \text{ मिनट}$$

उदा. 11: अपनी सामान्य गति के $\frac{4}{3}$ चाल से चलकर कोई व्यक्ति 10 मिनट पहले पहुँचता है। दूरी तय करने पर आम तौर से कितना समय (usual time) लगता था ?

हल: यह सवाल उदा.-10 से मिलता-जुलता है, पर ठीक वैसा ही नहीं है। इस प्रश्न में गति में वृद्धि होती है और समय घट जाता है। उदा.-10 में ठीक इसका उल्टा था। आप इसे विस्तृत विधि से हल करने का प्रयत्न करें। ऐसे प्रश्नों के लिए सूत्र में बस थोड़ा-सा फर्क आता है।

yoursmahboob

निम्नलिखित सूत्र को देखें:

आम तौर से लगा समय (usual time) $= \dfrac{\text{समय में कमी}}{1 - \text{दर}} = \dfrac{10}{1 - \frac{3}{4}} = 40$ मिनट

नोट: उपर्युक्त दोनों सूत्रों में क्या अंतर है ? ध्यान दीजिए।

उदा. 12: दो व्यक्ति A और B किसी स्थान P से चलना शुरू करते हैं। A की गति है 3 किलोमीटर/घंटा एवं B की गति है 3.5 किलोमीटर/घंटा। 3 घंटे बाद वे एक दूसरे से कितने किलोमीटर की दूरी पर होंगे

i) यदि वे एक दूसरे की विपरीत दिशा में चलते हों?

ii) यदि वे एक ही दिशा में चलते हों?

उन्हें एक दूसरे से 16 किलोमीटर दूर होने में कितना समय लगेगा, यदि

iii) वे विपरीत दिशा में चलें।

iv) यदि वे एक ही दिशा में चलें।

हल: i) यदि वे विपरीत दिशा में चलें तो एक घंटा में उनके बीच का फासला (3 + 3.5) किलोमीटर या 6.5 किलोमीटर हो जाएगा।

$\therefore$ अभीष्ट दूरी $= 6.5 \times 3 = 19.5$ किलोमीटर

ii) यदि वे एक ही दिशा में चलें तो एक घंटा में (3.5 − 3) = 0.5 किलोमीटर की दूरी पर होंगे।

$\therefore$ अभीष्ट दूरी $= 0.5 \times 3 = 1.5$ किलोमीटर

iii) वे 1 घंटा में एक दूसरे से 6.5 किलोमीटर दूर होते हैं।

$\therefore$ अभीष्ट समय $= \dfrac{16}{6.5} = 2\dfrac{6}{13}$ घंटे

iv) एक घंटा में उनके बीच की दूरी = 0.5 किलोमीटर

$\therefore$ अभीष्ट समय $= \dfrac{16}{0.5} = 32$ घंटे

उदा. 13: एक रेलगाड़ी, 25 किलोमीटर प्रति घंटा की रफ्तार से, दिल्ली से 5 बजे पूर्वाह्न (am) रवाना होती है और दूसरी गाड़ी 35 कि.मी./घंटा की रफ्तार से उसी दिशा में 2 बजे अपराह्न (pm) रवाना होती है। दिल्ली से कितने किलोमीटर की दूरी पर ये एक साथ हो जाएँगी?

हल: पहली गाड़ी दूसरी गाड़ी से 25×5 किलोमीटर आगे होगी तथा दूसरी गाड़ी (35 − 25) = 10 कि.मी./घंटा पहली गाड़ी की अपेक्षा ज्यादा तेज चलती है।

$\therefore$ दूसरी गाड़ी को 25×5 कि.मी. की दूरी तय करने में $\dfrac{25 \times 5}{10}$ या $12\dfrac{1}{2}$ घंटे लगेंगे।

$\therefore$ दिल्ली से अभीष्ट दूरी $= \dfrac{25}{2} \times 35$ किलोमीटर $= 437\dfrac{1}{2}$ किलोमीटर

yourshahboob

सूत्र विधि (Direct Formula): यदि आप संक्षिप्त विधि से गणना करने के लिए सूत्र याद रखें, तो बड़ी सुविधा होगी।

प्रस्थान-बिन्दु से मिलन-बिन्दु की दूरी = $\frac{S_1 \times S_2 \times \text{समय का अंतर}}{\text{चाल का अंतर}}$

जहाँ S_1 एवं S_2 क्रमशः पहली एवं दूसरी रेलगाड़ी की चाल है।

उपर्युक्त प्रश्न के संदर्भ में,

अभीष्ट दूरी = $\frac{25 \times 35 \times (2 \text{ बजे अपराह्न} - 9 \text{ बजे पूर्वाह्न})}{35 - 25}$

$= \frac{25 \times 35 \times 5}{10} = 437\frac{1}{2}$ कि.मी.

उदा. 14: दो व्यक्ति A और B क्रमशः 3 एवं 4 किलोमीटर प्रति घंटा की रफ्तार से P एवं Q के बीच की 21 किलोमीटर की लंबी दूरी तय करते हैं। B, Q तक पहुँचता है, तत्क्षण वापस लौटता है और बिन्दु A से बिन्दु R पर उसकी मुलाकात हो जाती है। P एवं R के बीच की दूरी ज्ञात करें।

हल: जब B, A से बिन्दु R पर मिलता है तो वह PQ + QR दूरी तय कर चुका होता है। इतने ही समय में A द्वारा तय की गई दूरी PR के बराबर है। इस प्रकार दोनों ने साथ मिलकर P से Q की दूरी दो बार तय की है। अर्थात् उनके द्वारा तय की गई दूरी = 42 किलोमीटर।

A एवं B के चाल का अनुपात है 3 : 4 और उन्होंने दूरी तय की है 42 किलोमीटर।

∴ A द्वारा तय की गई दूरी PR = 42 का $\frac{3}{7}$ = 18 कि.मी.; उत्तर

सूत्र विधि (Direct Formula): यदि A एवं B की चाल का अनुपात a : b हो तो,

A द्वारा तय की गई दूरी = 2 × दो बिन्दुओं के बीच की दूरी $\left(\frac{a}{a+b}\right)$

तथा B द्वारा तय की गई दूरी = 2 × दो बिन्दुओं के बीच की दूरी $\left(\frac{b}{a+b}\right)$

इस प्रकार A द्वारा तय की गई दूरी (PR) = $2 \times 21 \left(\frac{3}{3+4}\right)$ = 18 किलोमीटर

प्रमेय: यदि दो व्यक्ति A और B, दो भिन्न बिन्दुओं से एक-दूसरे के विपरीत दिशा में, एक ही समय चलना शुरू करते हों और एक-दूसरे को पार करने के बाद क्रमशः a एवं b घंटे में यात्रा तय करते हों तो A की चाल : B की चाल = $\sqrt{b} : \sqrt{a}$

प्रमाण: मान लिया कि कुल दूरी = D किलोमीटर

A की चाल = x किलोमीटर/घंटा तथा

B की चाल = y किलोमीटर/घंटा

चूँकि ये लोग दो भिन्न दिशाओं की ओर चल रहे हैं।

yoursmahboob

$\therefore$ इनका अपेक्षिक वेग = $(x + y)$ किलोमीटर/घंटा

$\therefore$ ये लोग $\frac{D}{x+y}$ घंटे बाद मिलेंगे।

$\frac{D}{x+y}$ घंटे में A द्वारा तय की गई दूरी = $PO = \frac{Dx}{x+y}$ किलोमीटर

तथा, B द्वारा $\left(\frac{D}{x+y}\right)$ घंटे में तय की गई दूरी = $QO = \frac{Dy}{x+y}$ किलोमीटर

अब चूँकि A, QO दूरी A घंटे में तय करता है

$\therefore$ उसकी चाल = $\frac{Dy}{(x+y)a}$

इसी तरह, B, PO दूरी b घंटे में तय करता है।

$\therefore$ उसकी चाल = $\frac{Dx}{(x+y)b}$

अब उनकी चाल का अनुपात = $x : y = \frac{Dy}{(x+y)A} : \frac{Dx}{(x+y)B}$

या, $\frac{x}{y} = \frac{Dy}{(x+y)a} + \frac{Dx}{(x+y)b}$

या, $\frac{x}{y} = \frac{Dy}{(x+y)a} \times \frac{(x+y)b}{Dx}$

या, $\frac{x}{y} = \frac{y}{x} \times \frac{b}{a}$

या, $\frac{x^2}{y^2} = \frac{b}{a}$

$\therefore \frac{x}{y} = \sqrt{\frac{b}{a}}$

$\therefore x : y = \sqrt{b} : \sqrt{a}$

इस प्रकार यह प्रमेय सिद्ध होता है।

उदा. 15: एक व्यक्ति दिल्ली से रोहतक के लिए साइकिल पर सवार होकर रवाना होता है, दूसरा व्यक्ति ठीक उसी समय साइकिल से ही रोहतक से दिल्ली के लिए रवाना होता है। एक दूसरे को पार करने के बाद वे अपनी यात्रा क्रमशः $3\frac{1}{3}$ एवं $4\frac{4}{5}$ घंटे में पूरी करते हैं। यदि पहले व्यक्ति के साइकिल की गति 8 किलोमीटर प्रति घंटा थी तो दूसरे व्यक्ति के साइकिल की गति बताएँ।

yoursmahboob

हल: यदि दो व्यक्ति या गाड़ियाँ एक ही समय एक दूसरे की विपरीत दिशा में, दो भिन्न बिन्दुओं से रवाना होती हैं तथा एक दूसरे से मिलने के क्रमशः a एवं b घंटे बाद अपने गंतव्य पर पहुँचती हों तो A की चाल : B की चाल = $\sqrt{b} : \sqrt{a}$ (प्रमेय से)

दिए गए प्रश्न के संदर्भ में,

$$\frac{\text{पहले व्यक्ति की चाल}}{\text{दूसरे व्यक्ति की चाल}} = \frac{\sqrt{4\frac{4}{5}}}{\sqrt{3\frac{1}{3}}} = \frac{5}{6}$$

$\therefore$ दूसरे व्यक्ति की चाल = $\frac{5}{6} \times 8 = 6\frac{2}{3}$ कि.मी./घंटा

बंदूक की आवाज (Report of Guns)

उदा. 16: 13 मिनट की अंतराल से दो बंदूकें चलाई जाती हैं। परन्तु रेलगाड़ी में सवार कोई व्यक्ति पहली गोली चलने के 12 मिनट 30 सेकेंड बाद दूसरी गोली की आवाज सुनता है। यदि ध्वनि का वेग 330 मी./सेकेंड हो तो गाड़ी की चाल क्या थी?

हल: यह तय करना बड़ा आसान है कि गाड़ी द्वारा 12 मिनट 30 सेकेंड में तय की गई दूरी ध्वनि द्वारा (13 मिनट − $12\frac{1}{2}$ मिनट) = 30 सेकेंड में तय की जाती है।

$\therefore$ गाड़ी $12\frac{1}{2}$ मिनट में 330 × 30 मीटर चलती है।

$\therefore$ गाड़ी की चाल प्रति घंटा = $\frac{330 \times 30 \times 2 \times 60}{25 \times 1000} = \frac{1188}{25}$

या, $47\frac{13}{25}$ किलोमीटर/घंटा

कुहासे में गाड़ी चलाना (Carriage Driving in Fog)

उदा. 17: कुहासे में चलती हुई कोई गाड़ी उसी दिशा में 3 किलोमीटर प्रति घंटा की चाल से चल रहे व्यक्ति को पार कर जाती है। वह इस गाड़ी को 4 मिनट तक देख सकता है और यह गाड़ी उसे 100 मीटर की दूरी तक दिखाई देती रही। गाड़ी की गति क्या थी ?

हल: 4 मिनट में व्यक्ति द्वारा तय की गई दूरी = $\frac{3 \times 1000}{60} \times 4 = 200$ मीटर

गाड़ी द्वारा 4 मिनट में तय की गई दूरी = 200 + 100 = 300 मीटर

$\therefore$ गाड़ी की गति = $\frac{300}{4} \times \frac{60}{1000}$ कि.मी./घंटा = $4\frac{1}{2}$ कि.मी./घंटा; उत्तर

yoursmaboob

उदा. 18: कोई बंदर 14 मीटर ऊँचे चिकने खंभे पर चढ़ने की कोशिश करता है। पहले मिनट में वह 2 मीटर ऊपर चढ़ता है और दूसरे मिनट में वह 1 मीटर नीचे खिसक जाता है। यदि बंदर इसी तरह से चढ़ता रहे तो उसे शिखर पर पहुँचने में कितना वक्त लगेगा ?

हल: प्रत्येक 2 मिनट की अंतराल में बंदर (2–1) = 1 मीटर ऊपर चढ़ जाता है। इस विधि से वह 12 मीटर की ऊँचाई तक चढ़ता है, क्योंकि इसके अगले मिनट में वह शिखर तक जा पहुँचता है और फिसलने की कोई गुंजाइश ही नहीं रहती। इस प्रकार पहले 12 मीटर की ऊँचाई तक पहुँचने में उसे 12 × 2 = 24 मिनट लगते हैं तथा अंतिम 2 मीटर की ऊँचाई तय करने में मात्र 1 मिनट का वक्त लगता है। इसलिए खंभे के शिखर तक पहुँचने में उसे (24 + 1) = 25 मिनट का वक्त लगता है। अर्थात् 26वें मिनट में बंदर शिखर पर होगा।

द्रुत विधि (Quicker Method):

इस प्रकार के प्रश्न के लिए द्रुत विधि ज्ञात करने का प्रयास करते हैं।

उपर्युक्त प्रश्न में एक बंदर चिकने खंभे पर चढ़ने का प्रयास कर रहा है। यदि वह पहले मिनट में कुछ दूरी खंभे पर चढ़ता है तथा दूसरे मिनट में कुछ दूरी नीचे खिसक जाता है तो ऊपर चढ़ने एवं नीचे उतरने का अपवर्त्य (multiple)

$$= \left[\frac{(\text{खंभे की लंबाई}) - (\text{बंदर द्वारा पहले मिनट में ऊपर चढ़ी गई दूरी})}{(\text{बंदर द्वारा पहले मिनट में ऊपर चढ़ी गई दूरी}) - (\text{बंदर द्वारा दूसरे मिनट में नीचे फिसली गई दूरी})}\right]$$

अब निम्नलिखित स्थितियों पर विचार करें:

स्थिति I: यदि परिणाम एक पूर्ण संख्या हो (whole number) तो पूर्णांक ही अपवर्त्य (multiple) होगा तथा अभीष्ट उत्तर = 2 × अपवर्त्य + 1

उपर्युक्त प्रश्न का हल

$$\text{अपवर्त्य} = \frac{14-2}{2-1} = 12 \quad (\text{एक पूर्णांक है})$$

$\therefore$ अभीष्ट उत्तर = 2 × 12 + 1 = 25 मिनट

स्थिति II: यदि परिणाम एक पूर्णांक नहीं हो अर्थात् भिन्न (fraction) हो तो उस भिन्न का पूर्ण संख्या (whole number) ही अपवर्त्य होगा तथा अभीष्ट उत्तर

$$= \left[2 \times \text{अपवर्त्य} + \frac{\text{खंभे की लंबाई} - \left\{\left(\begin{array}{c}\text{बंदर द्वारा पहले मिनट में}\\ \text{ऊपर चढ़ी गई दूरी}\end{array}\right) - \left(\begin{array}{c}\text{बंदर द्वारा दूसरे मिनट में}\\ \text{नीचे फिसली गई दूरी}\end{array}\right)\right\} \times \text{अपवर्त्य}}{\text{बंदर द्वारा पहले मिनट में ऊपर चढ़ी गई दूरी}}\right]$$

उदाहरण के लिए,

उदा.-18 (a): एक बंदर 92 मीटर ऊँचे एक चिकने खंभे पर ऊपर चढ़ने की कोशिश करता है। पहले मिनट में वह 10 मीटर ऊपर चढ़ता है तथा दूसरे मिनट में 1 मीटर नीचे खिसक जाता है. यदि वह इस तरह ऊपर चढ़ता रहे तो कितने समय में खंभे के शीर्ष पर पहुँच जाएगा?

हल: $\text{अपवर्त्य} = \frac{92-10}{10-1} = \frac{82}{9} = 9\frac{1}{9}$ (भिन्न है)

yoursmahboob

$\therefore$ यहाँ पर अपवर्त्य $9\frac{1}{9}$ का पूर्ण संख्या $(9+1=)10$ होगा।

$\therefore$ अभीष्ट उत्तर $= 2\times10+\frac{92-(10-1)\times10}{10} = 20+\frac{1}{5} = 20$ मिनट 12 सैकेंड

नोट: इसे विस्तृत विधि (Detail Method) से हल करने का प्रयत्न स्वयं करें।

एक और उदाहरण देखें:

उदा. 18(b): एक घोंघा (snail) रात में 12 घंटे में 4.2 मीटर ऊँची एक खंभे पर 31 सेंटीमीटर ऊपर चढ़ता है तथा दिन में 12 घंटे में 16 सेंटीमीटर फिसल जाता है। खंभे के शीर्ष पर पहुँचने में उसे कितना वक्त लगेगा?

हल: पहले हम इसे विस्तार विधि से हल करेंगे:

***विस्तार विधि* (Detail Method):**

खंभे की लंबाई $= 420$ से.मी.

24 घंटे में घोंघा (snail) $(31-16)$ से. मी. या 15 से. मी. ऊपर चढ़ता है।

इसलिए (24×26) घंटे में घोंघा $(15\times26=)390$ से.मी. ऊपर चढ़ता है।

इसलिए $(420-390=)30$ से.मी. और बचे हैं जिसे घोंघे को तय करनी है। वह 12 घंटे में 31 से.मी. चलता है इसलिए 30 से.मी. $\frac{12\times30}{31}$ घंटे में।

$\therefore$ वह शीर्ष पर पहुँचता है $\left(24\times26+\frac{12\times30}{31}\right) = 635\frac{19}{31}$ घंटे में

नोट: दिनों की संख्या 26 इसलिए लिया गया है ताकि (420 से.मी. − 15 से.मी. × 26) 31 से. मी. के बराबर हो या उससे ठीक कम हो।

अब हम इसे द्रुत विधि से हल करने की कोशिश करते हैं:

***द्रुत विधि* (Quicker Method):**

अपवर्त्य $= \frac{4.2-0.31}{0.31-0.16} = \frac{389}{15} = 25\frac{14}{15} \approx 26$

यहाँ स्थिति II लागू होता है।

$\therefore$ अभीष्ट उत्तर $= 12\left[2\times26+\frac{4.2-(0.31-0.16)\times26}{0.31}\right]$

$= 24\times26+\frac{12\times30}{31} = 635\frac{19}{31}$ घंटा

नोट: यहाँ ऊपर चढ़ने एवं नीचे उतरने के समय में 12 घंटे का अंतर है इसलिए हमने प्रदत्त सूत्र में 12 से गुणा किया है। आशा करते हैं कि आप द्रुत विधि को पूरी तरह से समझ चुके होंगे।

उदा. 19: दो धावक समान दूरी को क्रमशः 15 एवं 16 किलोमीटर प्रति घंटा की रफ्तार से तय करते

yousmahboob

है। दोनों द्वारा तय की गई दूरी बताएँ, यदि एक की अपेक्षा दूसरे को 16 मिनट अधिक समय लगता हो।

हल: मान लिया कि दूरी = x किलोमीटर

पहले धावक को लगा समय = $\frac{x}{15}$ घंटे।

दूसरे धावक को लगा समय = $\frac{x}{16}$ घंटे।

अब, $\frac{x}{15}-\frac{x}{16}=\frac{16}{60}$

या, $\frac{x(16-15)}{15\times16}=\frac{16}{60}$

$\therefore\ x=\frac{16}{60}\times15\times16=64$ किलोमीटर

सूत्र विधि (Direct Formula):

$$\text{दूरी} = \frac{\text{चालों का गुणनफल}}{\text{चालों का अंतर}}\times\text{दूरी तय करने में लगा समय का अंतर}$$

उपर्युक्त प्रश्न के संदर्भ में,

दूरी = $\frac{15\times16}{16-15}\times\frac{16}{60}=64$ किलोमीटर

उदा. 20: दो कार क्रमशः 45 किलोमीटर/घंटा एवं 60 किलोमीटर/घंटा की चाल से किसी गंतव्य की ओर रवाना होती हैं। यदि दूसरे कार को पहले कार की तुलना में 5 घंटा कम समय लगता हो तो यात्रा में तय की गई दूरी बताएँ।

हल: यह उदा. 19 से मिलता-जुलता सवाल है। अंतर केवल इतना है कि पिछले सवाल में पहले को दूसरे की अपेक्षा कम समय लगता है, जबकि यहाँ स्थिति इसके विपरीत है। पर इससे कोई फर्क नहीं पड़ता क्योंकि दोनों एक ही कथन के भिन्न रूप हैं। 'पहले को दूसरे की तुलना में 5 घंटा कम समय लगता है' से तात्पर्य है कि 'दूसरे को पहले की तुलना में 5 घंटा अधिक समय लगता है'। इसलिए उपर्युक्त सूत्र का प्रयोग यहाँ भी हो सकता है।

$\therefore$ दूरी = $\frac{45\times60}{60-45}\times5=900$ किलोमीटर

द्रुत विधि (Quicker Method):

चाल का अंतर (कि.मी./घंटा में)	समय का अंतर (घंटा में)
15	5
30	10
45	15
60	20

yoursmahboob

∴ यात्रा में तय की गई दूरी $= 45 \times 20$ या $60 \times 15 = 900$ कि.मी.

उदा. 21: एक व्यक्ति को एक खास जगह तक पैदल जाने में एवं मोटरबाइक से वापस लौटने में 8 घंटा लगता है। यदि वह व्यक्ति दोनों तरफ की दूरी को तय करने में बाइक का प्रयोग करता तो 2 घंटे की बचत होती। यदि वह संपूर्ण यात्रा पैदल ही पूरी करे तो उसे कितना वक्त लगेगा?

हल: पैदल चलने में लगा वक्त + बाइक से यात्रा में लगा वक्त = 8 घंटे ..... (1)

$2 \times$ बाइक से यात्रा में लगा वक्त $= 8 - 2 = 6$ घंटा ..... (2)

$2 \times (1) - (2)$ से,

$2 \times$ पैदल चलने में लगा वक्त $= 2 \times 8 - 6 = 10$ घंटे

इस प्रकार दोनों ओर की यात्रा पैदल चलकर पूरी करने में 10 घंटे लगेंगे।

***द्रुत विधि* (Quicker Method):** दोनों तरफ की यात्रा बाइक से तय करने पर 2 घंटे की बचत होती है। इसका सीधा तात्पर्य यह है कि एक तरफ की यात्रा बाइक से तय करने में पैदल की अपेक्षा 2 घंटे की बचत होती है। इससे यह भी अर्थ निकलता है कि पैदल यात्रा (एक तरफ) में बाइक से यात्रा की अपेक्षा 2 घंटे अधिक लगते हैं। इस तरह दोनों तरफ की यात्रा पैदल पूरी करने पर $8 + 2 = 10$ घंटे लगेंगे।

∴ **सूत्र:**

दोनों तरफ की पैदल यात्रा = एक तरफ की पैदल यात्रा एवं एक तरफ की बाइक से यात्रा + समय की बचत = $8 + 2 = 10$ घंटे।

उदा. 22: एक व्यक्ति को अपने गंतव्य तक पैदल पहुँचने और वहाँ से बाइक से वापस लौटने में कुल मिलाकर 12 घंटे लगते हैं। यदि वह दोनों तरफ की यात्रा पैदल पूरी करे तो उसे 3 घंटे अधिक लगते हैं। दोनों तरफ की यात्रा बाइक से पूरी करने में उसे कितना समय लगेगा?

हल: ***द्रुत विधि से:*** $(12 - 3) = 9$ घंटे

नोट: द्रुत विधि की प्रक्रिया उदा. 21 के अनुरूप है। इसे परिभाषित करने की कोशिश कीजिए।

उदा. 23: दिल्ली से पटना के लिए दो गाड़ियाँ क्रमशः पूर्वाह्न (am) 10.00 बजे एवं 10.30 बजे चलती हैं। इनकी रफ्तार क्रमशः 60 किलोमीटर प्रति घंटा एवं 75 किलोमीटर प्रति घंटा है। दिल्ली से कितने किलोमीटर की दूरी पर ये एक-दूसरे के साथ हो लेंगी ?

हल: उदा.-13 में इस्तेमाल किए गए सूत्र प्रयोग में लाएँ:

$$\text{मिलन बिन्दु की दूरी} = \frac{60 \times 75}{75 - 60}(10.30 \text{ पूर्वाह्न} - 10 \text{ पूर्वाह्न})$$

$$= \frac{60 \times 75}{15}\left(\frac{30}{60}\right) = 150 \text{ कि.मी.}$$

उदा. 24: एक व्यक्ति बिन्दु P से प्रातः 6 बजे रवाना होता है और प्रातः 10 बजे बिन्दु Q पर पहुँचता है। दूसरा व्यक्ति बिन्दु Q से 8 बजे प्रातः रवाना होता है और बिन्दु P पर दिन के 12 बजे पहुँचता है। वे दोनों व्यक्ति आपस में कब मिलेंगे ?

हल: मान लिया कि दूरी PQ = A किलोमीटर

और वे पहले व्यक्ति के चलने के x घंटे बाद मिलते हैं।

yoursmahboob

पहले व्यक्ति की औसत चाल = $\frac{A}{10-6} = \frac{A}{4}$ किलोमीटर/घंटा

दूसरे व्यक्ति की औसत चाल = $\frac{A}{12-8} = \frac{A}{4}$ किलोमीटर/घंटा

∴ पहले व्यक्ति द्वारा तय की गई दूरी = $\frac{Ax}{4}$ किलोमीटर

पहले व्यक्ति के प्रारम्भ करने के x घंटे बाद वे मिलते हैं। दूसरा व्यक्ति जो कि दो घंटे बाद चलना शुरू करता है, अपने प्रारंभ करने के $(x-2)$ घंटे बाद पहले व्यक्ति से मिलता है।

∴ दूसरे व्यक्ति द्वारा तय की गई दूरी = $\frac{A(x-2)}{4}$ किलोमीटर

अब, $\frac{Ax}{4} + \frac{A(x-2)}{4}$ किलोमीटर = **A**

या, $2x - 2 = 4$

$\therefore x = 3$ घंटे

वे, 6 बजे + 3 घंटा = प्रातः 9 बजे मिलेंगे।

द्रुत विधि (Quicker Method): चूँकि दोनों व्यक्तियों को दूरी तय करने में समान समय 4 घंटा लगता है। इसलिए उनके मिलने का समय 6 बजे प्रातः एवं दोपहर 12 बजे के ठीक मध्य में अर्थात् प्रातः 9 बजे होगा। पर यदि उन्हें यह दूरी तय करने में भिन्न-भिन्न समय लगता हो तो निम्नलिखित सूत्र बड़ा कारगर सिद्ध होता है:

उनके मिलने का समय = (पहले का प्रस्थान करने का समय) +

$$\left[\frac{(\text{पहला द्वारा लिया गया समय})(\text{दूसरे का आगमन समय} - \text{पहले का प्रस्थान करने का समय})}{(\text{दोनों द्वारा लिए गए समय का योग})}\right]$$

$$= 6 \text{ पूर्वाह्न} + \frac{(10.00-6.00)(12.00-6.00)}{(10.00-6.00)+(12.00-8.00)}$$

$$= 6 \text{ पूर्वाह्न} + \frac{4\times 6}{4+4} = 9 \text{ बजे पूर्वाह्न}$$

यह सूत्र निम्नलिखित उदाहरण में ज्यादा उपयोगी है।

उदा. 25: एक रेलगाड़ी पटना से प्रातः 5 बजे रवाना होती है और दिल्ली प्रातः 9 बजे पहुँचती है। दूसरी गाड़ी दिल्ली से प्रातः 6.30 बजे रवाना होती है और प्रातः 10 बजे पटना पहुँचती है; दोनों गाड़ियाँ एक दूसरे से किस समय मिलेंगी?

yoursmahboob

हल: **सूत्र से (Direct Formula):**

गाड़ियों के मिलने का समय = 5 बजे प्रातः $+\frac{(9.00-5.00)(10.00-5.00)}{(9.00-5.00)+(10.00-6.30)}$

= 5 बजे प्रातः $+\frac{4\times5}{7.5}$ घंटे = 5 बजे प्रातः $+2\frac{2}{3}$ घंटे

= 7.40 बजे प्रातः

नोट: $(10.00-6.30)=3.30=3\frac{1}{2}$ घंटे = 3.5 घंटे

उदा. 26: किसी व्यक्ति को 80 किलोमीटर की दूरी 10 घंटे में तय करनी है। यदि वह आधी यात्रा $\frac{3}{5}$ समय में पूरी कर ले तो शेष दूरी किस गति से तय करे ताकि बचे हुए समय में वह शेष दूरी तय कर सके?

हल: बची हुई दूरी = $80\left(1-\frac{1}{2}\right)=40$ किलोमीटर

बचा हुआ समय = $10\left(1-\frac{3}{5}\right)=4$ घंटे

$\therefore$ अभीष्ट चाल = $\frac{40}{4}=10$ किलोमीटर/घंटा

उदा. 27: यदि कोई व्यक्ति 45 किलोमीटर/घंटा की औसत रफ्तार से चले तो दी गई दूरी 40 मिनट में तय कर लेता है। वह किस रफ्तार से चले ताकि यात्रा 30 मिनट में ही पूरी कर सके ?

हल: प्रमेय: चाल और लिया गया समय एक दूसरे के व्युत्क्रमानुपाती होते हैं:

$\therefore S_1T_1=S_2T_2=S_3T_3$ .....

जहाँ S_1, S_2, S_3 ..... आदि चाल हैं; एवं T_1, T_2, T_3 ..... आदि गंतव्य तक पहुँचने में लगा समय है।

$\therefore$ उपर्युक्त प्रश्न के संदर्भ में,

$45\times40=S_2\times30$

$\therefore S_2=\frac{45\times40}{30}=60$ कि.मी./घंटा

उदा. 28: यदि राह में कोई रुकावट न आए तो कोई व्यक्ति एक खास दूरी 80 कि.मी./घंटा की औसत रफ्तार से तय करता है। रुकावट की स्थिति में वह उतनी ही दूरी 60 किलोमीटर प्रति घंटे की औसत रफ्तार से तय करता है। वह प्रति घंटा कितने मिनट रुकता है ?

हल: मान लिया कि कुल दूरी = x किलोमीटर

80 किलोमीटर/घंटा की रफ्तार से लगा समय = $\frac{x}{80}$ घंटा

yoursmahboob

60 किलोमीटर/घंटा की रफ्तार से लगा समय = $\frac{x}{60}$ घंटा

∴ उसने $\left(\frac{x}{60}-\frac{x}{80}\right)$ घंटे विश्राम किया।

$\left(\frac{x}{60}-\frac{x}{80}\right)=\frac{20x}{60\times 80}=\frac{x}{240}$ घंटे

∴ प्रति घंटे विश्राम की अवधि = $\frac{x}{240}\div\frac{x}{60}$

$=\frac{x}{240}\times\frac{60}{x}=\frac{1}{4}$ घंटा = 15 मिनट

सूत्र (Direct Formula):

प्रति घंटा विश्राम की अवधि = $\frac{\text{चालों का अंतर}}{\text{बिना रुकावट के चाल}}$

$=\frac{80-60}{80}=\frac{1}{4}$ घंटा = 15 मिनट

उदा. 29: एक व्यक्ति 4 घंटे में 360 किलोमीटर की दूरी तय करता है, कुछ दूरी वायुयान से और कुछ दूरी रेलगाड़ी से। यदि उसने संपूर्ण दूरी वायुयान से तय की होती तो उसने गाड़ी में बिताए गए समय का $\frac{4}{5}$ बचा लिया होता और अपने गंतव्य पर 2 घंटा पहले पहुँच गया होता। उसने वायुयान एवं रेलगाड़ी से क्रमशः कितनी दूरियाँ तय की?

हल: रेलगाड़ी में बिताए गए समय का $\frac{4}{5}$ = 2 घंटे

∴ रेलगाड़ी में बिताया गया कुल समय = $\left(\frac{2\times 5}{4}=\right)\frac{5}{2}$ घंटे

∴ वायुयान में बिताया गया कुल समय = $\left(4-\frac{5}{2}=\right)\frac{3}{2}$ घंटे

प्रश्नानुसार, यदि संपूर्ण दूरी (360 कि.मी.) वायुयान से ही तय की जाए तो लिया गया समय

= (4 − 2 =) 2 घंटा

जब, वायुयान में $\frac{3}{2}$ घंटा बिताया जाता है तो तय की गई दूरी

$=\left(\frac{360}{2}\times\frac{3}{2}=\right)$ 270 किलोमीटर

∴ रेलगाड़ी द्वारा तय की गई दूरी = (360 − 270 =) 90 किलोमीटर

yourexamboob

उदा. 30: कोई व्यक्ति एक निश्चित दूरी 25 किलोमीटर/घंटा की रफ्तार से चल रही रेलगाड़ी से तय करता है और 4 किलोमीटर प्रति घंटा की चाल से पैदल चलता हुआ वापस लौट आता है। संपूर्ण यात्रा में 5 घंटा 48 मिनट का समय लगा। उसने रेलगाड़ी से कितनी दूरी तय की?

हल: मान लिया कि अभीष्ट दूरी = x किलोमीटर

रेलगाड़ी से गमन करने में लगा समय = $\frac{x}{25}$ घंटे

पैदल यात्रा करने में लगा समय = $\frac{x}{4}$ घंटे

$\therefore \frac{x}{25} + \frac{x}{4} = 5$ घंटे 48 मिनट

या, $\frac{29x}{100} = 5\frac{48}{60} = \frac{29}{5}$

$\therefore x = \frac{100}{5} = 20$ कि.मी.

सूत्र विधि (Direct Formula):

दूरी = कुल समय × $\frac{\text{दोनों चालों का गुणनफल}}{\text{चालों का योगफल}}$

उपर्युक्त प्रश्न के संदर्भ में

दूरी = $5\frac{48}{60} \times \frac{25 \times 4}{25 + 4} = \frac{29}{5} \times \frac{25 \times 4}{29} = 20$ कि.मी.

नोट: यह उदाहरण उदा. 19, उदा.-20 एवं उदा.-21 से भिन्न प्रकार का है, क्योंकि यहाँ दोनों तरफ की यात्रा में लगनेवाला कुल समय दिया गया है, जबकि पहले उदाहरणों में दोनों तरफ की यात्रा में लगने वाले समय का अंतर दिया हुआ है। इसी के अनुसार, सूत्र में हर बदल जाता है। इस अंतर को सावधानीपूर्वक देखें तथा कारण समझने की कोशिश करें। अन्यथा, अभ्यास के समय धोखा हो सकता है।

उदा. 31: एक हवाई जहाज अपने गंतव्य से 1500 कि.मी. दूर एक स्थान से निर्धारित समय से 30 मिनट देर से उड़ान भरता है। निर्धारित समय पर गंतव्य पर पहुँचने के लिए चालक को हवाई जहाज की गति में 250 कि.मी. प्रति घंटा की वृद्धि करनी पड़ती है। यात्रा की औसत हवाई जहाज की गति प्रति घंटा क्या थी?

हल: ***विस्तार विधि* (Detail Method):**

माना कि दूसरी स्थिति में यह x घंटा लेता है।

तो, चाल = $\frac{1500}{x} = \frac{1500}{x + \frac{1}{2}} + 250$

yoursmahboob

या, $\dfrac{1500(x+\frac{1}{2})-1500x}{x(x+\frac{1}{2})}=250$

या, $750-250x\left(x+\frac{1}{2}\right)$

या, $x^2-\frac{x}{2}-3=0$

या, $2x^2+x-6=0$

या, $2x^2+4x-3x-6=0$

या, $x(2x-3)+2(2x-3)=0$

या, $(x+2)(2x-3)=0$

$\therefore x=-2, \frac{3}{2}$

इसलिए, हवाई जहाज दूसरी स्थिति में $\frac{3}{2}$ घंटा लेता है। अर्थात, सामान्य स्थिति में $\frac{3}{2}+\frac{1}{2}=2$ घंटा लेता है।

$\therefore$ सामान्य गति $=\frac{1500}{2}=750$ कि. मी./घंटा

द्रुत विधि (Quicker Method):

कम समय		गति में वृद्धि
$\frac{1}{2}$	:	250
1	:	500
$\frac{3}{2}$	:	750
2	:	1000
$\frac{5}{2}$	:	1250

दी हुई सूचना को हम दो कॉलम में ऊपर की तरह व्यवस्थित करते हैं। यह अनुपात तब तक चलता रहता है जब तक हम इस प्रकार के दो अनुपात नहीं प्राप्त कर लेते जिसमें उनके क्रस-गुणनफल (cross-product) दो बिन्दुओं के बीच की दूरी के बराबर हों

yoursmahboob

इस प्रकार हम निम्नलिखित उत्तर पाते हैं: 1000 कि.मी. प्रति घंटा की गति से हवाई जहाज $\frac{3}{2}$ घंटा लेता है एवं 750 कि. मी./घंटा की गति से हवाई जहाज 2 घंटा लेता है।

∴ सामान्य गति = 750 कि.मी./घंटा

उदा. 32: एक हवाई जहाज अपने गंतव्य से 1200 कि.मी. दूर किसी स्थान से अपने निर्धारित समय से 2 घंटे देर से उड़ान भरती है। गंतव्य पर निर्धारित समय पर पहुँचने के लिए चालक को गति में 200 कि.मी. प्रति घंटा की वृद्धि करनी पड़ी। सामान्य स्थिति में हवाई जहाज की गति प्रति घंटा क्या थी?

हल:

कम समय		गति में वृद्धि
1	:	200
2	:	400
3	:	600

इस प्रकार सामान्य समय = 3 घंटा एवं सामान्य गति = 400 कि.मी. प्रति घंटा

उदा. 33: एक रेलगाड़ी 6 मिनट देर थी। चालक ने गाड़ी की गति में 4 कि.मी. प्रति घंटा की वृद्धि की। 36 कि.मी. दूर दूसरे स्टेशन पर गाड़ी समय पर पहुँचती है। गाड़ी की प्रारंभिक गति ज्ञात करें।

हल: यदि आप इसे विलोम विधि से हल करते हैं तो आपको एक द्विघातीय समीकरण (Quadratic Equation) प्राप्त होगा। परंतु उपर्युक्त-वर्णित विधि की सहायता से आप इसे बहुत ही आसानी से हल कर सकते हैं।

कम समय		गति में वृद्धि
$\frac{1}{10}$ घंटा	:	4 कि. मी. प्रति घंटा
$\frac{2}{10}$ घंटा	:	8 कि. मी. प्रति घंटा
$\frac{3}{10}$ घंटा	:	12 कि. मी. प्रति घंटा
$\frac{9}{10}$ घंटा	:	36 कि. मी. प्रति घंटा
1 घंटा	:	40 कि. मी. प्रति घंटा

इस प्रकार सामान्य गति 36 कि.मी. प्रति घंटा है।

उदा. 34: जब एक व्यक्ति बराबर दूरी 'V_1' एवं 'V_2' कि.मी. प्रति घंटा की चाल से तय करता है तो उसकी औसत चाल 4 कि.मी. प्रति घंटा है। परंतु जब वह इन चालों से बराबर समय के लिए चलता है तो उसकी औसत चाल 4.5 कि.मी. प्रति घंटा है। दोनों चालों में अंतर ज्ञात करें।

yoursmahboob

हल: ***विस्तार विधि* (Detail Method) :**

माना कि बराबर दूरी = D कि.मी.

V_1 एवं V_2 चाल से लिया गया समय क्रमशः

$\frac{D}{V_1}$ घंटा एवं $\frac{D}{V_2}$ घंटा है।

$$\therefore \text{ औसत चाल} = \frac{\text{कुल दूरी}}{\text{कुल समय}} = \frac{2D}{\frac{D}{V_1}+\frac{D}{V_2}}$$

$$= \frac{2V_1V_2}{V_1+V_2} = 4 \text{ कि. मी./घंटा}$$

दूसरी स्थिति में,

$$\text{औसत चाल} = \frac{V_1+V_2}{2} = 4.5 \text{ कि. मी./घंटा}$$

अर्थात् $V_1 + V_2 = 9$ एवं $V_1V_2 = 18$

अब, $(V_1-V_2)^2 = (V_1+V_2)^2 - 4V_1V_2$

$= 81 - 72 = 9$

$\therefore V_1 - V_2 = 3$ कि. मी./घंटा

***सूत्र विधि* (Direct Formula):**

$$V_1 - V_2 = \sqrt{4(4.5)(4.5-4)} = 3 \text{ कि. मी./घंटा}$$

नोट : आपसे दोनों चालों को भी निकालने के लिए पूछा जा सकता है। उन्हें ज्ञात करें।

उदा. 35: एक व्यक्ति 40 कि.मी. प्रति घंटा की चाल से 3 घंटे तक चलता है तथा 60 कि.मी./घंटा की चाल से 4.5 घंटा चलता है। इसके अंत में वह पाता है कि वह कुल दूरी का $\frac{3}{5}$ हिस्सा तय कर चुका है। शेष दूरी को 4 घंटे में तय करने के लिए उसकी औसत चाल क्या होनी चाहिए?

हल: (3 + 4.5) घंटे में तय की गई कुल दूरी $= 3 \times 40 + 4.5 \times 60 = 390$ कि.मी.

अब, चूँकि दूरी का $\frac{3}{5} = 390$ कि. मी.

$\therefore$ दूरी का $\frac{2}{5} = 390 \times \frac{5}{3} \times \frac{2}{5} = 260$ कि.मी.

$\therefore$ शेष दूरी के लिए औसत चाल $= \frac{260}{4} = 65$ कि.मी./घंटा

yoursmahboob

सूत्र विधि (Direct Formula):

शेष दूरी के लिए औसत चाल

$$= \frac{(R_1T_1 + R_2T_2)\left(\frac{1}{f} - 1\right)}{T}$$

$$= \frac{(40\times3+60\times4.5)\left(\frac{5}{3}-1\right)}{4} = \frac{390\times2}{4\times3} = 65 \text{ कि. मी./घंटा}$$

उदा. 36: 3 कि.मी. टहलने में हरी को 20 मिनट लगता है। यदि श्याम हरी से 20% तेज चलता है तो वह उस दूरी को टहलने में कितना समय लेगा ?

हल: इस प्रश्न को हल करने से पहले हम एक व्यापक सूत्र पर विचार करेंगे जो इस प्रकार की स्थितियों के लिए उपयोगी हो सकता है।

राम S_1 कि.मी. प्रति घंटा की रफ्तार से चलते हुए किसी दूरी को t_1 घंटा में तय करता है। श्याम S_2 कि.मी. प्रति घंटा की रफ्तार से चलते हुए उतनी ही दूरी t_2 घंटे में तय करता है

$\therefore$ तो, $S_1t_1 = S_2t_2$ = दूरी

या, $S_1t_1 = S_2t_2$ = अचर (Constant)

इस प्रकार हम देखते हैं कि चाल एवं समय दोनों आपस में व्युत्क्रमानुपाती हैं।

अर्थात् यदि चाल में चार गुना वृद्धि की जाती है तो समय घटकर $\frac{1}{4}$ गुना हो जाता है।

निम्नलिखित स्थितियों को देखें:

(a) यदि A किसी दूरी को तय करने में 8 घंटा लेता है एवं वह B से 4 गुना तेजी से चलता है तो B उस दूरी को तय करने में कितना समय लेगा?

सूत्र से

$$S_1t_1 = S_2t_2$$

या, $S_1t_1 = 4S_1t_2 \rightarrow t_2 = \frac{t_1}{4} = \frac{8}{4} = 2$ घंटा

(b) यदि A किसी दूरी को तय करने में 8 घंटा लेता है एवं वह B से 4 गुना तेजी से चलता है तो B उस दूरी को तय करने में कितना समय लेगा?

सूत्र से

$$S_1t_1 = S_2t_2$$

या, $4 \times S_2 \times 8 = S_2 \times t_2$

$\therefore t_2 = 32$ घंटा

नोट : स्थिति (b) में, यह स्पष्ट है कि B, A की तुलना में 4 गुना धीमा है। इसलिए वह A की तुलना में 4 गुना ज्यादा समय लेता है।

yoursnahboob

(c) यदि B, A से 20% तेज गति से चलता है तो उस दूरी को, जिसको A 20 मिनट में तय करता है, तय करने में B को कितना समय लगेगा?

$$S_1t_1 = S_2t_2$$

या, $S_1 \times 20 = \frac{120}{100}S_1 \times t_2$

$$\therefore t_2 = \frac{20\times100}{120} = \frac{50}{3} = 16\frac{2}{3} \text{ मिनट}$$

नोट : चूँकि S_2, S_1 से 20% ज्यादा है, इसलिए $S_2 = S_1\left(\frac{120}{100}\right)$

(d) B समान दूरी तय करने में A से 30% कम समय लेता है। यदि A की चाल 7 कि. मी. प्रति घंटा है तो B की चाल क्या होनी चाहिए?

पुनः $7 \times t_1 = S_2\left(\frac{100-30}{100}\right)t_1$

$$\therefore S_2 = \frac{7\times100}{70} = 10 \text{ कि. मी./घंटा}$$

उदा. 37: एक व्यक्ति 120 कि. मी. जलयान से तय करता है, 450 कि. मी. रेलगाड़ी से एवं 60 कि. मी. घोड़े से। वह 13 घंटा 30 मिनट लेता है। यदि रेलगाड़ी की चाल घोड़े की चाल से 3 गुनी तथा जलयान की चाल से 1.5 गुनी हो तो रेलगाड़ी की चाल प्रति घंटा क्या है?

हल : माना कि घोड़े की चाल = x कि. मी./घंटा

रेलगाड़ी की चाल = $3x$ कि. मी./घंटा

एवं जलयान की चाल = $2x$ कि. मी./घंटा

अब, $\frac{120}{2x} + \frac{450}{3x} + \frac{60}{x} = 13.5$ घंटा

(चूँकि 13 घंटा 30 मिनट = 13.5 घंटा)

या, $\frac{120 + 900 + 360}{6x} = 13.5$

$$\therefore x = \frac{1620}{6\times13.5} = 20$$

$\therefore$ रेलगाड़ी की चाल = $3x = 3 \times 20 = 60$ कि. मी./घंटा

द्रुत विधि (Quicker Method) :

निम्नलिखित तरीके से सूचना को व्यवस्थित करें।

yoursmahboob

	रेलगाड़ी	जलयान	घोड़ा
दूरी	450 कि. मी.	120 कि. मी.	60 कि. मी.
चाल	3	2	1

कुल समय = 13.5 घंटा

$$\text{रेलगाड़ी की गति} = \frac{450\times2\times1+120\times3\times1+60\times3\times2}{15.3\times2\times1}$$

$$= \frac{1620}{27} = 60 \text{ कि. मी./घंटा}$$

$$\text{एवं जलयान की गति} = \frac{1620}{27} = 40 \text{ कि. मी./घंटा}$$

उसी प्रकार, हम घोड़े की चाल सीधा ज्ञात कर सकते हैं।

नोट : उपर्युक्त सूत्र को याद रखना आसान है।

(1) अंश (Numerator) में, रेलगाड़ी के द्वारा तय की गई दूरी (450) को जलयान एवं घोड़े की चालों से गुणा किया जाता है। हम बाकि दोनों का भी उसी प्रकार से गणना करते हैं।

(2) हर (Denominator) में रेलगाड़ी की चाल के लिए कुल समय (13.5 घंटा) में जलयान एवं घोड़े की चाल से गुणा किया जाता है।

(3) अब, आप घोड़े की चाल के लिए सूत्र बड़ी आसानी से लिख सकते हैं।

उदा. 38: एक आदमी एक निश्चित दूरी को स्कूटर से तय करता है। यदि वह 3 कि. मी. प्रति घंटा तेज चला होता तो उसे दूरी तय करने में 40 मिनट कम समय लगा होता। यदि वह 2 कि. मी. प्रति घंटा धीमा चला होता तो उसे दूरी तय करने में 40 मिनट अधिक समय लगता। दूरी (कि. मी. में) एवं प्रारंभिक चाल ज्ञात करें।

हल: **विस्तार विधि (Detail Method) :**

मान लिया कि दूरी D कि. मी. एवं प्रारंभिक चाल x कि. मी./घंटा है।

तो प्रश्नानुसार,

$$\frac{D}{x+3} = \frac{D}{x} - \frac{40}{60} \quad \text{एवं} \quad \frac{D}{x-2} = \frac{D}{x} + \frac{40}{60}$$

या, $\frac{D}{x} - \frac{D}{x+3} = \frac{2}{3}$ या, $\frac{3D}{x(x+3)} = \frac{2}{3}$ ..... (1)

या, $\frac{D}{x-2} - \frac{D}{x} = \frac{2}{3}$

या, $\frac{2D}{x(x-2)} = \frac{2}{3}$ ..... (2)

(1) एवं (2) से,

yoursmahboob

$$\frac{3D}{x(x+3)} = \frac{2D}{x(x-2)}$$

या, $3(x-2) = 2(x+3)$ या, $3x-6 = 2x+6$

$\therefore x = 12$ कि. मी./घंटा

अब, x का मान (1) में रखने पर,

$$D = \frac{2}{3} \times \frac{12 \times 15}{3} = 40 \text{ कि. मी.}$$

द्रुत विधि (Quicker Method) :

उपर्युक्त प्रश्न में, आगमन समय में कमी (40 मिनट) एवं आगमन समय में वृद्धि (40 मिनट) दोनों बराबर हैं।

इसलिए,

$$\text{चाल} = \frac{2 \times (\text{चाल में वृद्धि} \times \text{चाल में कमी})}{\text{चाल में वृद्धि एवं कमी का अंतर}}$$

$$= \frac{2 \times (3 \times 2)}{3-2} = 12 \text{ कि. मी./घंटा}$$

$$\text{अब, दूरी} = \frac{(12+3) \times (12-2)}{(12+3)-(12-2)} \times \text{आगमन समयों के बीच का अंतर}$$

$$= \frac{15 \times 10}{5} \times \frac{40+40}{60} = 40 \text{ कि. मी.}$$

नोट : 40 मिनट देर एवं 40 मिनट पहले के बीच का अंतर $40 + 40 = 80$ मिनट $= \frac{80}{60}$ घंटा

उदा. 39: एक व्यक्ति किसी स्थान तक पैदल जाने एवं उस स्थान से मोटरबाइक से वापस आने में कुल समय 8 घंटा लेता है। यदि वह दोनों तरफ मोटरबाइक से जाता तो उसे 2 घंटे की बचत होती। दोनों तरफ पैदल जाने में उसे कुल कितना समय लगेगा?

हल : पैदल चलने का समय + मोटरबाइक से चलने का समय = 8 घंटा .... (1)

2 × मोटर बाइक से चलने का समय = 8 − 2 = 6 घंटा .... (2)

2 × (1) − (2) से,

2 × पैदल चलने का समय = 2 × 8 − 6 = 10 घंटा .... (2)

∴ दोनों तरफ पैदल चलने में कुल 10 घंटा लगेगा।

सूत्र विधि (Direct Formula) :

दोनों तरफ पैदल चलने में लगा समय

= एक तरफ पैदल एवं एक तरफ मोटरबाइक से चलने में लगा समय − समय की बचत

= 8 + 2 = 10 घंटा

yousmahboob

अगर दूरी के अलग-अलग भाग को अलग-अलग चाल से तय किया गया हो तो औसत चाल निकालने की विधि।

प्रमेय: कोई व्यक्ति दूरी के $\frac{1}{x_1}$ भाग को v_1 की चाल से तय करता है, दूरी के $\frac{1}{x_2}$ भाग को v_2 की चाल से तय करता है ... इस प्रकार से दूरी के $\frac{1}{x_n}$ भाग को v_n की चाल से तय करता है

दूरी का भाग	संगत चाल	गुणक
$\frac{1}{x_1}$	v_1	$\frac{1}{x_1 v_1}$
$\frac{1}{x_2}$	v_2	$\frac{1}{x_2 v_2}$
...	—	...
...	—	...
$\frac{1}{x_n}$	v_n	$\frac{1}{x_n v_n}$
1		कुल जोड़ = S

$\therefore$ औसत चाल $= \frac{1}{S}$

उदा. 40: कोई व्यक्ति दूरी के $\frac{1}{3}$ भाग को 40 कि.मी./घंटा की चाल से तय करता है। शेष दूरी के $\frac{3}{5}$ भाग को 60 कि.मी./घंटा की चाल से तय करता है तथा शेष दूरी को 80 कि.मी./घंटा की चाल से तय करता है। व्यक्ति की औसत चाल ज्ञात करें।

हल: उपर्युक्त विधि से,

	दूरी का भाग	संगत चाल	गुणक
	$\frac{1}{3}$	40	$\frac{1}{120}$
$\left(1-\frac{1}{3}\right)$ का $\frac{3}{5}$ भाग या	$\frac{2}{5}$	60	$\frac{2}{300}$
शेष भाग $\left(1-\frac{1}{3}-\frac{2}{5}\right)$ या	$\frac{4}{15}$	80	$\frac{4}{1200}$
		कुल जोड़ =	$\frac{22}{1200}$

$\therefore$ औसत चाल $= \frac{1200}{22} = \frac{600}{11} = 54\frac{6}{11}$ कि.मी./घंटा

yoursmartbooob

प्रमेय: कोई व्यक्ति किसी निश्चित दूरी 'd' कि.मी. तय करता है। अगर चाल x कि.मी./घंटा बढ़ा दिया जाए तो दी हुई दूरी तय करने में 'a' घंटा कम समय लगता है। अगर चाल y कि.मी./घंटा घटा दिया जाए तो दी हुई दूरी तय करने में 'b' घंटा ज्यादा समय लगता है। इस तरह के प्रश्नों में,

$$d = \frac{(x+y)(a+b)(abxy)}{(bx-ay)^2} \text{ कि.मी.}$$

उदा. 41: कोई व्यक्ति किसी निश्चित दूरी तय करता है। यदि वह चाल को 2 कि.मी./घंटा की दर से बढ़ा दे तो दी हुई दूरी तय करने में 20 मिनट कम समय लगता है अगर चाल को 4 कि.मी./घंटा से घटा दे तो दी हुई दूरी तय करने में 30 मिनट ज्यादा समय लगता है। दूरी ज्ञात करें।

हल: उपरोक्त सूत्र से,

$$x = 2,\ a = \frac{1}{3} \qquad y = 4,\ b = \frac{1}{2}$$

$$d = \frac{(2+4)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)2\times4\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}}{\left(\frac{4}{3}-1\right)^2} = \frac{6\times5\times8\times9}{6\times6\times1} = 60 \text{ कि.मी.}$$

अभ्यास प्रश्न

1. एक रेलगाड़ी की रफ्तार 45 किलोमीटर/घंटा है। इसको रफ्तार मीटर/सेकेंड में व्यक्त करें।
2. किसी मोटरगाड़ी को 500 मीटर की यात्रा पूरी करने में 50 सेकेंड का समय लगता है। इसकी रफ्तार कि.मी./घंटा में व्यक्त करें
3. 600 मीटर लंबी गली को 5 मिनट में पार करने वाले व्यक्ति की रफ्तार कितना किलोमीटर/घंटा है?
4. दो रेलगाड़ियों की रफ्तार की आपस में तुलना करें यदि एक रेलगाड़ी 45 किलोमीटर/घंटा की रफ्तार से चलती हो तथा दूसरी 10 मीटर/सेकेंड की रफ्तार से।
5. $4\frac{2}{7}$ मीटर परिधि वाला किसी रेलगाड़ी के इंजन का एक चक्का (wheel) 4 सेकेंड में 7 चक्कर लगाता है। रेलगाड़ी की चाल कि. मी./घंटा में ज्ञात करें।
6. उस पुल की लंबाई क्या है जिसको एक व्यक्ति मोटरबाइक से 15 कि. मी./घंटे की रफ्तार से चलते हुए 5 मिनट में पार कर सकता है?
7. एक व्यक्ति को किसी निश्चित स्थान तक पैदल जाने एवं मोटरबाइक से वापस आने में कुल 6 घंटा 30 मिनट का समय लगता है। यदि वह दोनों तरफ मोटरबाइक से जाता तो उसे 2 घंटा 10 मिनट की बचत होती। दोनों तरफ पैदल चलने पर उसे कुल कितना समय लगेगा?

yourexamhub

8. मैं एक निश्चित दूरी को पैदल तय करता हूँ तथा वापस मोटरबाइक से करता हूँ और मुझे कुल $6\frac{1}{2}$ घंटा का समय लगता है। मैं दोनों तरफ $7\frac{3}{4}$ घंटा में पैदल चल सकता हूँ। दोनों तरफ मोटरबाइक से जाने में मुझे कुल कितना समय लगेगा?

9. एक रेलगाड़ी दिल्ली से अमृतसर की ओर 2 बजकर 45 मिनट अपराह्न (pm) में 50 कि. मी. प्रति घंटा की रफ्तार से रवाना होती है। एक दूसरी रेलगाड़ी अमृतसर से दिल्ली की ओर 1 बजकर 35 मिनट अपराह्न (pm) में 60 कि. मी. प्रति घंटे की चाल से रवाना होती है। यदि दिल्ली एवं अमृतसर के बीच की दूरी 510 कि. मी. हो तो दोनों रेलगाड़ियाँ दिल्ली से कितनी दूरी पर मिलेंगी?

10. एक रेलगाड़ी 10 मी. प्रति सेकेंड की समान चाल से 7 बजे पूर्वाह्न मद्रास से अर्कोनम की ओर प्रस्थान करती है। एक दूसरी रेलगाड़ी जिसकी चाल पहली गाड़ी से एक-तिहाई ज्यादा तेज है, अर्कोनम से मद्रास की ओर पूर्वाह्न 7 बजकर 20 मिनट पर प्रस्थान करती है। वे दोनों मद्रास से कितनी दूरी पर आपस में मिलेंगे, जबकि मद्रास और अर्कोनम के बीच की दूरी 68 कि. मी. है?

11. दो लड़के 8190 पंक्तियों को एक किताब लिखना प्रारंभ करते हैं। पहला लड़का 200 पंक्ति प्रति घंटा की रफ्तार से पहली पंक्ति से लिखना प्रारंभ करता है, दूसरा लड़का 150 पंक्ति प्रति घंटा की रफ्तार से अंतिम पंक्ति (अर्थात् 8189 वीं पंक्ति से शुरू करते हुए पीछे बढ़ता है) से लिखना प्रारंभ करता है। किस पंक्ति पर दोनों मिलेंगे?

12. A, B एवं C क्रमशः 3, 4 एवं 5 कि. मी. प्रति घंटा की रफ्तार से टहल सकते हैं। वे पूना से क्रमशः 1, 2 एवं 3 बजे प्रस्थान करते हैं। जब B, A को पकड़ लेता है तो B, C को सूचना भेजता है। C को सूचना कब प्राप्त होगी?

13. 200 मीटर की दूरी से एक सिपाही एक चोर को देखता है। जब सिपाही उसका पीछा करना प्रारंभ करता है तो चोर भी दौड़ने लगता है। यदि चोर की चाल 10 कि. मी. प्रति घंटा हो तो चोर, सिपाही के द्वारा पकड़े जाने से पहले कितनी दूरी दौड़ चुका होता है?

14. दो व्यक्ति क्रमशः $3\frac{3}{4}$ कि. मी. प्रति घंटा एवं 3 कि. मी. प्रति घंटा की रफ्तार से एक निश्चित दूरी तय करना प्रारंभ करते हैं। पहला व्यक्ति दूसरे से आधा घंटा पहले पहुँचता है। दूरी ज्ञात करें।

15. दो साइकिल सवार समान दूरी को क्रमशः 9 कि. मी. प्रति घंटा एवं 10 कि. मी. प्रति घंटा की रफ्तार से तय करता है। दूरी ज्ञात करें यदि एक दूसरे की अपेक्षा 32 मिनट ज्यादा समय लेता है।

16. एक मोटर कार एक यात्रा 10 घंटे में पूरी करता है। यदि वह यात्रा के शुरू का आधा 21 कि. मी. प्रति घंटा की रफ्तार से तथा बाद का आधा 24 कि. मी. प्रति घंटा की रफ्तार से तय करता है तो दूरी ज्ञात करें।

17. एक व्यक्ति $3\frac{1}{2}$ कि. मी. प्रति घंटा की चाल से एक निश्चित समय में A से B तक टहल कर

yourmahboob

जाता है तथा वापस लौट आता है। लेकिन यदि वह A से B तक 3 कि. मी. प्रति घंटा की रफ्तार से जाता तथा B से A तक 4 कि. मी. प्रति घंटा की रफ्तार से वापस लौट आता तो उसे 5 मिनट ज्यादा लगा होता। A एवं B के बीच की दूरी ज्ञात करें।

18. एक व्यक्ति एक निश्चित दूरी रेलगाड़ी से 25 कि. मी. प्रति घंटा की रफ्तार से तय करता है तथा 4 कि. मी. प्रति घंटा की रफ्तार से पैदल वापस लौट आता है। पूरी यात्रा में कुल 5 घंटा 48 मिनट का समय लगता है। रेलगाड़ी से तय की गई दूरी ज्ञात करें।

19. दो रेलगाड़ियाँ एक ही समय में दो स्टेशनों से एक दूसरे की ओर क्रमशः 20 कि. मी. प्रति घंटा एवं 25 कि. मी. प्रति घंटा की रफ्तार से रवाना होती हैं। जब वे मिलते हैं तो यह पाया जाता है कि एक रेलगाड़ी दूसरी से 80 कि. मी. ज्यादा दूरी तय कर चुकी है। दोनों स्टेशनों के बीच की दूरी ज्ञात करें।

20. मुझे एक खास जगह पर एक खास समय पर उपस्थित रहना है एवं मैं पाता हूँ कि यदि मैं 4 कि. मी. प्रति घंटा की रफ्तार से जाता हूँ तो 15 मिनट देर हो जाऊँगा एवं यदि 6 कि. मी. प्रति घंटा की रफ्तार से जाता हूँ तो 10 मिनट पहले पहुँच जाऊँगा। मुझे कितनी दूरी तय करनी है?

21. एक व्यक्ति पांडीचेरी से उटकमंड जाने में 120 कि. मी. जलयान से, 450 कि. मी. रेलगाड़ी से तथा 60 कि. मी. घोड़े से तय करता है। पूरी यात्रा में कुल 13 घंटा 30 मिनट का समय लगता है। रेलगाड़ी की चाल घोड़े के चाल की 3 गुनी तथा जलयान के चाल की $1\frac{1}{2}$ गुनी है। रेलगाड़ी की चाल ज्ञात करें।

22. किसी रेल की पटरी के किनारे कुछ खंभे हैं। किसी दो खंभों के बीच 50 मीटर का फर्क है। एक रेलगाड़ी 45 कि. मी. प्रति घंटा की चाल से चलते हुए चार घंटे में कितने खंभों को पार करेगी?

उत्तर

1. $45 \times \frac{5}{18} = \frac{25}{2} = 12.5$ मी./सेकेंड

2. चाल मी./से. में = $\frac{500}{50} = 10$

∴ चाल कि.मी./घंटा में = $10 \times \frac{18}{5}$ = 36 कि.मी./घंटा

3. चाल मी./से. में = $\frac{600}{5 \times 60} = 2$

∴ चाल कि.मी./घंटा में = $2 \times \frac{18}{5} = \frac{36}{5} = 7\frac{1}{5}$ कि.मी./घंटा

yoursmahboob

4. 10 मी./से. $= 10 \times \frac{18}{5} = 36$ कि.मी./घंटा

$\therefore$ अनुपात $= 45 : 36 = 5 : 4$

5. 4 सेकेंड में तय की गई दूरी $= \frac{30}{7} \times 7$ मी.

$\therefore$ चाल मी./सेकेंड में $= \frac{30}{4}$

$\therefore$ चाल किलोमीटर/घंटा में $= \frac{30}{4} \times \frac{18}{5} = 27$ किलोमीटर/घंटा

6. 5 मिनट में तय की गई दूरी $= \frac{15}{60} \times 5 = \frac{15}{12} = \frac{5}{4}$ किलोमीटर $= 1520$ मीटर

7. पैदल चलना + गाड़ी से यात्रा $= 6$ घंटा 30 मिनट ..... (1)

$2 \times$ गाड़ी से यात्रा $= 6$ घंटा 30 मिनट $- 2$ घंटा 10 मिनट

$= 4$ घंटा 20 मिनट ..... (2)

उपर्युक्त दोनों समीकरणों (संबंधों) को सरल करने पर;

$2 \times (1) - (2)$ से,

$2 \times$ पैदल चलने में लगा वक्त $= 13$ घंटा $- 4$ घंटा 20 मिनट $= 8$ घंटा 40 मिनट

द्रुत विधि (Quicker Approach): यदि पैदल चलने और गाड़ी से यात्रा करने के बजाय वह दोनों तरफ की दूरी गाड़ी से ही तय करे, तो 2 घंटा 10 मिनट की बचत करता है

$\Rightarrow$ एक तरफ पैदल चलने से एक तरफ गाड़ी से चलने की तुलना में 2 घंटा 10 मिनट अधिक लगता है। इसलिए यदि एक तरफ पैदल चलने एवं एक तरफ की यात्रा गाड़ी से तय करने में 6 घंटा 30 मिनट लगते हों तो दोनों तरफ की यात्रा पैदल ही पूरा करने में 6 घंटा 30 मिनट + 2 घंटा 10 मिनट = 8 घंटा 40 मिनट लगेंगे।

8. पैदल + गाड़ी $= \frac{13}{2}$ घंटा ..... (1)

पैदल $-$ पैदल $= 7\frac{3}{4}$ घंटा

या, $2 \times$ पैदल $= \frac{31}{4}$ घंटा ..... (2)

$2 \times (1) - (2)$ से,

$2 \times$ गाड़ी $= 13 - \frac{31}{4} = \frac{21}{4} = 5$ घंटा 15 मिनट

द्रुत विधि (Quicker Approach):

दोनों तरफ की यात्रा पैदल करने से 7 घंटा 45 मिनट लगते हैं। पर एक तरफ की यात्रा पैदल

yoursmallboob

एवं एक तरफ की यात्रा गाड़ी से तय करने पर 6 घंटा 30 मिनट लगते हैं।

$\Rightarrow$ एक तरफ की पैदल यात्रा पूरी करने से एक तरफ की यात्रा गाड़ी से तय करने की अपेक्षा (7 घंटा 45 मिनट) - (6 घंटा 30 मिनट) = 1 घंटा 45 मिनट अधिक लगते हैं।

अब चूँकि एक तरफ की यात्रा गाड़ी से एवं दूसरे तरफ की यात्रा पैदल तय करने से 6 घंटा 30 मिनट लगते हैं तो दोनों तरफ की यात्रा गाड़ी से तय करने पर 6 घंटा 30 मिनट – 1 घंटा 15 मिनट = 5 घंटा 15 मिनट लगेंगे।

9. मान लिया कि वे दोनों दिल्ली से x किलोमीटर की दूरी पर मिलेंगे।

प्रश्नानुसार,

$$2.45 \text{ अपराह्न} - \frac{x}{50} = 1.35 \text{ अपराह्न} + \frac{510 - x}{60} = \text{उनके मिलने का समय}$$

$$\text{या, } (2.45 \text{ अपराह्न} - 1.35 \text{ अपराह्न}) - \left(\frac{x}{50} - \frac{x}{60}\right) = \frac{510}{60} = \frac{17}{2}$$

$$\text{या, } \left(1\frac{1}{6} \text{ घंटा}\right) + x\left(\frac{50 + 60}{50 \times 60}\right) = \frac{17}{2}$$

$$\text{या, } x\left(\frac{110}{3000}\right) = \frac{17}{2} - \frac{7}{6} = \frac{51 - 7}{6} = \frac{44}{6}$$

$$\therefore x = \frac{44}{6} \times \frac{3000}{110} = 200 \text{ किलोमीटर}$$

द्रुत विधि (Quicker Approach):

दूसरी गाड़ी (जो अमृतसर से चलती है), अपेक्षाकृत जल्दी चलती है। यह 60 × (2.45 – 1.35) अपराह्न – $60 \times 1\frac{1}{6}$ घंटा = 70 किलोमीटर चल चुकी होती है, तब पहली गाड़ी (जो दिल्ली से चलती है) यात्रा शुरू करती है।

अब, दोनों गाड़ियाँ (510 – 70 =) 440 किलोमीटर की दूरी (50 + 60 =) 110 किलोमीटर/घंटा की रफ्तार से तय करती है।

इस प्रकार ये गाड़ियाँ पहली गाड़ी के चलने के (जो कि 2.45 बजे अपराह्न पर चलती है) $\frac{440}{110}$ = 4 घंटे बाद मिलती है।

अर्थात् पहली गाड़ी, दूसरी गाड़ी से मिलने के लिए, (4 × 50 =) 200 किलोमीटर की लंबी दूरी तय करती है।

सूत्र (Direct Formula): उपर्युक्त प्रक्रिया के सहारे, एक सूत्र प्राप्त किया जा सकता है।

दिल्ली से मिलन बिन्दु की दूरी (पहली गाड़ी का प्रस्थान–बिन्दु दिल्ली है)

$$= S_1\left(\frac{\text{कुल दूरी} - S_2(T_1 - T_2)}{S_1 + S_2}\right)$$

yoursmahboob

जहाँ S_1 – पहली गाड़ी की चाल

S_2 – दूसरी गाड़ी की चाल

T_1 = पहली गाड़ी का प्रस्थान-समय

T_2 – दूसरी गाड़ी का प्रस्थान-समय

$$= 50\left(\frac{510 - 60 \times \frac{7}{6}}{60 + 50}\right) = 50\left(\frac{440}{110}\right) = 200 \text{ किलोमीटर}$$

10. **द्रुत विधि (Quicker Method):** प्रश्न–9 में प्रयुक्त सूत्र का प्रयोग करने पर,

$S_1 = 10 \times \frac{18}{5} = 36$ कि.मी./घंटा

$S_2 = 36 + \frac{36}{3} = 48$ कि.मी./घंटा

समय का अंतर = $T_1 - T_2$ = 7 बजे प्रातः – 7.20 बजे प्रातः = $-\frac{1}{3}$ घंटा

$\therefore$ नक्शा से मिलन-बिन्दु की दूरी = $36\left[\frac{68 - 48\left(-\frac{1}{3}\right)}{36 + 48}\right]$

$= 36\left[\frac{68 + 16}{36 + 48}\right] = 36$ कि. मी.

11. उनकी आपेक्षिक गति = (200 + 150 =) 350 परिक्रमाएँ/घंटा

$\therefore$ वे आपस में मिलेंगे = $\frac{8190}{850} = \frac{117}{5}$ घंटे बाद

$\therefore$ वे आरंभ से $\frac{117}{5} \times 200 = 4680$ वाँ गति पर मिलेंगे।

12.

	चाल	प्रस्थान समय
A	3 किलोमीटर	1 बजे
B	4 किलोमीटर	2 बजे
C	5 किलोमीटर	3 बजे

A, B से 3 किलोमीटर आगे है।

$\therefore$ A और B की सापेक्ष गति = (4 – 3 =) 1 कि.मी./घंटा

yoursmahboob

$\therefore$ B, A से $\frac{3}{1}$ = 3 घंटे बाद मिलता है।

अर्थात् 2 + 3 = 5.0 बजे मिलता है।

$\therefore$ A, पूना से 3 × 4 = 12 किलोमीटर की दूरी से एवं 5 बजे वापस लौटता है।

इसी बीच C, पूना से 5 × 2 = 10 किलोमीटर की दूरी तय कर लेता है।

इस प्रकार 5 बजे A और C एक दूसरे से 12–10 = 2 किलोमीटर अलग हैं।

A एवं C की सापेक्ष गति = 3 + 5 = 8 कि.मी./घंटा

इस प्रकार, वे $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$ घंटा = 15 मिनट बाद मिलेंगे।

$\therefore$ C को संवाद प्राप्त होगा 5.15 बजे।

13. सापेक्ष गति = 12 − 10 = 2 किलोमीटर/घंटा

$\therefore$ चोर पकड़ा जाएगा $\frac{0.2}{2} = \frac{1}{10}$ घंटा बाद

$\therefore$ पकड़े जाने से पूर्व चोर द्वारा तय की गई दूरी = $10 \times \frac{1}{10} = 1$ किलोमीटर

द्रुत विधि (Quicker Method):

पकड़े जाने से पूर्व चोर द्वारा तय की गई दूरी

$$= \frac{\text{दूरी का अंतर}}{\text{सापेक्ष गति}} \times \text{चोर की चाल}$$

$$= \frac{0.2 \text{ किलोमीटर}}{2 \text{ किलोमीटर/घंटा}} \times 10 \text{ किलोमीटर/घंटा} = 1 \text{ किलोमीटर}$$

14. **द्रुत विधि (Quicker Method):**

$$\text{दूरी} = \frac{\text{समय का अंतर} \times S_1 \times S_2}{S_1 - S_2}$$

जहाँ S_1 एवं S_2 क्रमशः दो व्यक्तियों की चाल है।

$$\therefore \text{दूरी} = \frac{\frac{1}{2} \times 3 \times \frac{15}{4}}{\frac{15}{4} - 3} = \frac{15}{2} = 7.5 \text{ किलोमीटर}$$

नोट: विस्तृत विधि के लिए:

मान लिया कि दूरी = x किलोमीटर

$$\therefore \frac{x}{3} - \frac{x}{\frac{15}{4}} = \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow x = 7.5$ किलोमीटर

yoursmahboob

15. **द्रुत विधि (Quicker Method): (प्रश्न-14 की तरह)**

उत्तर: $\dfrac{\frac{32}{60}\times 9\times 10}{10-9}$ = 48 किलोमीटर

16. मान लिया कि दूरी = x किलोमीटर

तब, कुल समय = $\dfrac{x}{2\times 21}+\dfrac{x}{2\times 24}$ = 10 घंटा

या, $\dfrac{x(24+21)}{2\times 21\times 24}=10$

$\therefore\ x=\dfrac{10\times 2\times 21\times 24}{45}=224$ किलोमीटर

द्रुत विधि (सूत्र विधि):

दूरी = $\dfrac{2\times \text{कुल समय}\times \text{चालों का गुणनफल}}{\text{चालों का योगफल}}$

$=\dfrac{2\times 10\times 21\times 24}{21+24}=224$ किलोमीटर

17. मान लिया कि दूरी = x किलोमीटर

$\therefore$ आने-जाने में लगा कुल समय = $\dfrac{x}{3.5}+\dfrac{x}{3.5}=\dfrac{x}{3}+\dfrac{x}{4}=\dfrac{5}{60}$

या, $\dfrac{2x}{3.5}=\dfrac{7x}{12}=\dfrac{5}{60}$

या, $\dfrac{x(24.5-24)}{3.5\times 12}=\dfrac{5}{60}$

या, $x=\dfrac{5}{60}\times\dfrac{3.5\times 12}{0.5}=7$ किलोमीटर

18. **द्रुत विधि (सूत्र से):**

दूरी = कुल समय $\left(\dfrac{\text{चालों का गुणनफल}}{\text{चालों का योगफल}}\right)$

$=5\times\dfrac{48}{60}\left(\dfrac{25\times 4}{25+4}\right)$

$=5\dfrac{4}{5}\left(\dfrac{100}{29}\right)$

$=\dfrac{29}{5}\left(\dfrac{100}{29}\right)=20$ किलोमीटर

yoursmahboob

नोट: विस्तृत विधि से प्रश्न हल करने के लिए, मान लें कि दूरी - x किलोमीटर

प्रश्नानुसार, $\frac{x}{4}+\frac{x}{25}=5\frac{48}{60}=\frac{29x}{100}=\frac{29}{5}$

$\therefore x=20$ किलोमीटर

19. ***द्रुत विधि (सूत्र से):***

दूरी - $\frac{80(25+20)}{(25-20)}=720$ किलोमीटर

20. ***द्रुत विधि (सूत्र से):***

दूरी - $\frac{\text{दोनों चालों का गुणनफल}}{\text{दोनों चालों का अंतर}}\times$ समय का अंतर

$=\frac{4\times6}{6-4}\times\frac{15+10}{60}=\frac{24}{2}\times\frac{25}{60}=5$ कि.मी.

नोट: 15 मिनट विलम्ब एवं समय से 10 मिनट पूर्व से तात्पर्य है कि आगमन-काल में 15+10 =25 मिनट का अंतर।

21. मान लिया कि रेलगाड़ी की गति = x कि.मी./घंटा

घोड़े की चाल = $\frac{x}{3}$ कि.मी./घंटा

तथा जलयान की चाल - $\frac{2x}{3}$ किलोमीटर/घंटा

$\therefore$ कुल समय = $\frac{120\times3}{2x}+\frac{450}{x}+\frac{60\times3}{x}=13\frac{1}{2}$

या, $\frac{1}{x}=\frac{27}{2\times810}-\frac{1}{60}$

$\therefore x=60$ किलोमीटर/घंटा

22. 4 घंटे में रेलगाड़ी द्वारा तय की गई कुल दूरी - $4\times45=180$ किलोमीटर

180 किलोमीटर की लंबी दूरी में कुल मिलाकर $\frac{180000}{50}+1=3601$ खंभे होंगे।

yoursmahboob

रेलगाड़ियाँ
(Trains)

यह अध्याय पिछले अध्याय (समय एवं दूरी) की तरह ही है। एक मात्र अंतर यह है कि इस अध्याय में गतिमान वस्तु (रेलगाड़ी) की लंबाई को भी ध्यान में रखा जाता है।

इस अध्याय में कुछ महत्वपूर्ण तथ्य निम्नलिखित हैं:

1) जब दो रेलगाड़ियाँ विपरीत दिशा में जा रही हों तो उनकी आपेक्षिक चाल ज्ञात करने के लिए उनकी चालों को जोड़ दिया जाता है।

2) जब वे एक ही दिशा में जा रहे हों तो आपेक्षिक चाल ज्ञात करने के लिए उनके चालों के बीच का अंतर निकाला जाता है।

3) जब एक रेलगाड़ी एक प्लेटफॉर्म को पार करती है तो यह रेलगाड़ी एवं प्लेटफॉर्म की लंबाइयों के योगफल के बराबर की दूरी तय करती है।

किसी टेलीग्राफ पोस्ट या स्थिर व्यक्ति को पार कर रही रेलगाड़ियाँ

उदा. 1: 36 किलोमीटर/घंटा के रफ्तार से चल रही 100 मीटर लंबी रेलगाड़ी को टेलीग्राफ के किसी खंभे को पार करने में कितना वक्त लगेगा ?

हल: खंभे को पार करने की प्रक्रिया में गाड़ी को अपनी लंबाई के बराबर यात्रा करनी होती है।

अब, 36 किलोमीटर/घंटा = $36 \times \frac{5}{18}$ = 10 मी./से.

$\therefore$ अभीष्ट समय = $\frac{100}{10}$ = 10 सेकेंड

जब रेलगाड़ी किसी पुल अथवा रेलवे स्टेशन को पार करे

उदा. 2: 36 किलोमीटर/घंटा की रफ्तार से चल रही 110 मीटर लंबी रेलगाड़ी को 132 मीटर लंबे पुल को पार करने में कितना वक्त लगेगा ?

हल: किसी पुल को पार करने की प्रक्रिया में रेलगाड़ी को न केवल पुल की लंबाई पार करनी होती है बल्कि रेलगाड़ी की भी लंबाई को पार करनी होती है।

$\therefore$ 36 कि.मी./घंटा = $36 \times \frac{5}{18}$ = 10 मी./सेकेंड

$\therefore$ अभीष्ट समय = $\frac{242}{10}$ = 24.2 सेकेंड

जब दो रेलगाड़ियाँ परस्पर विपरीत दिशा में चल रही हों

उदा. 3: 121 मीटर एवं 99 मीटर लंबी दो रेलगाड़ियाँ परस्पर विपरीत दिशा में क्रमशः 40 किलोमीटर एवं 35 किलोमीटर प्रति घंटा की रफ्तार से चल रही हैं। मिलने के क्षण के कितने समय बाद वे एक दूसरे को पार कर लेंगी?

yourshanboob

हल: चूँकि दोनों रेलगाड़ियाँ एक दूसरे के विपरीत दिशा में चल रही हैं, इसलिए उनकी सापेक्ष चाल = 40 + 32 = 72 किलोमीटर/घंटा अर्थात् वे एक-दूसरे की ओर 72 किलोमीटर/घंटा या 20 मी./सेकेंड की रफ्तार से बढ़ रहे हैं।

$$\therefore \text{ अभीष्ट समय} = \frac{\text{कुल लंबाई}}{\text{सापेक्ष चाल}} = \frac{121+99}{20} = 11 \text{ सेकेंड}$$

एक ही दिशा में यात्रा कर रही रेलगाड़ियाँ

उदा. 4: उदा.–3 में गाड़ियाँ यदि एक ही दिशा में यात्रा कर रही हों तो कितने समय में एक दूसरे को पार कर लेंगी ?

हल: सापेक्ष चाल = 40 − 32 = 8 किलोमीटर/घंटा

$$= \frac{20}{9} \text{ मी./सेकेंड}$$

कुल लंबाई = 121 + 99 = 220 मीटर

$$\therefore \text{ अभीष्ट समय} = \frac{\text{कुल लंबाई}}{\text{सापेक्ष चाल}}$$

$$= \frac{220}{20} \times 9 = 99 \text{ सेकेंड}$$

जब गाड़ी किसी टहलते हुए आदमी को पार करती है

उदा. 5: 110 मीटर लंबी कोई रेलगाड़ी 60 किलोमीटर/घंटा की रफ्तार से चल रही है। 6 किलोमीटर/घंटा की गति से टहल रहे व्यक्ति को यह कितनी देर में पार कर लेगी, यदि i) दोनों विपरीत दिशा में चल रहे हों? ii) यदि दोनों एक ही दिशा में चल रहे हों?

हल: यह प्रश्न उपर्युक्त उदा.–3 एवं उदा.–4 की तरह ही हल किया जाएगा। यहाँ फर्क केवल इतना है कि मनुष्य की लंबाई 0 है।

i) आपेक्षिक गति = 60 + 6 = 66 किलोमीटर/घंटा

$$= \frac{55}{3} \text{ मी./सेकेंड}$$

$$\therefore \text{ अभीष्ट समय} = \frac{110}{55} \times 3 = 6 \text{ सेकेंड}$$

ii) आपेक्षिक गति = 60 − 6 = 54 किलोमीटर/घंटा = 15 मीटर/से.

$$\therefore \text{ अभीष्ट समय} = \frac{110}{15} = 7\frac{1}{3} \text{ सेकेंड}$$

उदा. 6: दो रेलगाड़ियाँ एक ही दिशा में क्रमशः 50 कि.मी./घंटा एवं 10 कि.मी./घंटा की रफ्तार से चल रही हैं। तेज गति से चल रही गाड़ी धीमी गति से चल रही गाड़ी में बैठे हुए मनुष्य को 18 सेकेंड में पार करती है। तेज गति से चलने वाली गाड़ी की लंबाई बताएँ।

yoursmahboob

हल: आपेक्षिक गति = (50 30) कि.मी./घंटा

$$= \left(20 \times \frac{5}{18}\right) \text{मी./सेकेंड} = \frac{50}{9} \text{ मी./से.}$$

इस रफ्तार से 18 सेकेंड में तय की गई दूरी $= 18 \times \frac{50}{9} = 100$ मीटर

∴ तेज गति से चलने वाली रेलगाड़ी की लंबाई = 100 मीटर

उदा. 7: 25 कि.मी./घंटा की रफ्तार से चल रही रेलगाड़ी को कोई प्लेटफॉर्म पार करने में 18 सेकेंड लगते हैं। इसके बाद 5 कि.मी./घंटा की रफ्तार से विपरीत दिशा में चल रहे व्यक्ति को पार करने में उस रेलगाड़ी को 12 सेकेंड लगता है। रेलगाड़ी एवं प्लेटफॉर्म की लंबाई बताएँ।

हल: मनुष्य के सापेक्ष रेलगाड़ी की चाल = 25 − 5 = 30 कि.मी./घंटा

$$= 30 \times \frac{5}{18} = \frac{25}{3} \text{ मी./सेकेंड}$$

इस रफ्तार से 12 सेकेंड में तय की गई दूरी $= \frac{25}{3} \times 12 = 100$ मी.

∴ रेलगाड़ी की लंबाई = 100 मीटर

रेलगाड़ी की चाल = 25 किलोमीटर/घंटा

$$= 25 \times \frac{5}{18} = \frac{125}{18} \text{ मीटर/सेकेंड}$$

इस गति से 18 सेकेंड में तय की गई दूरी $= \frac{125}{18} \times 18 = 125$ मी.

∴ रेलगाड़ी की लंबाई + प्लेटफॉर्म की लंबाई = 125 मीटर

∴ प्लेटफॉर्म की लंबाई = 125 − 100 = 25 मीटर

विविध उदाहरण

उदा. 8: ठीक एक ही समय पर दो रेलगाड़ियाँ हैदराबाद और दिल्ली से क्रमशः 80 किलोमीटर/घंटा एवं 95 कि.मी./घंटा की रफ्तार से रवाना होती हैं। जब वे आपस में मिलती हैं तो एक रेलगाड़ी दूसरी की तुलना में 180 किलोमीटर अधिक चल चुकी होती है। दिल्ली एवं हैदराबाद के बीच की दूरी बताएँ ?

हल: तेज गति से चलनेवाली गाड़ी 1 घंटा में 95 − 80 = 15 किलोमीटर अधिक चल चुकी होगी है।

∴ यह गाड़ी 180 किलोमीटर अधिक चलेगी $\frac{1}{15} \times 180 = 12$ घंटे में

चूँकि, वे विपरीत दिशाओं में चल रही हैं, इसलिए एक घंटे में 80 + 95 = 175 किलोमीटर की दूरी तय करेंगी।

yoursmahboob

∴ 12 घंटे में वे 175 × 12 = 2100 कि. मी. की दूरी तय करेंगी।

∴ तय की गई दूरी = 2100 किलोमीटर

सूत्र (Direct Formula):

$$\text{दूरी} = \text{दूरी का अंतर} \times \frac{\text{चालों का योग}}{\text{चालों का अंतर}}$$

$$= 180 \times \frac{175}{15} = 2100 \text{ किलोमीटर}$$

उदा. 9: जयपुर से दिल्ली के लिए दो रेलगाड़ियाँ प्रातः 8.30 बजे एवं 9.0 बजे रवाना होती हैं। इनकी रफ्तार क्रमशः 60 कि.मी./घंटा एवं 75 किलोमीटर/घंटा है। जयपुर से कितने किलोमीटर की दूरी पर ये दोनों रेलगाड़ियाँ मिलेंगी?

हल: *'समय और दूरी'* वाले अध्याय के उदा. 23 में दिए गए सूत्र का इस्तेमाल करें:

$$\therefore \text{ अभीष्ट दूरी} = (9.00 - 8.30) \times \left(\frac{60 \times 75}{75 - 60}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{60 \times 75}{15}\right) = 150 \text{ किलोमीटर}$$

उदा. 10: बिना कहीं रुके हुए एक रेलगाड़ी 75 कि.मी./घंटा की औसत रफ्तार से चलती है और रुक-रुककर वही गाड़ी 60 कि.मी./घंटा की औसत रफ्तार से चलती है। रेलगाड़ी कितने मिनट प्रति घंटा रुकती है?

हल: पिछले अध्याय (समय और दूरी) के उदा.–28 में दिए गए सूत्र का प्रयोग करें:

$$\text{प्रति घंटा विश्राम की अवधि} = \frac{\text{औसत चाल का अंतर}}{\text{बिना रुके हुए चाल}}$$

$$= \frac{75 - 60}{75} = \frac{1}{5} \text{ घंटा} = 12 \text{ मिनट}$$

उदा. 11: कोई रेलगाड़ी प्लेटफॉर्म पर स्थिर खड़े किसी व्यक्ति को 7 सेकेंड में पार करती है तथा उस प्लेटफॉर्म को पूरी तरह 28 सेकेंड में पार करती है। यदि प्लेटफॉर्म की लंबाई 330 मीटर हो, तो रेलगाड़ी की लंबाई बताएँ ?

हल: मान लिया कि रेलगाड़ी की लंबाई = x मीटर

फिर, रेलगाड़ी की चाल = $\frac{x}{7}$ मी./सेकेंड

रेलगाड़ी की चल (दूसरी स्थिति में) = $\frac{x + 330}{28}$ मी./से.

दोनों चाल बराबर होनी चाहिए।

yoursmahboob

अर्थात् $\frac{x}{7} = \frac{x+330}{28}$

या, $28x - 7x = 7 \times 330$

$\therefore x = \frac{7 \times 330}{21} = 110$ मीटर

द्रुत विधि (Quicker Method): रेलगाड़ी अपनी लंबाई 7 सेकेंड में तय करती है तथा अपनी लंबाई एवं प्लेटफॉर्म की लंबाई 28 सेकेंड में। अर्थात् वह प्लेटफॉर्म की लंबाई 28−7 = 21 सेकेंड में तय करती है।

अब, चूँकि रेलगाड़ी 21 सेकेंड में 330 मीटर की दूरी तय करती है

$\therefore$ 7 सेकेंड में $\frac{330}{21} \times 7 = 110$ मी. की दूरी तय करती है।

इस प्रकार हमें एक सूत्र भी प्राप्त होता है:

रेलगाड़ी की लंबाई = $\frac{\text{प्लेटफॉर्म की लंबाई}}{\text{समय का अंतर}}$ × स्थिर व्यक्ति या खंभा को पार करने में लगा समय

$= \frac{330}{21} \times 7 = 110$ मीटर

उदा. 12: दो स्टेशन A एवं B, एक दूसरे से 110 कि.मी. अलग एक रेखा में स्थित हैं। एक रेलगाड़ी स्टेशन A से 8 बजे पूर्वाह्न रवाना होती है और 40 कि.मी./घंटा की रफ्तार से B की ओर यात्रा करती है। दूसरी रेलगाड़ी स्टेशन B से 10 बजे पूर्वाह्न रवाना होती है और A की ओर 50 कि.मी./घंटा की रफ्तार से यात्रा करती है। ये दोनों रेलगाड़ियाँ एक दूसरे से किस समय मिलेंगी?

हल: मान लिया कि पहली गाड़ी प्रस्थान करने के x घंटे बाद दूसरी गाड़ी से मिलती है।

$40x + (x - 2) \times 50 = 110$ .....नोट रखें।

या, $90x = 110 + 100 = 210$

$\therefore x = \frac{210}{90}$ घंटा $= \frac{7}{3}$ घंटा

= 2 घंटा 20 मिनट

= 10.20 बजे प्रातः

सूत्र से (Direct Formula): ये दोनों गाड़ियाँ मिलेंगी

8 बजे पूर्वाह्न + $\frac{110 + (10 \text{ पूर्वाह्न} - 8 \text{ पूर्वाह्न}) \times 50}{40 + 50}$

= 8 बजे पूर्वाह्न + $\frac{210}{90}$ = 10.20 बजे पूर्वाह्न

yourmainbook

नोट: पहली गाड़ी द्वारा तय की गई दूरी = 40x कि.मी.। दूसरी गाड़ी पहली गाड़ी के चलने के दो घंटे बाद यात्रा शुरू करती है, इसलिए दूसरी रेलगाड़ी द्वारा तय की गई दूरी = 50(x – 2)

∴ कुल दूरी = 110 किलोमीटर = 40x + 50(x – 2)

उदा. 13: 105 मी. लंबी एक रेलगाड़ी 54 किलोमीटर/घंटा की रफ्तार से दूसरी रेलगाड़ी को 6 सेकेंड में पार करती है तो निम्नलिखित में से कौन-सा सही है?

(1) गाड़ियाँ एक ही दिशा में चल रही हैं।

(2) गाड़ियाँ विपरीत दिशा में चल रही हैं।

(3) दूसरी रेलगाड़ी स्थिर खड़ी है।

हल: पहली रेलगाड़ी की चाल = 54 कि.मी./घंटा

$$= 54 \times \frac{5}{18} = 15 \text{ मी./सेकेंड}$$

खुद अपनी लंबाई तय करने में रेलगाड़ी को लगा समय = $\frac{105}{15} = 7$ सेकेंड

चूँकि दूसरी गाड़ी के पार करने में लगा समय (6 सेकेंड) 7 सेकेंड से कम है, इससे स्पष्ट है कि दूसरी गाड़ी विपरीत दिशा में चल रही है।

उदा. 14: समान लंबाई तथा भिन्न चाल से चल रही दो रेलगाड़ियाँ किसी खंभे को क्रमशः 4 एवं 5 सेकेंड में पार करती हैं। ये गाड़ियाँ एक-दूसरे को कितने समय में पार कर लेंगी यदि वे

(1) एक ही दिशा में चल रही हों?

(2) विपरीत दिशा में चल रही हों?

हल: मान लिया कि रेलगाड़ी की लंबाई = x मीटर

दोनों गाड़ियों की चाल = $\frac{x}{4}$ मी./सेकेंड एवं $\frac{x}{5}$ मी./सेकेंड

तय की जाने वाली कुल दूरी = 2x मीटर

(1) सापेक्ष चाल, जब वे एक ही दिशा में चल रही हों = $\frac{x}{4} - \frac{x}{5} = \frac{x}{20}$ मी./सेकेंड

∴ अभीष्ट समय = $2x \div \frac{x}{20} = 40$ सेकेंड

(2) जब दोनों रेलगाड़ियाँ विपरीत दिशा में चल रही हों तो सापेक्ष गति

$$= \frac{x}{4} + \frac{x}{5} = \frac{9x}{20} \text{ मी./सेकेंड}$$

∴ अभीष्ट समय = $2x \div \frac{9x}{20} = \frac{40}{9} = 4\frac{4}{9}$ सेकेंड

सूत्र: (Direct Formula)

(1) जब दोनों गाड़ियाँ एक ही दिशा में चल रही हों,

yoursmahboob

समय = $\frac{2(4\times5)}{5-4}$ = 40 सेकेंड

(ii) जब दोनों गाड़ियाँ विपरीत दिशा में चल रही हों

समय = $\frac{2(4\times5)}{5+4}$ = $\frac{40}{9}$ = $4\frac{4}{9}$ सेकेंड

उदा. 15: उपर्युक्त उदाहरण में यदि यह दिया गया हो कि गाड़ियों की लंबाइयाँ भी भिन्न हैं, पर उनकी गति समान हैं, तो स्थितियाँ क्या होंगी ?

हल: मान लिया कि रेलगाड़ी की लंबाई क्रमशः 4x एवं 5x मीटर है।

(1) जब वे समान दिशा में चल रही हों तो सापेक्ष गति = x − x = 0 मी./से.

अर्थात् वे एक-दूसरे को कभी पार (cross) नहीं कर पाएँगी।

(2) यदि वे विपरीत दिशा में यात्रा कर रही हों तो आपेक्षिक गति = x + x = 2x मी./सेकेंड

∴ समय = $\frac{\text{कुल लंबाई}}{\text{चाल}}$ = $\frac{4x+5x}{2x}$ = $\frac{4-5}{2}$ = 4.5 सेकेंड

इस प्रकार उपर्युक्त स्थिति के संदर्भ में हमें एक सूत्र प्राप्त होता है:

अपेक्षित समय = दोनों समय का औसत = $\frac{4+5}{2}$ = 4.5 सेकेंड

उदा. 16: 100 मीटर एवं 80 मीटर लंबाई वाली दो रेलगाड़ियाँ समानांतर पटरियों पर दौड़ लगाती हैं। यदि दोनों एक ही दिशा में चल रही हों तो तेज रफ्तार से चलने वाली गाड़ी, धीमी रफ्तार से चलने वाली गाड़ी को 18 सेकेंड में पार कर लेती है, पर यदि ये गाड़ियाँ एक दूसरे की विपरीत दिशा में चल रही हों तो पार करने में मात्र 9 सेकेंड का समय लगता है। दोनों रेलगाड़ियों की चाल बताएँ।

हल: मान लिया कि गाड़ियों की चाल x मी./से. एवं y मी./से. है।

यदि दोनों एक ही दिशा में चल रही हों तो सापेक्ष गति = (x − y) मी./से.

$\therefore x - y = \frac{100+80}{18} = 10$

इसी तरह, $x + y = \frac{100+80}{9} = 20$

दोनों समीकरणों को हल करने पर:

x = 15 मी./से. एवं y = 5 मी./से.

सूत्र (Direct Formula):

तेज रफ्तार वाली गाड़ी की चाल = $\frac{100+80}{2}\left(\frac{18+9}{18\times9}\right)$

$= 90\left(\frac{27}{18\times9}\right) = 15$ मी./से.

yoursmahboob

धीमी गति वाले गाड़ी की चाल = $\frac{100+80}{2}\left(\frac{18-9}{18\times 9}\right)$ = 5 मीटर/सेकेंड

इस प्रकार चाल के लिए एक सामान्य सूत्र प्राप्त होता है,

दोनों रेलगाड़ियों की लंबाई का औसत ×

$$\left[\frac{1}{\text{विपरीत दिशा के मामले में लिया गया समय}} + \frac{1}{\text{समान दिशा के मामले में लिया गया समय}}\right]$$

उदा. 17: 80 मीटर लंबी दो गाड़ियाँ समानांतर पटरियों पर एक दूसरे को पार करती हैं। यदि ये दोनों गाड़ियाँ एक ही दिशा में जा रही हों तो तेज रफ्तार वाली गाड़ी धीमी रफ्तार वाली गाड़ी को 1 मिनट में पार कर लेती है। यदि ये दोनों एक-दूसरे की विपरीत दिशा में जा रही हों तो पार करने में मात्र 9 सेकेंड लगाते हैं, गाड़ियों की गति मी./से. में बताएँ,

हल: यह प्रश्न उदा. 16 की विशेष स्थिति है। यहाँ दोनों गाड़ियों की लंबाई बराबर है। मान लिया कि गाड़ियों की चाल x मी./से. एवं y मी./से. है। जब वे एक ही दिशा में चल रही हों तो आपेक्षिक गति = $(x-y)$ मी./से.

$\therefore x-y=\frac{80+80}{60}$

या, $x-y=\frac{8}{3}$ .....(1)

जब ये दोनों गाड़ियाँ परस्पर विपरीत दिशा में जा रही हों तो आपेक्षिक गति = $x+y$ मी./सेकेंड

$\therefore x+y=\frac{80+80}{3}=\frac{160}{3}$ .....(2)

(1) और (2) को जोड़ने पर:

$2x=\frac{8}{3}+\frac{160}{3}=\frac{160}{3}=56$

$\therefore x=28$ मी./सेकेंड

(1) से $y=x-\frac{8}{3}=28-\frac{8}{3}=\frac{84-8}{3}=\frac{76}{3}=25\frac{1}{3}$

सूत्र से (Direct Formula): उदा. 16 में प्रयुक्त सूत्र यहाँ भी लागू होता है

तेज रफ्तार वाली गाड़ी की चाल = $\frac{80+80}{2}\left(\frac{60+3}{60\times 3}\right)$ = 28 मी./से.

धीमी गति वाली गाड़ी की चाल = $\frac{80+80}{2}\left(\frac{60-3}{60\times 3}\right)$

$=\frac{76}{3}=25\frac{1}{3}$ मी./से.

yoursmahboob

नोट: उपर्युक्त प्रश्न के लिए सामान्य सूत्र से प्राप्त हल का स्वरूप निम्नलिखित है :

$$80\left(\frac{1}{3}\pm\frac{1}{60}\right)\text{ मी./से.} = 80\left(\frac{60+3}{180}\right) = 28 \text{ मी./से. एवं } 25\frac{1}{3} \text{ मी./से.}$$

उदा. 18: दो रेलगाड़ियाँ किसी समानांतर पटरी पर क्रमशः 54 किलोमीटर/घंटा एवं 36 किलोमीटर/घंटा की रफ्तार से चल सकती हैं। अब वे एक दूसरे की विपरीत दिशा में चल रही हों तो 111 सेकेंड में अन्तर-पार हो जाते हैं। जब वे एक ही दिशा में जा रही होती हैं तो तेज रफ्तार वाली गाड़ी में बैठा हुआ पुरुष पाता है कि उसने धीमी रफ्तार से चल रही गाड़ी को मात्र 30 सेकेंड में पार कर लिया। गाड़ियों की लंबाई बताएँ।

हल: मी./से. में गाड़ियों की चाल क्रमशः 15 मी./से. एवं 10 मी./से. है। मान लिया कि तेज रफ्तार वाली गाड़ी एवं धीमी रफ्तार वाली गाड़ी की लंबाई क्रमशः x एवं y मीटर है। जब वे विपरीत दिशाओं में चल रही हों तो सापेक्ष गति = 15 + 10 = 25 मी./सेकेंड

कुल लंबाई = (x + y) मीटर

$\therefore$ एक दूसरे को पार करने में लिया गया समय = $\frac{x+y}{25}=10$

$\therefore x+y=250$ ..... (1)

दूसरी स्थिति में, व्यक्ति धीमी गति से चल रही रेलगाड़ी की लंबाई (y) को (15 − 10) = 5 मी./से. की रफ्तार से पार करता है।

$\therefore$ समय = $\frac{y}{5}=30$

$\therefore y = 150$ मीटर

एवं (1) से, $x = 100$ मीटर

$\therefore$ तेज रफ्तार वाली रेलगाड़ी की लंबाई = 100 मीटर

नोट: इस उदाहरण के संदर्भ में द्रुत-विधि की कोई आवश्यकता नहीं है। यदि दूसरी स्थिति आपके सामने स्पष्ट हो तो बिना किसी कठिनाई के अगर उत्तर तक पहुँच सकते हैं।

उदा. 19: एक रेलगाड़ी समान दिशा में टहल रहे दो व्यक्तियों को पार करती है। इनमें से एक व्यक्ति की रफ्तार है 2 किलोमीटर/घंटा एवं दूसरे की गति है 4 किलोमीटर/घंटा एवं गाड़ी इन दोनों को क्रमशः 9 एवं 10 सेकेंड में पार कर जाती है। रेलगाड़ी की चाल एवं लंबाई बताएँ।

हल: दोनों व्यक्तियों की चाल = 2 कि.मी./घंटा = $2\times\frac{5}{18}=\frac{5}{9}$ मी./से. एवं

4 कि.मी./घंटा = $4\times\frac{5}{18}=\frac{10}{9}$ मी./से.

मान लिया कि रेलगाड़ी की चाल = x मी./सेकेंड

तब, आपेक्षिक गति = $\left(x-\frac{5}{9}\right)$ मी./से. एवं $\left(x-\frac{10}{9}\right)$ मी./से.

yourmahboob

अब, रेलगाड़ी की लम्बाई = आपेक्षिक चाल × आदमी को पार करने में लगा समय

रेलगाड़ी की लम्बाई = $\left(x - \frac{5}{9}\right)\times 9 - \left(x - \frac{10}{9}\right)\times 10$ ..... (*)

$\therefore x = \frac{100}{9} - \frac{45}{9} = \frac{55}{9}$ मी./से.

$\therefore$ रेलगाड़ी की चाल $= \frac{55}{9}\times\frac{18}{5} = 22$ कि.मी./घंटा

एवं, रेलगाड़ी की लंबाई $= \left(x - \frac{5}{9}\right)9 = \left(\frac{55}{9} - \frac{5}{9}\right)\times 9 = 50$ मीटर

नोट: समीकरण के दौरान (*) आपका पहला चरण होना चाहिए।

सूत्र (Direct Formula) I:

रेलगाड़ी की लंबाई = $\frac{\text{दोनों व्यक्तियों की चालों में अंतर} \times T_1 \times T_2}{T_2 - T_1}$

जहाँ, T_1 एवं T_2 समान दिशा में जा रहे व्यक्तियों को रेलगाड़ी द्वारा पार करने में लगा समय है।

$\therefore$ उपर्युक्त प्रश्न के संदर्भ में

रेलगाड़ी की लंबाई = $\frac{\left(\frac{10}{9} - \frac{5}{9}\right)\times 9\times 10}{10-9} = 50$ मी.

गाड़ी की लंबाई का पता चल जाने से इसकी चाल की गणना करना आसान हो जाता है। प्रयत्न कीजिए।

क्या होता है यदि रेलगाड़ी और व्यक्ति विपरीत दिशाओं में चल रहे हों?

निम्नलिखित उदाहरण को देखें

द्रुत विधि (Quicker Method) II:

यदि कोई एक रेलगाड़ी दो वस्तुओं (objects) को पार करे

मान लिया कि रेलगाड़ी की लंबाई L_r है तथा उसकी चाल v_r है। पहली वस्तु (object) की लंबाई L_1 है तथा उसकी चाल v_1 है। दूसरी वस्तु (object) की लंबाई L_2 तथा उसकी चाल v_2 है। पहली तथा दूसरी वस्तु (object) को पार करने में रेलगाड़ी को क्रमशः t_1 तथा t_2 समय लगता है।

पहली वस्तु (object) को पार करने में रेलगाड़ी को $d_1 = (L_r + L_1 \pm v_r t_1)$ दूरी तय करनी होगी।

दूसरी वस्तु (object) को पार करने में रेलगाड़ी को $d_2 = (L_r + L_2 + v_2 t_2)$ दूरी तय करनी होगी।

youremaiboob

नोट: धनात्मक चिह्न '+' का प्रयोग रेलगाड़ी तथा वस्तु (object) दोनों के समान दिशा में चलने की स्थिति में होगा तथा ऋणात्मक चिह्न '–' का प्रयोग रेलगाड़ी तथा वस्तु (object) के विपरीत दिशा में चलने की स्थिति में होगा।

यदि L_1 तथा v_1 का मान नहीं दिया हो तो, उपरोक्त सूत्रों के आधार पर L_1 तथा v_1 का मान निकाला जा सकता है।

$$v_1 = \frac{d_1 - d_2}{t_1 - t_2} = \frac{(L_1 + L_2 + v_1 t_1) - (L_1 + L_2 \pm v_2 t_2)}{t_1 - t_2}$$

$$\boxed{\Rightarrow v_1 = \frac{(L_1 \pm v_1 t_1) - (L_2 \pm v_2 t_2)}{t_1 - t_2}}$$

v_2 का मान निकालने के पश्चात् हम 'L_1' का मान भी निकाल सकते हैं।

हल: उपर्युक्त सूत्र से,

$$v_1 = \frac{\left(0 + 2 \times \frac{5}{18} \times 9\right) - \left(0 + 4 \times \frac{5}{18} \times 10\right)}{9 - 10} = \frac{55}{9} \text{ मी./से.}$$

$$= \frac{55}{9} \times \frac{18}{5} = 22 \text{ कि.मी./घंटा}$$

L_1 = आपेक्षिक चाल × समय $= \left(\frac{55}{9} \times 2 \times \frac{5}{18}\right) \times 9 = 50$ मी.

उदा. 20: एक रेलगाड़ी 5 मी./से. एवं 10 मी./से. की रफ्तार से टहल रहे दो व्यक्तियों को क्रमशः 6 सेकेंड एवं 5 सेकेंड में पार कर लेती है; वे दोनों व्यक्ति रेलगाड़ी के विपरीत दिशा में टहल रहे हैं. गाड़ी की लंबाई एवं उसकी रफ्तार बताएँ।

हल: मान लिया कि गाड़ी की चाल x मी./सेकेंड है। तब पिछले उदाहरण की तरह,

रेलगाड़ी की लंबाई = $(x - 5) \times 6 = (x + 10) \times 5$

या, $(x + 5) \times 6 = (x + 10) \times 5$

$\therefore x = 20$ मी./सेकेंड

तथा रेलगाड़ी की लंबाई = $(20 + 5) \times 6 = 150$ मी.

द्रुत विधि (Quicker Method) I: यदि आप ध्यान से सवाल को पढ़ें तो पाएँगे कि धीमी गति से चलने वाले व्यक्ति को तेज रफ्तार से चलने वाले व्यक्ति की अपेक्षा रेलगाड़ी को पार करने में अधिक समय लगता है; पर पिछले प्रश्न में ठीक इसके विपरीत था। इसलिए, इस तरह के प्रश्न के लिए हमारा सूत्र है:

$$\boxed{\text{गाड़ी की लंबाई} = \frac{\text{चाल में अंतर} \times T_1 \times T_2}{T_2 - T_1}}$$

yoursmahboob

$$= \frac{(10-5)\times 5\times 6}{(6-5)} = 150 \text{ मी.}$$

नोट: दोनों सूत्रों के हर में फर्क है। और यह अंतर समाप्त हो जाता है, जब हम दोनों सूत्रों को निम्नलिखित रूप में लिखते हैं:

$$\text{गाड़ी की लंबाई} = \frac{\text{चाल में अंतर} \times \text{समय का गुणनफल}}{\text{समय का अंतर}}$$

द्रुत विधि (Quicker Method) II:

$$v_1 = \frac{(0-5\times 6)-(0-10\times 5)}{6-5} = 20 \text{ मी./से.}$$

L_1 = आपेक्षिक चाल × समय $= (20+5)\times 6 = 150$ मीटर

उदा. 21: एक रेलगाड़ी किसी खंभे को 15 सेकेंड में पार कर लेती है तथा 100 मीटर लंबे प्लेटफॉर्म को 25 सेकेंड में पार करती है। गाड़ी की लंबाई बताएँ।

हल: मान लिया कि गाड़ी की लंबाई = x मीटर

अब प्रश्नानुसार,

$$\frac{x}{15} = \frac{x+100}{25}$$

या, $25x = 15x + 100 \times 15$

या, $10x = 1500$

$\therefore x = 150$ मी.

$\therefore$ रेलगाड़ी की लंबाई = 150 मीटर

द्रुत विधि (Quicker Method) I:

$$\text{रेलगाड़ी की लंबाई} = \frac{\text{खंभा को पार करने में लगा समय} \times \text{प्लेटफॉर्म की लंबाई}}{\text{प्लेटफॉर्म एवं खंभा को पार करने में लगे समय का अंतर}}$$

$$\therefore \text{रेलगाड़ी की लंबाई} = \frac{15\times 100}{25-15} = 150 \text{ मीटर}$$

द्रुत विधि (Quicker Method) II:

$$L_1 = \frac{100-0}{25-15} = 10 \text{ मी./से.}$$

(v_1 तथा v_2 का मान 0 है।)

$L_1 = 10\times 15 = 150$ मीटर

उदा. 22: 100 मी. लंबी एक रेलगाड़ी किसी खंभे को 10 सेकेंड में पार करती है और विपरीत दिशा में जा रही उसी लंबाई की दूसरी गाड़ी को 8 सेकेंड में पार करती है तो दूसरी गाड़ी की चाल बताएँ?

yoursmahboob

हल: पहली रेलगाड़ी की चाल = $\frac{100}{10}$ = 10 मी./सेकेंड

दूसरी स्थिति में सापेक्ष चाल = $\frac{100+100}{8}$ = 25 मी./से.

∴ दूसरी गाड़ी की चाल = 25 − 10 = 15 मी./से.

या, $15 \times \frac{18}{5}$ = 54 कि.मी./घंटा

द्रुत विधि (Quicker Method):

रेलगाड़ी की चाल = $\frac{100}{10}$ = 10 मी./से.

$$10 = \frac{(0)-(100-v\times 8)}{10-8}$$

$\Rightarrow 20 = 8v - 100$

$\Rightarrow v = 15$ मी./से.

उदा. 23: एक मालगाड़ी एवं एक सवारीगाड़ी समानांतर पटरियों पर एक ही दिशा में दौड़ रहे हैं मालगाड़ी का चालक यह देखता है कि सवारीगाड़ी पीछे से आती हुई उसकी गाड़ी को पूरी तरह 60 सेकेंड में पार कर जाती है। जबकि एक सवारी जो कि सवारीगाड़ी में बैठा है यह देखता है कि वह मालगाड़ी को 40 सेकेंड में पार कर जाता है। यदि रेलगाड़ियों की चाल 1 : 2 के अनुपात में हो तो उनकी लंबाई का अनुपात ज्ञात करें।

हल: माना कि दोनों गाड़ियों की चाल क्रमशः x मी./से. एवं $2x$ मी./से. है तथा पुनः मान लिया कि गाड़ियों की लंबाई क्रमशः A मी. एवं B मी. है।

तो, $\frac{A+B}{2x-x} = 60$ .....(1)

एवं $\frac{A}{2x-x} = 40$ .....(2)

(1) में (2) से भाग देने पर,

$$\frac{A+B}{A} = \frac{60}{40}$$

या, $\frac{B}{A}+1 = \frac{3}{2}$ या, $\frac{B}{A} = \frac{1}{2}$

∴ A : B = 2 : 1

द्रुत विधि (Quicker Approach):

सवारीगाड़ी में बैठा सवारी मालगाड़ी को 40 सेकेंड में पार करता है। इसका तात्पर्य है कि मालगाड़ी में बैठा आदमी सवारीगाड़ी को (40 − 20 =) 20 सेकेंड में पार करता है।

yoursmanboob

(ऐसा इसलिए है क्योंकि दोनों आदमियों का सापेक्ष चाल एक समान है)
इसलिए, हम इस निष्कर्ष पर पहुँच सकते हैं कि एक आदमी मालगाड़ी को पार करने में जितना समय लेता है उसका दुगुना समय सवारीगाड़ी को पार करने में लेता है।
∴ उनकी लंबाई का अनुपात = 40 : 20 = 2 : 1

उदा. 24: एक रेलगाड़ी 50 कि. मी. चलने के बाद दुर्घटनाग्रस्त हो जाती है। इसके कारण उसकी चाल प्रारंभिक चाल की $\frac{3}{4}$ गुनी हो जाती है और गन्तव्य पर 35 मिनट देर से पहुँचती है। यदि दुर्घटना उक्त स्थान से 24 कि. मी. आगे चलकर हुई होती तो गाड़ी गन्तव्य पर केवल 25 मिनट देर से पहुँचती। रेलगाड़ी की चाल ज्ञात करें।

हल: ***द्रुत विधि* (Quicker Approach) :**
यदि हम ध्यान से सोचें, तो हम इस निष्कर्ष पर पहुँच सकते हैं कि दोनों ही स्थितियों में 50 कि. मी. तक गाड़ी की चाल समान है। तथा (50 + 24=) 74 कि. मी. बाद भी गाड़ी की चाल दोनों ही स्थितियों में समान है। इस प्रकार समय में अंतर (35 मिनट – 25 मिनट) = 10 मिनट है। ऐसा सिर्फ 24 कि. मी. की यात्रा के दौरान गाड़ी की चालों में अंतर की वजह से है।
अब, यदि रेलगाड़ी की चाल x कि. मी./घंटा हो

तो, $$\frac{24}{\frac{3x}{4}} - \frac{24}{x} = \frac{10}{60}$$

या, $$\frac{32-24}{x} = \frac{10}{60}$$

$$\therefore \quad x = \frac{8\times 60}{10} = 48 \text{ कि. मी./घंटा}$$

***सूत्र विधि* (Direct Formula) :**

$$\text{रेलगाड़ी की चाल} = \frac{24\left(1-\frac{3}{4}\right)}{\frac{3}{4}\left(\frac{35-25}{60}\right)} = \frac{6\times 4\times 6}{3} = 48 \text{ कि. मी. प्रति घंटा}$$

नोट: उपर्युक्त सूत्र में अंश (Numerator) स्पष्ट है। $\left(1-\frac{3}{4}\right)$ चाल में भिन्नात्मक परिवर्तन (fractional change) को दर्शाता है। माना कि प्रारंभ में यह 1 था। दुर्घटना के बाद यह $\frac{3}{4}$ हो जाता है। हर के दो भाग हैं $\frac{3}{4}$ एवं $\left(\frac{35-25}{60}\right)$। $\frac{3}{4}$ परिवर्तित भिन्नात्मक चाल

yoursmahboob

है। $\frac{35-25}{60}$, आगमन समय (Arrival Time) में अंतर (घंटा में) है।

उदा. 25: एक रेलगाड़ी दिल्ली से अमृतसर के लिए 2 बजकर 45 मिनट अपराह्न (pm) पर रवाना होती है एवं 50 कि. मी. प्रति घंटे की रफ्तार से चलती है। एक दूसरी रेलगाड़ी अमृतसर से दिल्ली के लिए 1 बजकर 35 मिनट अपराह्न (pm) पर रवाना होती है और 60 कि. मी. प्रति घंटे की रफ्तार से चलती है। यदि दिल्ली एवं अमृतसर के बीच की दूरी 510 कि. मी. हो तो दिल्ली से कितनी दूरी पर दोनों रेलगाड़ियाँ मिलेंगी?

हल: माना कि दोनों रेलगाड़ियाँ दिल्ली से x कि. मी. पर मिलती हैं। तो उनके मिलने का समय

$$= 2.45 \text{ अपराह्न} + \frac{x}{50} = 1.35 \text{ अपराह्न} + \frac{510-x}{60}$$

या, $(2.45 \text{ अपराह्न} - 1.35 \text{ अपराह्न}) + \left(\frac{x}{50} + \frac{x}{60}\right) = \frac{510}{60} = \frac{17}{2}$

या, $\left(1\frac{1}{6} \text{ घंटा}\right) + x\left(\frac{50+60}{50\times 60}\right) = \frac{17}{2}$

या, $x\left(\frac{110}{3000}\right) = \frac{17}{2} - \frac{7}{6} = \frac{44}{6}$

$\therefore x = \frac{44}{6} \times \frac{3000}{110} = 200$ कि. मी.

द्रुत विधि (Quicker Approach) :

दूसरी गाड़ी (अमृतसर से) अपनी यात्रा पहले प्रारंभ करती है। यह $60 \times (2.45 \text{ अपराह्न} - 1.35 \text{ अपराह्न}) = 60 \times 1\frac{1}{6}$ घंटा $= 70$ कि. मी. की दूरी तय कर चुका होता है जब पहली गाड़ी (दिल्ली से) अपनी यात्रा प्रारंभ करती है।

अब, दोनों ही रेलगाड़ियाँ $(510 - 70 =)$ 440 कि. मी. की दूरी $(50 + 60 =)$ 110 कि. मी. प्रति घंटा की सापेक्ष चाल से तय करती है।

इस प्रकार, पहली गाड़ी के 2.45 अपराह्न पर चलने के बाद, ये $\frac{440}{110} = 4$ घंटे बाद मिलते हैं।

अब, पहली गाड़ी दूसरी गाड़ी से मिलने के लिए $4 \times 50 = 200$ कि. मी. की दूरी तय करती है।

सूत्र विधि (Direct Formula) :

उपर्युक्त विधि से हमें एक निम्नलिखित सूत्र प्राप्त हो सकता है।

दिल्ली से मिलन बिंदु (meeting point) अर्थात् पहली गाड़ी का आरंभिक बिंदु

yoursmahboob

$$= S\left[\frac{\text{कुल दूरी} - S_2 \times (T_1 - T_2)}{S_1 + S_2}\right]$$

जहाँ; S_1 = पहली गाड़ी की चाल

S_2 = दूसरी गाड़ी की चाल

T_1 = पहली गाड़ी के चलने का समय

T_2 = दूसरी गाड़ी के चलने का समय

$$= 50\left[\frac{510 - 60 \times 7}{60 + 50}\right] = 50\left[\frac{440}{110}\right] = 200 \text{ कि. मी.}$$

उदा. 26: एक रेलगाड़ी स्टेशन A एवं B के बीच की दूरी 45 मिनट में तय करता है। यदि चाल को 5 कि. मी. प्रति घंटा कम कर दी जाए तो यह उतनी ही दूरी को 48 मिनट में तय करती है। स्टेशन A एवं B के बीच की दूरी (कि. मी. में) क्या है? रेलगाड़ी की चाल भी ज्ञात करें।

हल: माना कि दूरी x कि. मी. है तथा रेलगाड़ी की चाल y कि. मी./घंटा है।

इस प्रकार, प्रश्नानुसार, दो समीकरण प्राप्त होते हैं।

1. $\frac{x}{y} = \frac{45}{60} = \frac{3}{4} \Rightarrow x = \frac{3}{4}y$

2. $\frac{x}{y-5} = \frac{48}{60} = \frac{4}{5} \Rightarrow x = \frac{4}{5}(y-5)$

(1) एवं (2) से,

$$\frac{3}{4}y = \frac{4}{5}(y-5)$$

या, $y\left(\frac{4}{5} - \frac{3}{4}\right) = 4$

या, $y = \frac{4 \times 20}{16 - 15} = 80$ कि. मी./घंटा

इसलिए चाल = 80 कि. मी./घंटा एवं दूरी $x = \frac{3}{4} \times 80 = 60$ कि. मी.

सूत्र विधि (Direct Formula) :

रेलगाड़ी की चाल = $\frac{48}{48 - 45} \times 5 = 80$ कि. मी./घंटा

एवं दूरी = $5\left[\frac{45 \times 48}{48 - 45}\right]\frac{1}{60} = 60$ कि. मी.

yoursmartboob

नोट : (1) दूरी के लिए सूत्र में हम $\frac{1}{60}$ का प्रयोग मिनट को घंटा में परिवर्तित करने के लिए किया गया है।

(2) दूरी के सूत्र को हमें याद रखने की आवश्यकता नहीं है। एक बार जब हमें चाल ज्ञात हो जाता है तो हम पहली सूचना की मदद से दूरी निकाल सकते हैं।

इस प्रकार दूरी = $80 \times \frac{45}{60} = 60$ कि. मी.

उदा. 27: दो स्थानों P एवं Q के बीच की दूरी 162 कि. मी. है। एक रेलगाड़ी P से Q की ओर प्रस्थान करती है; ठीक उसी समय एक दूसरी रेलगाड़ी Q से P की ओर प्रस्थान करती है। दोनों रेलगाड़ियाँ प्रस्थान करने के 6 घंटे बाद मिलती हैं। यदि P से Q की ओर जाने वाली रेलगाड़ी दूसरी रेलगाड़ी से 8 कि. मी. प्रति घंटा तेज चलती है तो दोनों रेलगाड़ियों की चाल ज्ञात करें।

हल: माना कि दोनों रेलगाड़ियों की चाल क्रमशः p कि. मी. प्रति घंटा तथा q कि. मी. प्रति घंटा है। इस प्रकार,

$$p + q = \frac{162}{6} = 27 \quad \text{.....(i) एवं}$$

$$p - q = 8 \quad \text{.....(ii)}$$

(i) + (ii) से

$$2p = 35 \quad \therefore \quad p = 17.5 \text{ कि. मी./घंटा}$$

एवं (i) – (ii) से

$$2q = 19 \quad \therefore \quad q = 9.5 \text{ कि. मी./घंटा}$$

सूत्र विधि (Direct Formula) :

रेलगाड़ियों की चाल = $\frac{162 + 6 \times 8}{2 \times 6}$ एवं $\frac{162 - 6 \times 8}{2 \times 6}$

उदा. 28: दो रेलगाड़ियाँ A एवं B क्रमशः दिल्ली से पटना की ओर एवं पटना से दिल्ली की ओर प्रस्थान करती हैं। दोनों एक दूसरे को पार करके वे 3 घंटा 48 मिनट एवं 3 घंटा 20 मिनट में क्रमशः पटना एवं दिल्ली पहुँचती हैं। यदि दिल्ली से प्रस्थान करने वाली रेलगाड़ी की चाल 45 कि. मी./घंटा है तो दूसरी रेलगाड़ी की चाल ज्ञात करें।

हल : ***विस्तार विधि* (Detail Method) :**

A M B

दिल्ली (45 कि. मी./घंटा) पटना (x कि. मी./घंटा)

माना कि रेलगाड़ी B की चाल x कि. मी./घंटा है एवं M पर मिलते हैं।

अब, दूरी MB = 45 × (4 घंटा 48 मिनट)

$$= 45 \times \left(4\frac{4}{5}\right) = 45 \times \left(\frac{24}{5}\right) = 216 \text{ कि. मी.}$$

yoursmahboob

एवं दूरी M = $x \times$ (3 घंटा + 20 मिनट)

$$= x \times \left(3\frac{1}{3}\right) = \frac{10x}{3} \text{ कि. मी.}$$

अब, पटना से M पहुँचने में रेलगाड़ी के द्वारा लिया गया समय = दिल्ली से M पहुँचने में लगा समय

या, $10x^2 = 216 \times 3 \times 45$

या, $x^2 = 2916 \quad \therefore x = 54$ कि. मी./घंटा

द्रुत विधि (Quicker Method) :

दूसरी रेलगाड़ी की चाल = पहली रेलगाड़ी की चाल $\times \sqrt{\dfrac{\text{मिलने के बाद पहली गाड़ी द्वारा लिया गया समय}}{\text{मिलने के बाद दूसरी गाड़ी द्वारा लिया गया समय}}}$

$$= 45 \times \sqrt{\frac{4\frac{4}{5}}{3\frac{1}{3}}} = 45 \times \sqrt{\frac{24}{5} \times \frac{3}{10}}$$

$$= 45 \times \sqrt{\frac{36}{25}} = 45 \times \frac{6}{5} = 54 \text{ कि. मी./घंटा}$$

उदा. 29: दो रेलगाड़ियों की चालों का अनुपात 3 : 4 है। वे समानान्तर पटरियों पर विपरीत दिशा में जा रहे हैं। यदि प्रत्येक को एक खंभा को पार करने में 3 सेकेंड लगता है तो रेलगाड़ियों को एक दूसरे को पूरी तरह पार करने में कितना समय लगेगा?

हल: चूँकि दोनों रेलगाड़ियाँ एक खंभे को बराबर समय में पार करती हैं इसलिए उनकी चालों का अनुपात एवं उनकी लंबाइयों का अनुपात बराबर होना चाहिए। अर्थात् दोनों रेलगाड़ियों की लंबाइयों का अनुपात 3 : 4 है।

माना कि दोनों की लंबाइयाँ क्रमशः $3x$ एवं $4x$ मीटर हैं; चूँकि प्रत्येक को एक खंभे को पार करने में 3 सेकेंड लगता है, इसलिए पहली रेलगाड़ी की चाल $= \dfrac{3x}{3} = x$ मी./सेकेंड एवं दूसरी रेलगाड़ी की चाल $= \dfrac{4x}{3}$ मी./सेकेंड

चूँकि दोनों विपरीत दिशा में चल रही हैं, उनकी सापेक्ष चाल $= x + \dfrac{4x}{3} = \dfrac{7x}{3}$ मी./सेकेंड

उनकी लंबाइयों का योगफल $= 3x + 4x = 7x$ मी.

$\therefore$ एक दूसरे को पार करने में लगा समय $= \dfrac{7x}{\frac{7x}{3}} = 3$ सेकेंड

yourmanboob

द्रुत विधि (Quicker Approach) : उपर्युक्त स्थिति में जहाँ प्रत्येक रेलगाड़ी एक खंभे को पार करने में बराबर समय लेती है, वे एक दूसरे को पार करने में भी उतना ही समय लेंगी अर्थात् 3 सेकेंड, उनकी चालों का अनुपात कुछ भी हो। इस प्रकार आपको कोई गणना करने की आवश्यकता नहीं है। उत्तर है 3 सेकेंड।

नोट: (1) यदि उनके चालों का अनुपात 3 : 4 से अलग हो तो आप इस बात की जाँच कर सकते हैं कि उत्तर हमेशा एक ही होगा वह है 3 सेकेंड।

माना कि चालों का अनुपात $= a : b$ तथा

रेलगाड़ियों की लंबाइयों का अनुपात $= a : b$

माना कि लंबाइयाँ ax एवं bx मीटर हैं।

पहली रेलगाड़ी की चाल $= \frac{ax}{3}$ मी./सेकेंड एवं

दूसरी रेलगाड़ी की चाल $= \frac{bx}{3}$ मी./सेकेंड

चूँकि वे विपरीत दिशा में चल रही हैं इसलिए सापेक्ष चाल $= \frac{ax}{3} + \frac{bx}{3} = \frac{x(a+b)}{3}$ मी./सेकेंड

$\therefore$ उनकी लंबाइयों का योग $= ax + bx = x(a+b)$ मी.

$\therefore$ एक दूसरे को पार करने में लगा समय $= \frac{\text{कुल लंबाई}}{\text{सापेक्ष चाल}} = \frac{x(a+b)}{\frac{x(a+b)}{3}} = 3$ सेकेंड

इस प्रकार हम देखते हैं कि परिणाम उनकी चाल के अनुपात पर निर्भर नहीं करता है।

(2) क्या होता है जब दोनों रेलगाड़ियाँ एक खंभे को पार करने में अलग-अलग समय लेती हैं? उदा.-30 ऐसे इस प्रकार के प्रश्न का सबसे ज्यादा व्यापक रूप है।

उदा. 30: दो रेलगाड़ियों की चालों का अनुपात $x : y$ है। समानान्तर पटरियों पर वे विपरीत दिशा में जा रहे हैं। पहली रेलगाड़ी एक खंभे को 'a' सेकेंड में पार करती है। जबकि दूसरी रेलगाड़ी उस खंभे को 'b' सेकेंड में पार करती है। रेलगाड़ियों को एक दूसरे को पूरी तरह पार करने में कितना समय लगेगा?

हल: माना कि चालें Ax मी./से. एवं Ay मी./सेकेंड हैं।

तो पहली रेलगाड़ी की लंबाई $= Ax \times a = Axa$ मीटर

एवं दूसरी रेलगाड़ी की लंबाई $= Ay \times b = Ayb$ मीटर

एक दूसरे को पार करने में लगा समय $= \frac{\text{लंबाइयों का योग}}{\text{चालों का योग}}$

$$= \frac{Axa + Ayb}{Ax + Ay} = \frac{ax + by}{x + y} \text{ सेकेंड}$$

उपर्युक्त व्यापक सूत्र उदा.-29 में प्रयोग किया जा सकता है।

yoursmahboob

यहाँ $x : y = 3 : 4$ एवं $a = b = 3$ सेकेंड

इस प्रकार, एक दूसरे को पार करने में लगा समय

$$\frac{3\times3+3\times4}{3+7}=\frac{21}{7}=3 \text{ सेकेंड}$$

जैसा कि **उदा. 29** में है, यदि $a = b$ हो तो व्यापक सूत्र निम्नलिखित हो जाता है:

$$\text{एक दूसरे को पार करने में लगा अभीष्ट समय} = \frac{a(x+y)}{(x+y)} = a \text{ सेकेंड}$$

उदा. 31: दो रेलगाड़ियों की चालों का अनुपात 7 : 9 है। वे समानान्तर पटरियों पर विपरीत दिशा में जा रही हैं। पहली रेलगाड़ी एक खंभे को 4 सेकेंड में पार करती है जबकि दूसरी गाड़ी उस खंभे को 6 सेकेंड में पार करती है। गाड़ियों के द्वारा एक दूसरे को पूरी तरह पार करने में लिया गया समय ज्ञात करें।

हल: उदा.–30. के व्यापक सूत्र का प्रयोग करने पर,

$$\text{अभीष्ट समय} = \frac{7\times4+9\times6}{7+9}=\frac{82}{16}=5\frac{1}{8} \text{ सेकेंड}$$

नोट: विस्तार विधि से इसके उत्तर की जाँच करें।

उदा. 32: दो रेलगाड़ियाँ समानान्तर पटरियों पर विपरीत दिशा में क्रमशः 64 कि. मी./घंटा एवं 96 कि. मी./घंटा की रफ्तार से जा रही हैं। पहली रेलगाड़ी एक खंभे को 5 सेकेंड में पार करती है जबकि दूसरी गाड़ी उसी खंभे को 6 सेकेंड में पार करती है। रेलगाड़ियों द्वारा एक दूसरे को पूरी तरह पार करने में लिया गया समय ज्ञात करें।

हल: ***विस्तार विधि* (Detail Method):**

$$\text{पहली गाड़ी की लंबाई} = 64\left(\frac{5}{18}\right)\times5 \text{ मीटर}$$

$$\text{दूसरी गाड़ी की लंबाई} = 96\left(\frac{5}{18}\right)\times6 \text{ मीटर}$$

$$\text{सापेक्ष चाल} = \left[64\left(\frac{5}{18}\right)+96\left(\frac{5}{18}\right)\right] \text{ मी./सेकेंड}$$

∴ एक दूसरे को पार करने में लगा अभीष्ट समय

$$= \frac{\text{दोनों रेलगाड़ियों की कुल लंबाई}}{\text{सापेक्ष चाल}} = \frac{64\left(\frac{5}{18}\right)\times5+96\left(\frac{5}{18}\right)\times6}{64\left(\frac{5}{18}\right)+96\left(\frac{5}{18}\right)}$$

$$= \frac{64\times5+96\times6}{64+96}=\frac{320+576}{160}=\frac{896}{160}=\frac{28}{5}=5\frac{3}{5} \text{ सेकेंड}$$

yoursmahboob

द्रुत विधि (Quicker Method):

चालों का अनुपात = 64 : 96 = 2 : 3

खंभे को रेलगाड़ियों द्वारा पार करने में लगा समय = 5 सेकेंड एवं 6 सेकेंड

उदा.-30 में दिए गए व्यापक सूत्र के प्रयोग से, एक दूसरे को पार करने में लगा अभीष्ट

$$\text{समय} = \frac{2\times5+3\times6}{2+3} = \frac{10+18}{5} = \frac{28}{5} = 5\frac{3}{5} \text{ सेकेंड}$$

अभ्यास प्रश्न

1. 40 कि.मी./घंटा की रफ्तार से चल रही 130 मीटर लंबी गाड़ी को एक किलोमीटर पत्थर (kilometre-stone) पार करने में कितना वक्त लगेगा?
2. 40 किलोमीटर/घंटा की रफ्तार से चल रही 60 मीटर लंबी रेलगाड़ी को 90 मीटर लंबा प्लेटफॉर्म पार करने में कितना वक्त लगेगा ?
3. 30 कि.मी./घंटा की रफ्तार से जा रही किसी गाड़ी को एक निश्चित बिन्दु पार करने में $13\frac{1}{2}$ सेकेंड लगता है। रेलगाड़ी की लंबाई बताएँ।
4. उस पुल की लंबाई बताएँ, जिसे 130 मी. लंबी रेलगाड़ी, जो 45 किलोमीटर/घंटा की रफ्तार से जा रही है, 30 सेकेंड में पार कर सकती है।
5. 36 किलोमीटर/घंटा की रफ्तार से यदि कोई रेलगाड़ी 8 सेकेंड में किसी खंभे को पार करती है तो रेलगाड़ी की लंबाई बताएँ।
6. 50 मी. लंबी रेलगाड़ी 100 मी. लंबे प्लेटफॉर्म को 10 सेकेंड में पार करती है। रेलगाड़ी की चाल क्या है ?
7. 42 किलोमीटर/घंटा की रफ्तार से चल रही 60 मी. लंबी रेलगाड़ी, उसी दिशा में 30 कि.मी./घंटा की रफ्तार से जा रही 84 मीटर लंबी एक दूसरी रेलगाड़ी को कितने समय में पार करेगी?
8. 75 मी. लंबी एक रेलगाड़ी 6 कि.मी./घंटा की रफ्तार से टहल रहे व्यक्ति को $7\frac{1}{2}$ सेकेंड में पार कर लेती है। साथ ही, वह गाड़ी दूसरे व्यक्ति को पार $6\frac{2}{3}$ सेकेंड में पार करती है। दूसरा व्यक्ति किस रफ्तार से टहल रहा था ?
9. दो गाड़ियाँ क्रमशः 45 किलोमीटर/घंटा एवं 36 किलोमीटर/घंटा की रफ्तार से समानांतर पटरियों पर विपरीत दिशा में जा रही हैं। इन्हें एक-दूसरे को पार करने में 8 सेकेंड लगते हैं। जब ये गाड़ियाँ उसी रफ्तार से समान दिशा में जा रही होती हैं तो तेज रफ्तार से चल रही गाड़ी में बैठा एक व्यक्ति दूसरी गाड़ी को 30 सेकेंड में पार कर लेता है। गाड़ियों की लंबाई बताएँ।
10. दो रेलगाड़ियाँ जिनकी लंबाइयाँ क्रमशः 100 मी. एवं 80 मीटर हैं, समानांतर पटरियों पर चल रही हैं। वे जब विपरीत दिशाओं में जा रही हों तो एक-दूसरे को 9 सेकेंड में पार कर लेती हैं, पर यदि वे एक ही दिशा में जा रही हों तो धीमी गाड़ी को पार करने में तेज रफ्तार वाली गाड़ी को 18 सेकेंड लगता है। दोनों रेलगाड़ियों की गति किलोमीटर/घंटा में बताएँ।

yousmahboob

11. 80 मीटर लंबी दो गाड़ियाँ समानांतर पटरियों पर चल रही हैं। यदि ये गाड़ियाँ एक ही दिशा में जा रही हों तो तेज रफ्तार वाली गाड़ी धीमी रफ्तार वाली गाड़ी को 1 मिनट में पार कर लेती है; पर यदि ये भिन्न-भिन्न दिशाओं में जा रही हों तो एक दूसरे को पार करने में 3 सेकेंड का समय लगता है। इन दोनों गाड़ियों की रफ्तार मी./सेकेंड में बताएँ।

12. एक रेलगाड़ी को बिजली का कोई खंभा पार करने में 5 सेकेंड लगता है। यदि गाड़ी की लंबाई 120 मीटर हो तो 180 मीटर लंबे प्लेटफॉर्म को पार करने में इसे कितना वक्त लगेगा?

13. एक रेलगाड़ी 40 किलोमीटर/घंटा की रफ्तार से चल रही है। इस गाड़ी के समानांतर कोई व्यक्ति उसी दिशा में 25 किलोमीटर/घंटा की रफ्तार से जा रहा है; यदि रेलगाड़ी इस व्यक्ति को 48 सेकेंड में पार कर ले तो रेलगाड़ी की लंबाई है _____ मीटर।

14. एक रेलगाड़ी किसी खंभे को 15 सेकेंड में पार कर लेती है तथा 100 मीटर लंबे किसी प्लेटफॉर्म को 25 सेकेंड में पार कर लेती है। रेलगाड़ी की लंबाई ____ मी. है।

15. 100 मी. लंबी एक रेलगाड़ी एक मील का पत्थर (milestone) 10 सेकेंड में पार कर लेती है तथा विपरीत दिशा में जा रही समान लंबाई वाली दूसरी रेलगाड़ी को पार करने में इसे 8 सेकेंड लगते हैं। दूसरी रेलगाड़ी की गति है _____ किलोमीटर/घंटा।

16. दो रेलगाड़ियाँ क्रमशः 62 कि.मी./घंटा एवं 40 कि.मी./घंटा की रफ्तार से विपरीत दिशाओं में जा रही हैं। यदि इनमें से एक रेलगाड़ी की लंबाई 250 मी. हो तथा ये एक दूसरे को 18 सेकेंड में पार कर लेती हों तो दूसरी गाड़ी की लंबाई है _____ मीटर।

17. समान दिशा में क्रमशः 40 किलोमीटर एवं 22 किलोमीटर/घंटा की रफ्तार से जा रही दो गाड़ियाँ एक-दूसरे को 1 मिनट में पार कर लेती हैं। यदि पहले रेलगाड़ी की लंबाई 125 मीटर है तो दूसरी रेलगाड़ी की लंबाई है _____ मीटर।

18. 100 मीटर लंबी कोई रेलगाड़ी, जो 50 कि.मी./घंटा की रफ्तार से चल रही है, विपरीत दिशा से आनेवाली 120 मीटर लंबी रेलगाड़ी को 6 सेकेंड में पार कर लेती है। दूसरी रेलगाड़ी की चाल है _____ कि.मी./घंटा।

19. दो स्टेशन A और B, एक ही रेखा पर 110 किलोमीटर की दूरी पर स्थित हैं। एक रेलगाड़ी स्टेशन A से प्रातः 7 बजे 20 किलोमीटर/घंटा की रफ्तार से B की ओर रवाना होती है। दूसरी रेलगाड़ी स्टेशन B से प्रातः 8 बजे 25 कि.मी./घंटा की रफ्तार से A की ओर रवाना होती है। वे आपस में कितने बजे मिलेंगे।

20. एक रेलगाड़ी समान दिशा में क्रमशः 2 कि.मी./घंटा एवं 4 कि.मी./घंटा की रफ्तार से चल रहे व्यक्तियों को क्रमशः 9 एवं 10 सेकेंड में पार कर लेती है तो गाड़ी की लंबाई बताएँ?

1) 72 मी. 2) 54 मी. 3) 50 मी. 4) 45 मी.

उत्तर

1. समय = $\frac{\text{कुल दूरी}}{\text{चाल}} = \frac{0.130}{40}$ घंटा = $\frac{0.130 \times 60 \times 60}{40} = 11.7$ सेकेंड

2. चाल = 40 कि.मी./घंटा = $40 \times \frac{5}{18}$ मी./सेकेंड

yoursmahboob

$\therefore$ समय = $\frac{(60+90)}{40\times5}\times18=\frac{150\times18}{40\times5}$ = 13.5 सेकेंड

3. 30 किलोमीटर/घंटा = $30\times\frac{5}{18}=\frac{25}{3}$ मी./से.

रेलगाड़ी की लंबाई = $\frac{25}{3}\times\frac{27}{2}=\frac{225}{2}$ = 112.5 मी.

4. 45 किलोमीटर/घंटा = $45\times\frac{5}{18}=\frac{25}{2}$ = 12.5 मी./से.

रेलगाड़ी द्वारा 30 सेकेंड में तय की गई दूरी = 12.5 × 30 = 375 मीटर

$\therefore$ पुल की लंबाई = 375 − 130 = 245 मीटर

5. 36 किलोमीटर/घंटा = $36\times\frac{5}{18}$ = 10 मीटर/सेकेंड

$\therefore$ रेलगाड़ी द्वारा 8 सेकेंड में तय की गई दूरी = रेलगाड़ी की लंबाई = 8 × 10 = 80 मीटर

6. रेलगाड़ी की चाल = $\frac{100+50}{10}$ = 15 मी./से. = $\frac{15\times18}{5}$ = 54 कि.मी./घंटा

7. आपेक्षिक चाल = (42 − 30 =) 12 कि.मी./घंटा = $12\times\frac{5}{18}=\frac{10}{3}$ मी./सेकेंड

$\therefore$ समय = $\frac{\text{दोनों रेलगाड़ियों की लंबाइयों का योगफल}}{\text{आपेक्षिक चाल}}$

$=\frac{84+60}{\frac{10}{3}}=\frac{144\times3}{10}=43.2$ सेकेंड

8. पहले व्यक्ति और रेलगाड़ी की आपेक्षिक चाल = $\frac{75}{\frac{15}{2}}$ = 10 मी./से.

= $10\times\frac{18}{5}$ = 36 किलोमीटर/घंटा

$\therefore$ गाड़ी की चाल = 36 + 6 = 42 कि.मी./घंटा

अब, दूसरे व्यक्ति और रेलगाड़ी की आपेक्षिक चाल = $\frac{75}{27}\times4$ मी./से.

= $\frac{300}{27}\times\frac{18}{5}$ = 40 कि.मी./घंटा

$\therefore$ दूसरे व्यक्ति की चाल = 42 − 40 = 2 कि.मी./घंटा

yoursmartbook

द्रुत विधि (Quicker Method):

दूसरे व्यक्ति की चाल = पहले व्यक्ति के मुकाबले रेलगाड़ी की आपेक्षिक चाल + पहले व्यक्ति की चाल – दूसरे व्यक्ति के मुकाबले रेलगाड़ी की आपेक्षिक चाल

$$= \left[\frac{75}{\frac{15}{2}} \times \frac{18}{5}\right] + 6 - \left[\frac{75}{27} \times 4 \times \frac{18}{5}\right]$$

$= 36 + 6 - 40 = 2$ कि.मी./घंटा

9. दोनों रेलगाड़ियों की आपेक्षिक चाल = (45 + 36 =) 81 किलोमीटर/घंटा
(जब दोनों रेलगाड़ियाँ विपरीत दिशाओं में जा रही हों।)

$$= 81 \times \frac{5}{18} = \frac{45}{2} = 22\frac{1}{2} \text{ मी./सेकेंड}$$

जब दोनों रेलगाड़ियाँ एक ही दिशा में जा रही हों तो
आपेक्षिक चाल = (45 – 36 = 9) कि.मी./घंटा

$$= \frac{9 \times 5}{18} = \frac{5}{2} \text{ मी./सेकेंड}$$

तेज रफ्तार से चल रहे गाड़ी में बैठा व्यक्ति धीमी गति वाले गाड़ी को लंबाई 30 सेकेंड में पार कर लेता है।

$\therefore$ धीमी गति से चल रही गाड़ी की लंबाई $= \frac{5}{2} \times 30 = 75$ मीटर

तेज गति से चल रही गाड़ी की लंबाई = 180 – 75 = 105 मीटर

द्रुत विधि (Quicker Method):

धीमी रफ्तार वाली रेलगाड़ी की लंबाई = 30 × (दोनों गाड़ियों की सापेक्ष गति)

$$= 30(45-36)\frac{5}{18} = 75 \text{ मीटर}$$

तेज रफ्तार से चलने वाली रेलगाड़ी की लंबाई
= दोनों गाड़ियों की कुल लंबाई – धीमी गति वाली रेलगाड़ी की लंबाई

$$= 8(45+36)\frac{5}{18} - 75$$

$$= 8 \times \frac{81 \times 5}{18} - 75$$

= 180 – 75 = 105 मीटर

yoursmahboob

10. **द्रुत विधि (Quicker Method):**

R_1 = आपेक्षिक गति, जब दोनों गाड़ियाँ एक ही दिशा में जा रही हों

$$= \frac{100+80}{18} = 10 \text{ मी./से.}$$

R_2 = आपेक्षिक गति, जब दोनों गाड़ियाँ विपरीत दिशा में जा रही हों

$$= \frac{100+80}{9} = 20 \text{ मी./से.}$$

तेज गति वाली रेलगाड़ी की चाल $= \frac{R_1+R_2}{2} = \frac{10+20}{2} = 15$ मी./से.

$$= 15 \times \frac{18}{5} = 54 \text{ कि.मी./घंटा}$$

धीमी गति वाली रेलगाड़ी की चाल $= \frac{R_2-R_1}{2} = \frac{20-10}{2} = 5$ मी./से.

$$= 5 \times \frac{18}{5} = 18 \text{ कि.मी./घंटा}$$

11. ठीक प्रश्न सं.–10 की तरह

$$R_1 = \frac{80+80}{60} = \frac{160}{60} = \frac{8}{3} \text{ मी./से.}$$

$$R_2 = \frac{80+80}{3} = \frac{160}{3} \text{ मी./से.}$$

$\therefore$ तेज रफ्तार वाली गाड़ी की चाल $= \frac{\frac{8}{3}+\frac{160}{3}}{2} = \frac{168}{6} = \frac{84}{3}$ मी./से.

$$= \frac{84}{3} \times \frac{18}{5} = 100.8 \text{ कि.मी./घंटा}$$

धीमे गति से चल रही गाड़ी की चाल $= \frac{\frac{160}{3}-\frac{8}{3}}{2} = \frac{152}{6}$ मी./से.

$$= \frac{152}{6} \times \frac{18}{5} = 91.2 \text{ कि.मी./घंटा}$$

12. रेलगाड़ी की चाल $= \frac{120}{5} = 24$ मी./सैकेंड

yoursmanboob

$\therefore$ प्लेटफॉर्म को पार करने में रेलगाड़ी को लगा समय = $\frac{120+180}{24}$ = 12.5 सेकेंड

13. रेलगाड़ी की लंबाई = आपेक्षिक गति × समय

$$= (40 - 25)\left(\frac{5}{18}\right)\times 48$$

$$= \frac{15\times 5\times 48}{18} = 200 \text{ मीटर}$$

14. मान लिया कि रेलगाड़ी की लंबाई = x मीटर

प्रश्नानुसार, गाड़ी की चाल = $\frac{x}{15} = \frac{x+100}{25}$

या, $25x = 15x + 1500$

या, $10x = 1500$

$\therefore x = 150$ मीटर

द्रुत विधि (Quicker Method): (उदा.–21 देखें)

रेलगाड़ी की लंबाई =

$$\frac{\text{खंभे को पार करने में लगा समय} \times \text{प्लेटफॉर्म की लंबाई}}{\text{प्लेटफॉर्म को पार करने में लगा समय} - \text{खंभे को पार करने में लगा समय}}$$

$$= \frac{15\times 100}{25-10} = 150 \text{ मीटर}$$

15. पहली गाड़ी की रफ्तार = $\frac{100}{10} = 10$ मी./सेकेंड

दूसरी गाड़ी की तुलना में आपेक्षिक चाल = $\frac{100+10}{8} = 25$ मी./सेकेंड

$\therefore$ दूसरी गाड़ी की चाल = 25 − 10 = 15 मी./सेकेंड

$$= 15\times\frac{18}{5} = 54 \text{ कि.मी./घंटा}$$

16. **द्रुत विधि (Quicker Method):**

दूसरी गाड़ी की लंबाई

= आपेक्षिक चाल × एक दूसरे को पार करने में लगा समय − पहली रेलगाड़ी की लंबाई

$$= \left(102\times\frac{5}{18}\right)\times 18 - 250 = 260 \text{ मीटर}$$

17. प्रश्न–16 की तरह

yoursmartboob

दूसरी गाड़ी की लंबाई

= आपेक्षिक गति × एक-दूसरे को पार करने में लगा समय − पहली रेलगाड़ी की लंबाई

$= \left\{(40 + 22)\frac{5}{18}\right\} \times 60 - 125$

= (300 − 125 =) 175 मीटर

नोट: प्रश्न-16 में दोनों गाड़ियाँ एक दूसरे के विपरीत दिशा में जा रही हैं। इसलिए उनकी आपेक्षिक गति =62+40 = 102 किलोमीटर/घंटा। प्रश्न–17 में, दोनों गाड़ियाँ एक ही दिशा में चल रही हैं।

∴ आपेक्षिक गति = 40 − 22 = 18 कि.मी./घंटा

18. जब गाड़ियाँ विपरीत दिशाओं में जा रही हों, तो दूसरी रेलगाड़ी की चाल

= आपेक्षिक गति − पहली रेलगाड़ी की चाल

$= \left(\frac{120 + 100}{6} \times \frac{18}{5}\right) - 50$

= 132 − 50 = 82 कि.मी./घंटा

19. 8 बजे प्रातः तक, A से चलने वाली गाड़ी 20 कि.मी. की दूरी तय कर लेती है।
शेष दूरी = 110 − 20 = 90 किलोमीटर गाड़ियों की आपेक्षिक गति = 20 + 25 = 45 किलोमीटर/घंटा की रफ्तार से तय की जाती है।

∴ वे आपस में मिलते हैं $\frac{90}{45} = 2$ घंटे बाद अर्थात् 8 − 2 = 10 बजे पूर्वाह्न

द्रुत विधि (Quicker Method):

उनके मिलने का समय = 8.00 पूर्वाह्न + $\frac{110 - (8 \text{ पूर्वाह्न} - 7 \text{ पूर्वाह्न}) \times 20}{20 + 25}$

= 8.00 + 2 = 10 बजे पूर्वाह्न

20. मान लिया कि रेलगाड़ी की लंबाई = x मीटर
हम जानते हैं कि, जब रेलगाड़ी और व्यक्ति एक ही दिशा में चल रहे हों तो
आपेक्षिक चाल = गाड़ी की चाल − व्यक्ति की चाल

अब, दोनों ही स्थितियों में रेलगाड़ी की चाल $= \frac{x}{9} + 2\left(\frac{5}{18}\right) = \frac{x}{10} + 4\left(\frac{5}{18}\right)$

या, $\frac{x}{9} - \frac{x}{10} = \frac{10}{9} - \frac{5}{9}$

या, $\frac{x}{90} = \frac{5}{9}$

∴ $x = \frac{5}{9} \times 90 = 50$ मीटर

yoursmahboob

तेज विधि (Quicker Method): देखें (उदा.-19)

जब सभी एक ही दिशा में जा रहे हों

रेलगाड़ी की लंबाई

$$= \frac{\text{दोनों व्यक्तियों की सापेक्ष गति} \times \text{पार करने में लगे समय का गुणनफल}}{\text{पार करने में लगे समय का अंतर}}$$

$$= \frac{(4-2)\frac{5}{18}\times 9\times 10}{10-9} = 50 \text{ मीटर}$$

yoursmahboob

धारा
(Stream)

परिचय

आमतौर से नाव या तैराक की चाल शांत जल के संदर्भ में व्यक्त करते हैं। यदि नाव (या तैराक) धारा के विपरीत दिशा में जा रहा हो तो इसे 'प्रतिकूल प्रवाह' (Upstream) कहते हैं, अन्यथा इसे 'अनुप्रवाह' (downstream) कहा जाता है।

यदि नाव या (तैराक) की चाल x हो और यदि धारा की चाल y हो तो प्रतिकूल प्रवाह की स्थिति में आपेक्षिक चाल $= x - y$, तथा अनुप्रवाह की स्थिति मे आपेक्षिक चाल $= x - y$.

प्रमेय: यदि शांत जल में मनुष्य की गति x कि.मी./घंटा हो तथा धारा की चाल y कि.मी./घंटा हो तो धारा की दिशा में व्यक्ति की चाल $= x + y$

धारा के विपरीत दिशा में व्यक्ति की चाल $= x - y$.

इन्हें, जोड़ने, घटाने और 2 से भाग देने पर,

$x = \frac{1}{2}$ (धारा की दिशा में व्यक्ति की चाल + धारा के विपरीत दिशा में व्यक्ति की चाल)

$y = \frac{1}{2}$ (धारा की दिशा में व्यक्ति की चाल − धारा के विपरीत दिशा में व्यक्ति की चाल)

इसलिए हमारे पास निम्नलिखित दो तथ्य हैं:

i) शांत जल में व्यक्ति की चाल, धारा के अनुकूल एवं प्रतिकूल दिशाओं में उनकी चालों के योगफल का आधा होता है।

ii) धारा की गति, धारा के अनुकूल एवं प्रतिकूल दिशाओं में व्यक्ति की चालों के अंतर का आधा होता है।

उदा. 1: एक व्यक्ति धारा के विपरीत दिशा में 10 कि.मी./घंटा की रफ्तार से नाव चला सकता है तथा धारा की दिशा में उसकी गति 16 किलोमीटर/घंटा होती है। शांत जल में नाव की चाल एवं धारा की गति बताएँ ?

हल: शांत जल में गति $= \frac{1}{2}(10 - 16) = 13$ कि.मी./घंटा

धारा की गति $= \frac{1}{2}(16 - 10) = 3$ कि.मी./घंटा

उदा. 2: एक व्यक्ति धारा की दिशा में 30 किलोमीटर तैरता है और धारा के विपरीत दिशा में 18 कि.मी. तैरता है। प्रत्येक दूरी तय करने में उसे 3 घंटे लगते हैं। धारा की गति बताएँ।

हल: धारा की दिशा में व्यक्ति की चाल $= \frac{30}{3}$ कि.मी./घंटा $= 10$ कि.मी./घंटा

yoursmahboob

धारा के विपरीत दिशा में व्यक्ति की चाल = $\frac{18}{3}$ कि.मी./घंटा = 6 कि.मी./घंटा

$\therefore$ धारा की गति = $\frac{(10-6)}{2} = 2$ कि.मी./घंटा

उदा. 3: एक व्यक्ति शांत जल में 6 कि.मी./घंटा की रफ्तार से एक नाव खे सकता है। धारा के विपरीत दिशा में उसे धारा की दिशा की अपेक्षा दुगुना समय लगता है। धारा की गति बताएँ।

हल: ***पहली विधि:***

मान लिया कि धारा के विपरीत दिशा में व्यक्ति की गति = x कि.मी./घंटा

$\therefore$ धारा की दिशा में व्यक्ति की गति = $2x$ कि.मी./घंटा

$\therefore$ शांत जल में व्यक्ति की गति = $\frac{1}{2}(x+2x)$ कि.मी./घंटा

$\therefore \frac{3x}{2} = 6$ या, $x = 4$ कि.मी./घंटा

$\therefore$ धारा के विपरीत दिशा में मनुष्य की गति = 4 कि.मी./घंटा

तथा धारा की दिशा में मनुष्य की गति = 8 कि.मी./घंटा

$\therefore$ धारा का वेग = $\frac{1}{2}(8-4) = 2$ कि.मी./घंटा

दूसरी विधि:

यहाँ, धारा के विपरीत दिशा में गति + धारा की दिशा में गति

= 2 × शांत जल में गति

= 2 × 6 = 12 कि.मी./घंटा

प्रतिकूल प्रवाह : अनुप्रवाह = 1 : 2

$\therefore$ 12 को 1 : 2 के अनुपात में विभाजित करने पर,

प्रतिकूल प्रवाह = 4 कि.मी./घंटा

अनुप्रवाह = 8 कि.मी./घंटा

$\therefore$ प्रवाह की गति = $\left(\frac{8-4}{2}\right) = 2$ कि.मी./घंटा

तीसरी विधि (संक्षिप्त विधि):

मान लिया कि धारा की गति = x कि.मी./घंटा

तब, $6 + x = 2(6 - x)$

या, $3x = 6$ $\therefore x = \frac{6}{3} = 2$ कि.मी./घंटा

प्रमेय: एक व्यक्ति शांत जल में x कि.मी./घंटा की रफ्तार से नाव खे सकता है। यदि प्रवाह की गति y कि.मी./घंटा हो और उसे गंतव्य स्थान पहुँचकर वापस लौटने में z घंटे लगते हों तो दोनों

yoursmahboob

स्थानों के बीच की दूरी = $\frac{z(x^2-y^2)}{2x}$.

प्रमाण: धारा के विपरीत दिशा में मनुष्य का वेग = $(x-y)$ कि.मी./घंटा

धारा की दिशा में मनुष्य का वेग = $(x+y)$ कि.मी./घंटा

मान लिया कि अभीष्ट दूरी A कि.मी. है तो,

$$\frac{A}{(x-y)}+\frac{A}{(x+y)}=z$$

या, $\frac{A(x+y+x-y)}{(x-y)(x+y)}=z$

या, $\frac{2Ax}{x^2-y^2}=z$

या, $A=\frac{z(x^2-y^2)}{2x}$

$\therefore$ अभीष्ट दूरी = $\frac{z(x^2-y^2)}{2x}$

उदा. 4: एक व्यक्ति शांत जल में 6 किलोमीटर/घंटा की रफ्तार से नाव खे सकता है। यदि धारा की गति 1.2 किलोमीटर/घंटा हो तो उसे गंतव्य तक पहुँचने एवं वापस लौटने में 1 घंटा लगता है। गंतव्य की दूरी बताएँ।

हल: धारा की दिशा में मनुष्य की गति = $(6+1.2)$ = 7.2 कि.मी./घंटा

धारा के विपरीत दिशा में मनुष्य की गति = $(6-1.2)$ कि.मी./घंटा = 4.8 कि.मी./घंटा.

मान लिया कि अभीष्ट दूरी = x किलोमीटर

$\therefore \frac{x}{7.2}+\frac{x}{4.8}=1$ या, $4.8x+7.2x=7.2\times4.8$

$\Rightarrow x=\frac{7.2\times4.8}{12}=2.88$ कि.मी.

सूत्र से (By Direct Formula):

अभीष्ट दूरी $=\frac{1\times[6^2-(1.2)^2]}{2\times6}$

$=\frac{36-1.44}{12}=3-0.12$

= 2.88 कि.मी.

yourmanhoob

उदा. 5: एक व्यक्ति शांत जल में 7 कि.मी./घंटा की रफ्तार से नाव खे सकता है। यदि धारा की गति 3 कि.मी./घंटा हो तो उसे गंतव्य तक पहुँचकर वापस लौटने में 7 घंटे लग जाते हैं। गंतव्य कितनी दूर स्थित है?

हल: सूत्र से, दूरी = $7\times\frac{(7)^2-(3)^2}{2\times 7}=20$ कि.मी.

उदा. 6: यदि धारा की गति 2 कि.मी./घंटा हो तो एक मोटरबोट को 10 कि.मी. धारा के विपरीत दिशा में जाने एवं पुनः वापस लौटने में कुल मिलाकर 55 मिनट लगते हैं। शांत जल में मोटरबोट की चाल बताएँ।

हल: उपर्युक्त सूत्र का उपयोग करने पर,

$$10=\frac{55}{60}\times\frac{(x)^2-(2)^2}{2x}$$

या, $1200x=55(x^2-4)$

या, $11x^2-240x-44=0$

$\therefore (x-22)(11x-2)=0$

ऋणात्मक मान को छोड़ देने पर

$\therefore x=22$ कि.मी./घंटा

उदा. 7: एक व्यक्ति धारा के विपरीत दिशा में 30 किलोमीटर एवं धारा की दिशा में 44 किलोमीटर की दूरी कुल मिलाकर 10 घंटे में तय कर सकता है। वह धारा के विपरीत दिशा में 40 किलोमीटर एवं धारा की दिशा में 55 किलोमीटर की दूरी 13 घंटे में तय कर सकता है। धारा की गति एवं शांत जल में व्यक्ति की गति बताएँ।

हल: मान लिया कि धारा के विपरीत दिशा में गति = x कि.मी./घंटा

तथा धारा की दिशा में गति = y कि.मी./घंटा

तब, $\frac{30}{x}+\frac{44}{y}=10$

एवं $\frac{40}{x}+\frac{55}{y}=13$

या, $30u+44v=10$

एवं, $40u+55v=13$

जहाँ, $u=\frac{1}{x}$ एवं $v=\frac{1}{y}$

दोनों समीकरणों को हल करने पर,

$u=\frac{1}{5}$ एवं $v=\frac{1}{11}$

$\therefore x=5$ एवं $y=11$

yoursmahboob

∴ शांत जल में व्यक्ति की चाल = $\frac{5+11}{2}$ = 8 कि.मी./घंटा

धारा की गति = $\frac{11-5}{2}$ = 3 कि.मी./घंटा

द्रुत विधि (Quicker Method):

दी गई राशियों को निम्नलिखित क्रम में सजाएँ:

प्रतिकूल-प्रवाह	अनुप्रवाह	समय
30	44	10
40	55	13

धारा के विपरीत दिशा में व्यक्ति की चाल = $\frac{30\times55-40\times44}{55\times10-44\times13}$

= $\frac{110}{-22}$ = 5 कि.मी./घंटा

धारा की दिशा में व्यक्ति की चाल = $\frac{30\times55-40\times40}{30\times13-40\times10}$

= $\frac{-110}{10}$ = 11 कि.मी./घंटा

∴ व्यक्ति की चाल = $\frac{5+11}{2}$ = 8 कि.मी./घंटा

तथा धारा की गति = $\frac{11-5}{2}$ = 3 कि.मी./घंटा

नोट: उपर्युक्त दोनों सूत्रों के हलों में क्या फर्क है ? धारा के विपरीत दिशा के संदर्भ में हम धारा की दिशा में गति एवं समय के मानों का प्रयोग करते हैं, जबकि अनुप्रवाह में गति के संदर्भ में धारा के विपरीत दिशा में चाल तथा समय के मानों का प्रयोग किया जाता है।

दोनों सूत्रों के अंश (Numerator) एक जैसे होते हैं

उदा. 8: एक नाव 6 घंटे में धारा के विपरीत दिशा में 24 किलोमीटर एवं धारा की दिशा में 36 किलोमीटर की दूरी तय करता है, जबकि धारा के विपरीत दिशा में 36 किलोमीटर तथा धारा की दिशा में 24 किलोमीटर की दूरी तय करने में कुल मिलाकर 6.5 घंटे लगाते हैं। धारा की गति ज्ञात करें।

हल: *द्रुत विधि (उदा.–7 में प्रयुक्त) से,*

प्रतिकूल-प्रवाह	अनुप्रवाह	समय
24	36	6
36	24	6.5

yoursmahboob

प्रतिकूल प्रवाह में नाव की गति $= \dfrac{24\times24 - 36\times36}{24\times6 - 36\times6.5}$

$= \dfrac{-720}{-90} = 8$ कि.मी./घंटा

धारा की दिशा में नाव की चाल $= \dfrac{24\times24 - 36\times36}{24\times6.5 - 36\times6}$

$= \dfrac{-720}{60} = 12$ किलोमीटर/घंटा

धारा की चाल $= \dfrac{12-8}{2} = 2$ कि.मी./घंटा

प्रमेय: कोई व्यक्ति धारा की दिशा की ओर स्थित अपने गंतव्य तक x घंटे में पहुँचता है तथा y घंटे में पुनः वापस लौट आता है; यदि धारा की गति z कि.मी./घंटा हो तो शांत जल में व्यक्ति की चाल $= \dfrac{z(x+y)}{y-x}$ कि.मी./घंटा।

प्रमाण: मान लिया कि शांत जल में व्यक्ति की चाल = m किलोमीटर/घंटा

धारा के विपरीत दिशा में उसकी चाल = $(m-z)$ कि.मी./घंटा

तथा, धारा की दिशा में व्यक्ति की चाल = $(m+z)$ कि.मी./घंटा

दिया गया है कि धारा के विपरीत दिशा एवं धारा की दिशा में तय की गई दूरियाँ बराबर हैं।

$\therefore x(m+z) = y(m-z)$

या, $m(y-x) = z(x+y)$

$\therefore m = \dfrac{z(x+y)}{y-x}$ कि.मी./घंटा

उदा. 9: रमेश धारा की दिशा में कोई दूरी 6 घंटे में तय कर सकता है। पर उसे उतनी ही दूरी वापस लौटने में 9 घंटे लग जाते हैं। यदि धारा की गति 3 कि.मी./घंटा हो तो शांत जल में रमेश की चाल बताएँ।

हल: उपर्युक्त सूत्र के प्रयोग से,

शांत जल में रमेश की चाल $= \dfrac{13(9+6)}{9-6} = 15$ कि.मी./घंटा

नोट: **उपप्रमेय:** यदि उपर्युक्त स्थिति में शांत जल में मनुष्य की चाल z कि.मी./घंटा हो और हमें धारा की गति मालूम करनी हो तो सूत्र है: $\dfrac{z(y-x)}{x+y}$ कि.मी./घंटा

yoursrahboob

उदा. 10: यदि उदा.-9 में, शांत जल में रमेश की चाल 12 कि.मी./घंटा दी गई हो तो, धारा की गति ज्ञात करें।

हल: *उपप्रमेय में दिए गए सूत्र से,*

$$\text{धारा की गति} = \frac{12(9-6)}{9+6} = 2.4 \text{ कि.मी./घंटा}$$

उदा. 11: एक व्यक्ति के द्वारा किसी निश्चित दूरी को तय करने में प्रतिकूल प्रवाह में लिया गया समय अनुप्रवाह में लिए गए समय का 2.25 गुना है। यदि धार की चाल 7 कि.मी./घंटा है तो नाव की चाल ज्ञात करें:

हल: माना कि दूरी 'd' है तथा नाव एवं धारा की चाल क्रमशः x तथा y है।

$$\text{प्रतिकूल-प्रवाह में लिया गया समय} = \frac{d}{x-y}$$

$$\text{अनुप्रवाह में लिया गया समय} = \frac{d}{x+y}$$

प्रश्नानुसार,

$$\frac{\frac{d}{x-y}}{\frac{d}{x+y}} = 2.75 = \frac{9}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{x+y}{x-y} = \frac{9}{4}$$

$$\Rightarrow 4x+4y = 9x-9y$$

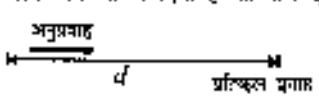
$$\Rightarrow 13y = 5x$$

$$\Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{13}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{7} = \frac{13}{5} \Rightarrow x = \frac{91}{5} = 18.2 \text{ कि.मी./घंटा}$$

द्रुत विधि (Quicker Method):

अगर प्रतिकूल-प्रवाह में तथा अनुप्रवाह में किसी दूरी 'd' को तय करने में किसी नाव द्वारा लिया गया समय दिया हो तो नाव एवं धारा की चाल का अनुपात निकालना।



माना कि दूरी 'd' है तथा नाव एवं धारा की चालें क्रमशः x तथा y हैं।

प्रतिकूल-प्रवाह में लिया गया समय $= t_{ap}$

yoursmahboob

अनुप्रवाह में लिया गया समय $= t_{dn}$

प्रतिकूल प्रवाह $= \frac{d}{t_{up}}$

अनुप्रवाह $= \frac{d}{t_{dn}}$

नाव की चाल $= x = \frac{1}{2}$ (प्रतिकूल-प्रवाह + अनुप्रवाह)

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{d}{t_{up}} + \frac{d}{t_{dn}}\right) = \frac{d}{2}\left(\frac{t_{up} + t_{dn}}{t_{up} t_{dn}}\right)$$

धारा की चाल $= y = \frac{1}{2}$ (अनुप्रवाह प्रतिकूल प्रवाह)

$$= \frac{d}{2}\left(\frac{t_{up} - t_{dn}}{t_{up} t_{dn}}\right)$$

अतः $\frac{\text{नाव की चाल}}{\text{धारा की चाल}} = \frac{t_{up} + t_{dn}}{t_{up} - t_{dn}}$

द्रुत विधि से (By Quicker Method):

उपर्युक्त उदा. को निम्नलिखित तरीके से हल किया जा सकता है।

$t_{dn} = t$

$t_{up} = 2.75t$

नाव की चाल $= \frac{2.75t + t}{2.75t - t}$

या, $\frac{\text{नाव की चाल}}{7} = \frac{3.75}{1.75}$

या, नाव की चाल $= \frac{3.75 \times 7}{1.75} = 15$ कि.मी./घंटा

अभ्यास प्रश्न

1. यदि धारा की दिशा में व्यक्ति की चाल 12 किलोमीटर/घंटा हो तथा धारा की गति 1.5 किलोमीटर/घंटा हो तो धारा के विपरीत दिशा में मनुष्य की गति _____ कि.मी./घंटा है।
2. एक नाव धारा के विपरीत दिशा में 40 किलोमीटर 8 घंटे में जाती है तथा धारा की दिशा में 36 कि.मी. 6 घंटे में जाती है तो शांत जल में नाव की चाल है _____ कि.मी./घंटा।
3. किसी नाव को धारा के विपरीत दिशा में B से A तथा धारा की दिशा में A से B तक की दूरी तय करने में 3 घंटे लगते हैं। यदि शांत जल में नाव की चाल 9 कि.मी./घंटा तथा धारा की गति 2 किलोमीटर/घंटा हो तो A और B के बीच की दूरी है _____ कि.मी.।

yoursmahboob

4. एक व्यक्ति शांत जल में 5 कि.मी./घंटा की रफ्तार से नाव खे सकता है तथा धारा की गति 3 किलोमीटर/घंटा है। उसे किसी स्थान तक नाव खे कर पहुँचने और वापस लौटने में 1 घंटा लगता है। उस स्थान की दूरी बताएँ:

5. शांत जल में नाव की चाल है 6 कि.मी./घंटा तथा धारा की गति है 1.5 कि.मी./घंटा। एक व्यक्ति 22.5 कि.मी. की दूरी पर स्थित किसी स्थान पर खेता हुआ जाता है और वापस प्रारंभिक स्थान पर लौट आता है। यात्रा में लगा कुल समय बताएँ।

6. किसी व्यक्ति के प्रतिकूल प्रवाह में 16 किलोमीटर तथा अनुप्रवाह में 28 किलोमीटर की दूरी तय करने में समान समय 5 घंटे लगते हैं। धारा की गति _____ कि.मी./घंटा है।

7. कोई नाव प्रतिकूल-प्रवाह में 1 किलोमीटर की दूरी 10 मिनट में तय करती है तथा अनुप्रवाह में वही दूरी तय करने में उसे मात्र 6 मिनट लगते हैं। धारा की गति _____ कि.मी./घंटा है।

8. कोई व्यक्ति धारा की दिशा में एक निश्चित दूरी 6 घंटे में तय करता है और फिर 4 घंटे में उतनी ही दूरी वापस लौट आता है। यदि धारा की गति $2\frac{1}{4}$ कि.मी./घंटा हो, तो शांत जल में नाव की चाल बताएँ

9. धारा की गति 4 कि.मी./घंटा है। किसी नाव को 6 किलोमीटर जाने और पुनः वापस लौट आने में 2 घंटा लगता है। शांत जल में नाव की चाल है _____ कि.मी./घंटा।

10. किसी नाव को 24 किलोमीटर धारा के विपरीत दिशा एवं 36 किलोमीटर धारा की दिशा में यात्रा करने में 6 घंटे लगते हैं, जबकि धारा के विपरीत दिशा में 36 किलोमीटर एवं धारा की दिशा में 24 किलोमीटर जाने में $6\frac{1}{2}$ घंटे लगते हैं। धारा की गति _____ है।

a) 1.5 कि.मी./घंटा b) 1 कि.मी./घंटा c) 2 कि.मी./घंटा d) 2.5 कि.मी./घंटा

11. धारा की गति 1 कि.मी./घंटा है। किसी मोटरबोट को धारा के विपरीत दिशा में 35 कि.मी. जाने एवं पुनः वापस प्रारंभिक स्थान पर आने में 12 घंटे लगते हैं। शांत जल में मोटरबोट की चाल है _____ कि.मी./घंटा।

12. एक व्यक्ति शांत जल में $9\frac{1}{3}$ कि.मी./घंटा की रफ्तार से नाव खे सकता है। उसे धारा के विपरीत किसी स्थान तक जाने में धारा की दिशा में उतनी ही दूरी जाने की तुलना में 3 गुना समय लगता है। धारा की गति है ____ कि. मी./घंटा:

13. किसी व्यक्ति को धारा के विपरीत दिशा में $\frac{3}{4}$ किलोमीटर जाने में $11\frac{1}{4}$ मिनट लगते हैं और पुनः वापस लौटने में $7\frac{1}{2}$ मिनट लगते हैं। शांत जल में व्यक्ति की चाल है ____ कि. मी./घंटा।

yoursmahboob

उत्तर

1. धारा की दिशा में व्यक्ति की चाल = 12 कि.मी./घंटा
शांत जल में व्यक्ति की चाल = 12 − 1.5 = 10.5 कि.मी./घंटा
धारा के विपरीत दिशा में व्यक्ति की चाल = 10.5 − 1.5 = 9 किलोमीटर/घंटा

द्रुत विधि (Quicker Method):
धारा के विपरीत दिशा में व्यक्ति की चाल = धारा की दिशा में व्यक्ति की चाल − 2 × धारा की चाल = 2 − 2 × 1.5 = 9 कि.मी./घंटा

2. धारा के विपरीत दिशा में नाव की चाल = $\frac{40}{8} = 5$ कि.मी./घंटा

धारा की दिशा में नाव की चाल = $\frac{36}{6} = 6$ कि.मी./घंटा

∴ शांत जल में व्यक्ति की चाल = $\frac{5+6}{2} = 5.5$ कि.मी./घंटा

3. मान लिया कि दूरी = x कि.मी.
धारा के विपरीत दिशा में चाल = 9 − 3 = 6 कि.मी./घंटा
एवं धारा की दिशा में चाल = 9 + 3 = 12 कि.मी./घंटा

धारा के विपरीत दिशा में एवं धारा की दिशा में की गई यात्रा में लगा कुल समय = $\frac{x}{6} - \frac{x}{12} = 3$

या, $\frac{18x}{72} = 3$

∴ $x = \frac{3 \times 72}{18} = 12$ कि.मी.

द्रुत विधि (Quicker Method):

दूरी = कुल समय × $\left[\frac{(\text{शांत जल में चाल})^2 - (\text{धारा की गति})^2}{2 \times \text{शांत जल में चाल}}\right]$

$= \frac{3 \times \{(9)^2 - (3)^2\}}{2 \times 9} = \frac{3 \times 72}{18} = 12$ कि.मी.

4. प्रश्न संख्या 3 की तरह;

दूरी = $\frac{1 \times \{(5)^2 - (1)^2\}}{2 \times 5} = \frac{24}{10} = 2.4$ कि.मी.

नोट: विस्तार विधि से हल करने की कोशिश करें।

yoursmahboob

5. प्रश्न संख्या-3 में दिया गया सूत्र निम्नलिखित रूप में भी लिखा जा सकता है:

$$\therefore \text{ कुल समय} = \frac{2 \times \text{दूरी} \times \text{शांत जल में चाल}}{(\text{शांत जल में चाल})^2 - (\text{धारा की गति})^2}$$

$$= \frac{2 \times 22.5 \times 6}{(6)^2 - (1.5)^2} = 8 \text{ घंटे}$$

नोट: विस्तार विधि के लिए

धारा के विपरीत दिशा में नाव की चाल = 6 − 1.5 = 4.5 कि.मी./घंटा

धारा की दिशा में नाव की चाल = 6 + 1.5 = 7.5 कि.मी./घंटा

$$\therefore \text{ कुल समय} = \frac{22.5}{4.5} + \frac{22.5}{7.5} = 5 + 3 = 8 \text{ घंटे}$$

6. धारा के विपरीत दिशा में चाल = $\frac{16}{5}$ कि.मी./घंटा

धारा की दिशा में चाल = $\frac{28}{5}$ कि.मी./घंटा

$$\therefore \text{ धारा की गति} = \frac{\frac{28}{5} - \frac{16}{5}}{2} = \frac{12}{10} = 1.2 \text{ कि.मी./घंटा}$$

7. प्रश्न संख्या-6 की तरह।

8. मान लिया कि शांत जल में A की चाल = x कि.मी./घंटा

तब, धारा की दिशा में चाल = $\left(x + \frac{9}{4}\right)$ कि.मी./घंटा

एवं धारा के विपरीत दिशा में चाल = $\left(x - \frac{9}{4}\right)$ कि.मी./घंटा

अब, दूरी = $6\left(x + \frac{9}{4}\right) = 9\left(x - \frac{9}{4}\right)$

या, $6x + \frac{27}{2} = 9x - \frac{81}{4}$

या, $3x = \frac{135}{4}$

$\therefore x = \frac{135}{4 \times 3} = \frac{45}{4} = 11\frac{1}{4}$ कि.मी./घंटा

yoursmanboob

द्रुत विधि (Quicker Method):

$$\text{शांत जल में चाल} = \frac{\text{धारा की गति (धारा के प्रतिकूल एवं अनुकूल जाने में लगा समय)}}{\text{धारा के प्रतिकूल एवं अनुकूल जाने में लगे समय का अंतर}}$$

$$= \frac{\frac{9}{4}(6+9)}{9-6} = \frac{9\times15}{4\times3} = \frac{45}{4} = 11\frac{1}{4} \text{ कि.मी./घंटा}$$

9. मान लिया कि शांत जल में नाव की चाल = x कि.मी./घंटा

धारा की गति = 4 कि.मी./घंटा

∴ धारा के विपरीत दिशा में चाल = (x − 4) कि.मी./घंटा

धारा की दिशा में चाल = (x + 4) कि.मी./घंटा

अब, $\frac{6}{(x-4)} + \frac{6}{(x+4)} = 2$

या, $\frac{6(x+4)+6(x-4)}{(x-4)(x+4)} = 2$

या, $2x^2 - 32 = 6x + 6x$

या, $x^2 - 6x - 16 = 0$

या, $(x-8)(x+2) = 0$

∴ $x = 8$ या -2

ऋणात्मक मान को नजरंदाज करने पर, शांत जल में नाव की चाल = 8 कि.मी./घंटा

सूत्र से (Direct Formula): यदि प्रश्न संख्या 3 में इस्तेमाल किए गए सूत्र में ये मान डाल दें तो

$$6 = \frac{2(x^2 - 4^2)}{2x}$$

या, $6x = x^2 - 16$

या, $x^2 - 6x - 16 = 0$

∴ $x = 8$ या -2

→ $x = 8$ कि.मी./घंटा

10. उत्तर–8 देखिए।

11. प्रश्न संख्या–9 की तरह है। प्रश्न–3 में प्रयुक्त द्रुत विधि से

$$35 = \frac{12(x^2 - 1^2)}{2x}$$

या, $35x = 6x^2 - 6$

या, $6x^2 - 35x - 6 = 0$

yoursmahboob

या, $6x^2 - 36x + x - 6 = 0$

या, $6x(x-6) + (x-6) = 0$

या, $(6x+1)(x-6) = 0$

$\therefore x = 6$ या $-\frac{1}{6}$

ऋणात्मक मान को नजरंदाज कर देने पर, शांत जल में नाव की चाल = 6 कि.मी./घंटा

12. मान लिया कि धारा की गति = x कि.मी./घंटा

तो, $\frac{28}{x} + 3 = 3\left(\frac{28}{3} - x\right)$ या, $4x = \frac{2 \times 28}{3}$

$\therefore x = \frac{14}{3} = 4\frac{2}{3}$ कि.मी./घंटा

13. धारा के विपरीत दिशा में चाल = $\frac{3}{4} \div \frac{45}{4 \times 60} = \frac{3}{4} \times \frac{4 \times 60}{45} = 4$ कि.मी./घंटा

धारा की दिशा में चाल = $\frac{3}{4} + \frac{15}{2 \times 60} = \frac{3 \times 2 \times 60}{4 \times 15} = 6$ कि.मी./घंटा

$\therefore$ शांत जल में चाल = $\frac{4+6}{2} = 5$ कि.मी./घंटा

yoursmahboob

दौड़ एवं खेल

(Races and Games)

दौड़ (Race): चलों की प्रतिस्पर्द्धा को दौड़ या Race कहा जाता है।

रेसकोर्स (Race-course): वह पथ या मैदान, जिसपर दौड़ प्रतियोगिताएँ आयोजित की जाती हैं, रेसकोर्स (Race course) कहा जाता है।

डेड-हीट-रेस (Dead-heat-race): यदि दौड़ में भाग लेने वाले सभी प्रतियोगी ठीक एक ही समय पर लक्ष्य तक पहुँच जाते हों तो ऐसी प्रतिस्पर्द्धा डेड हीट रेस कही जाती है।

मान लीजिए कि A और B किसी दौड़-प्रतियोगिता के प्रतियोगी हैं। यदि दौड़ शुरू होने से पूर्व, A प्रारंभिक बिंदु (starting point) पर है एवं B, A से 25 मीटर आगे है तो ऐसा कहा जाता है कि A ने B को 25 मीटर का एक start दिया (A is said to give a start of 25 metres)।

इस स्थिति में, 100 मीटर की एक दौड़ में A 100 मीटर की दूरी तय करेगा एवं B को मात्र (100 - 25 =) 75 मीटर की दूरी तय करनी होगी।

नोट: उपर्युक्त स्थिति में यह कहा जा सकता है कि 'A ने B को 25 मी. की बढ़त दे दी' (A has given a lead of 25 metres to B).

खेल कूद (Games): यदि यह कहा जाए कि यह 100 का एक खेल है तो इसका मतलब होगा कि प्रतियोगियों के बीच से जो व्यक्ति सर्वप्रथम 100 प्वाइंट स्कोर करता है वही विजेता माना जाएगा। यदि A के 100 प्वाइंट स्कोर करने पर B मात्र 80 प्वाइंट ही स्कोर कर पाए तो कहा जाता है कि 100 के गेम में 'A, B को 20 प्वाइंट दे सकता है' (A can give B 20 points or A can give 20 points to B)

उदा. 1: 1 किलोमीटर की दौड़ प्रतियोगिता में A, B को 25 मीटर या 5 सेकेंड का समय देता है। दौड़ पूरा करने में A को कितना समय लगा ?

हल: प्रश्न से यह स्पष्ट है कि B, 5 सेकेंड में 25 मीटर दौड़ता है।

∴ 1 किलोमीटर की दूरी तय करने में B द्वारा लिया गया समय = $\frac{5}{25} \times 100 = 200$ सेकेंड

1 किलोमीटर की दूरी तय करने में A को लगा समय = 200 − 5 = 195 सेकेंड

= 3 मिनट 5 सेकेंड

उदा. 2: A, B की अपेक्षा $1\frac{2}{3}$ गुना तेज दौड़ता है। दौड़ के शुरू में B, A से 60 मीटर आगे है तो दौड़-पथ (Race-course) कितना लंबा हो ताकि दोनों एक ही समय में अपने लक्ष्य पर पहुँचें?

हल: A की चाल : B की चाल = $1\frac{2}{3} : 1 = \frac{5}{3} : 1 = 5 : 3$

yousmahboob

कहा जा सकता है कि 5 मीटर की दौड़ में A को (5 – 3) = 2 मीटर का फायदा होता है।

∴ उसे 60 मी. का फायदा होगा $\frac{5}{2} \times 60 = 150$ मी. की दौड़ में •

द्रुत विधि (Quicker Method):

$$\text{दौड़ पथ (Course of race)} \times \text{बढ़त (Lead)} \left(\frac{1}{1 - \frac{\text{B की चाल}}{\text{A की चाल}}} \right)$$

$$= 60 \left(\frac{1}{1 - \frac{3}{5}} \right) = 60 \left(\frac{5}{5-3} \right)$$

$$= 150 \text{ मीटर}$$

उदा. 3: 1 किलोमीटर की दौड़ A 3 मिनट में पूरा कर सकता है और B 3 मिनट 20 सेकेंड में। A, B को कितनी दूरी से मात देगा ?

हल: A, B को 20 सेकेंड की मात देता है।

अब, B द्वारा 20 सेकेंड में तय की गई दूरी = $\frac{100 \text{ मीटर}}{3 \text{ मिनट } 20 \text{ सेकेंड}} \times 20$ सेकंड

$$= \frac{1000}{200} \times 20 = 100 \text{ मीटर}$$

∴ A, B को 100 मीटर से मात देगा।

उदा. 4: 100 मी. की किसी दौड़ प्रतियोगिता में A 5 कि.मी./घंटे की रफ्तार से दौड़ता है। दौड़ के अन्त में B, A से 8 मीटर आगे है फिर भी A लक्ष्य पर B से 8 सेकेंड पहले पहुँचता है। B की गति बताएँ:

हल: A द्वारा 100 मीटर की दूरी तय करने में लगा समय

$$= 100 \div \left(5 \times \frac{5}{18} \right) = \frac{100 \times 18}{25} = 72 \text{ सेकेंड}$$

∴ B, (100 – 8) = 92 मी. (72 – 8) = 80 सेकेंड में तय करता है।

∴ B की गति = $\frac{92}{80} \times \frac{18}{5} = 4.14$ कि.मी./घंटा

द्रुत विधि (Quicker Method):

$$\text{B की चाल} = \frac{100 \text{ मी.} - 8 \text{ मी.}}{100 \text{ मी. की दूरी तय करने में A को लगा समय} + 8 \text{ सेकेंड}}$$

yoursmahboob

$$= \frac{92}{72+8} = \frac{92}{80} \text{ मी./सेकेंड}$$

= 4.14 किलोमीटर/घंटा

उदा. 5: 600 मी. के किसी दौड़ में A, B को 60 मीटर की मात देता है और 500 मीटर के किसी दौड़ में B, C को 50 मी. पीछे छोड़ देता है। 400 मी. की दौड़ में A, C को कितने मीटर की मात देगा ?

हल: यदि A 600 मी. दौड़ता है तो B मात्र (600 − 60 = 540 मी.

∴ यदि A 400 मीटर दौड़ता है तो B $\frac{540 \times 400}{600}$ = 360 मी. दौड़ता है

अब जब B 500 मीटर दौड़ता है तो C (500 - 50 =) 450 मीटर दौड़ता है।

∴ जब B 360 मी. दौड़ता है तो, C मात्र $\frac{450 \times 360}{500}$ = 324 मी. दौड़ता है.

∴ A, C को 400 − 324 = 76 मी. की मात देगा।

***द्रुत विधि* (Quicker Method) I:**

समान अवधि में तय की गई दूरी की तुलना करें;

A की दूरी : B की दूरी = 600 : (600 − 60)

= 600 : 540 = 10 : 9

B की दूरी : C की दूरी = 500 : (500 − 50) = 500 : 450 = 10 : 9

∴ A की दूरी : B की दूरी : C की दूरी = 10 × 10 : 9 × 10 : 9 × 9

= 100 : 90 : 81

A, C को (100 − 81) = 19 मीटर की मात देता है 100 मीटर की दौड़ में

∴ A, C को 19 × 4 मीटर की मात देता है 100 × 4 मीटर की दौड़ में

∴ अभीष्ट दूरी = 76 मीटर

***द्रुत विधि* (Quicker Method) II:**

यदि L मीटर की दौड़ में A, B तथा C भाग लेते हैं।

L मीटर की दौड़ में A, B को x_{12} मीटर की मात देता है।

L मीटर की दौड़ में B, C को x_{23} मीटर की मात देता है।

L मीटर की दौड़ में A, C को x_{13} मीटर की मात देता है

तो इस तरह के प्रश्न में निम्नलिखित सूत्र लागू होता है।

$(L - x_{12})x_{23} = L(x_{13} - x_{12})$

पुनः यदि L_1 मीटर की दौड़ में A, B को x_{12} मीटर से मात देता है, L_2 मीटर की दौड़ में B, C को x_{23} मीटर से मात देता है तो L मीटर की दौड़ में A, C को कितने मीटर से मात देगा?

yoursmahboob

उपरोक्त सूचना को L मीटर की दौड़ में परिवर्तित किया जा सकता है।

$$x'_{12} = \frac{x_{12}}{L_1} \times L$$

$$x'_{23} = \frac{x_{23}}{L_2} \times L$$

$$x'_{13} = ?$$

$$(L - x'_{12})x'_{23} = L(x'_{13} - x'_{12})$$

उपर्युक्त सूत्र में यदि L, x'_{12} एवं x'_{23} दिया हुआ हो तो x'_{13} ज्ञात किया जा सकता है।

हल: उपर्युक्त सूत्र से,

$$\left(400 - \frac{60}{600} \times 400\right)\left(\frac{50}{500} \times 400\right) = 400\left(x'_{13} - \frac{60}{600} \times 400\right)$$

या, $\frac{360 \times 40}{400} + 40 = x'_{13}$

या, $x'_{13} = 76$ मीटर

उदा. 6: 100 मी. की किसी दौड़ में A, B को 10 मीटर की मात देता है और C को 13 मीटर की मात देता है। 180 मीटर की दौड़ में, B, C को कितने मीटर से मात देगा ?

हल: ***द्रुत विधि (Quicker Method) I:***

A : B : C = 100 : (100 − 10) : (100 − 13)

या, A : B : C = 100 : 90 : 87

$$\therefore \frac{B}{C} = \frac{90}{87} = \frac{180}{174}$$

∴ B, C को (180 − 174 =) 6 मी. की मात देता है।

द्रुत विधि (Quicker Method) II:

$$\left(180 - \frac{10}{100} \times 180\right)x'_{23} = 180\left(\frac{13}{100} \times 180 - \frac{10}{100} \times 180\right)$$

$$\rightarrow 162 \times x'_{23} = 180(23.4 - 18)$$

$$\rightarrow x'_{23} = 6 \text{ मीटर}$$

उदा. 7: 200 मी. की दौड़ में A, B को 31 मीटर की मात देता है और C को 18 मीटर की मात देता है। 350 मी. के किसी दौड़ में C, B को कितने मीटर की मात देगा ?

हल: ***द्रुत विधि (Quicker Method) I:***

A : B : C = 200 : (200 − 31) : (200 − 18) = 200 : 169 : 182

yoursmahboob

$$\therefore \frac{C}{B} = \frac{182}{169} = \frac{182\left(\frac{350}{182}\right)}{169\left(\frac{350}{182}\right)} = \frac{350}{325}$$

$\therefore$ C, B को (350 − 325 =) 25 मी. की मात दे देता है।

नोट: *पिछले उदा. में वर्णित द्रुत विधि* **(Quicker Method) II** से भी इस प्रश्न को हल किया जा सकता है।

उदा. 8: 100 मी. के किसी दौड़ प्रतिस्पर्धा में B, A से 20 मी. आगे है और C, A से 25 मी. आगे है। दौड़ने की प्रक्रिया में C, B से 1 सेकेंड आगे निकल सकता है। इन तीनों को 100 मी. की दौड़ पूरा करने में कितना समय लगता है ?

हल: A : B : C = 100 : 80 : 75

$$B : C = 80 : 75 = 80\left(\frac{100}{80}\right) : 75\left(\frac{100}{80}\right) = 100 : \frac{375}{4}$$

$\therefore$ C एक सेकेंड में 100 − $\frac{375}{4} = \frac{25}{4}$ मीटर की दूरी तय कर सकता है।

$\therefore$ C, 100 मीटर की दूरी तय करता है $\frac{4}{25} \times 100 = 16$ सेकेंड में

B, 100 मी. की दूरी तय करता है 16 − 1 = 15 सेकेंड में।

अब, A, 100 मीटर की दूरी उतने ही समय में तय करता है, जितने समय में B, 80 मी. की

अर्थात् $\frac{15}{100} \times 80 = 12$ सेकेंड

उदा. 9: 100 प्वाइंट के किसी खेल में A, B से 25 प्वाइंट आगे है और C से 31 प्वाइंट आगे है। तब B, C से कितना प्वाइंट आगे है ?

हल: A : B : C = 100 : 75 : 69

$$\therefore B : C = \frac{75}{69} = \frac{75 \times \frac{100}{75}}{69 \times \frac{100}{75}} = \frac{100}{92}$$

B, C से 8 प्वाइंट आगे है।

उदा. 10: बिलियर्ड्स के किसी खेल में A, B से 60 में 12 प्वाइंट आगे है तथा C से 90 में 10 प्वाइंट आगे है। तो 70 के खेल में C, B से कितना आगे हो सकता है ?

हल: A : B = 60 : 48 = 90 : 72

A : C = 90 : 80 = 90 : 80

$$\therefore C : B = 80 : 72 = 80\left(\frac{70}{80}\right) : 72\left(\frac{70}{80}\right) = 70 : 63$$

$\therefore$ 70 प्वाइंट के खेल में C, B से 7 प्वाइंट आगे है।

yoursmaboob

अभ्यास प्रश्न

1. A, 100 मी. की दूरी 20 सेकेंड में तय कर सकता है और B, 25 सेकेंड में। A, B को पीछे देगा
   1) 30 मीटर से 2) 20 मीटर से 3) 25 मीटर से
   4) 12 मीटर से 5) इनमें से कोई नहीं
2. 300 मी. की एक दौड़ में A, B को 15 मीटर या 5 सेकेंड से मात देता है। A कितने सेकेंड में 300 मी. की दूरी तय कर पाएगा?
   1) 100 सेकेंड 2) 95 सेकेंड 3) 105 सेकेंड
   4) 90 सेकेंड 5) इनमें से कोई नहीं
3. 1000 मी. की एक दौड़ में B, A से 100 मीटर आगे है और C, A से 280 मीटर आगे है तो C, B से कितना आगे होगा ?
   1) 180 मीटर 2) 200 मीटर 3) 270 मीटर
   4) 90 मीटर 5) इनमें से कोई नहीं
4. A, B से 1.75 गुना अधिक रफ्तार से दौड़ता है। यदि B, A से 60 मी. आगे हो तो प्रस्थान बिन्दु से लक्ष्य कितनी दूर रखी जाए ताकि A और B एक ही समय में लक्ष्य पर पहुँचे?
   1) 105 मीटर 2) 80 मीटर 3) 140 मीटर
   4) 45 मीटर 5) 50 मीटर
5. 500 मीटर के किसी दौड़ में दो बालकों A और B के चालों का अनुपात 3 : 4 है। यदि A, B की तुलना में 140 मीटर आगे से दौड़ना शुरू करे तो A जीतेगा
   1) 30 मीटर से 2) 34 मीटर से 3) 20 मीटर से
   4) 10 मीटर से 5) इनमें से कोई नहीं
6. 100 मी. के किसी दौड़ में, A, 6 किलोमीटर/घंटा की रफ्तार से दौड़ता है। यदि B, A से 4 मीटर आगे से दौड़ना शुरू करे और फिर भी A से 12 मिनट पीछे पहुँचे तो B की गति है
   1) 4 किलोमीटर/घंटा 2) 4.5 किलोमीटर/घंटा
   3) 4.8 किलोमीटर/घंटा 4) 5 किलोमीटर/घंटा
   5) इनमें से कोई नहीं।
7. A और B 1 किलोमीटर की दौड़ लगाते हैं और A, 1 मिनट से बाजी मार लेता है। A और C 1 किलोमीटर दौड़ते हैं और A, 375 मीटर से जीत जाता है। B और C भी 1 किलोमीटर की दौड़ लगाते हैं और B, 30 सेकेंड से जीत जाता है। प्रत्येक धावक द्वारा लक्ष्य तक पहुँचने में लिया गया समय ज्ञात करें
8. विलियर्ड्स के एक खेल में, A, B को 60 में से 10 प्वाइंट दे सकता है तथा C को 60 में से 15 प्वाइंट दे सकता है। 90 के एक खेल में B, C को कितना प्वाइंट दे सकता है ?
9. A और B 250 मीटर परिधि वाले पथ पर 4 किलोमीटर की दौड़ लगाते हैं। यदि उनकी दर का अनुपात 5 : 4 हो तो जीतेगा कितनी बार दूसरे धावक को पार करेगा ?
10. बिलियर्ड्स के किसी खेल में A, B को 60 में से 15 प्वाइंट दे सकता है, C को 60 में से 20 प्वाइंट दे सकता है तो 90 के खेल में B, C को कितना प्वाइंट दे सकता है?

yoursmahboob

उत्तर

1. 2; B द्वारा 5 सेकेंड में तय की गई दूरी $= \frac{100}{25} \times 5 = 20$ मीटर

$\therefore$ A, B को 20 मीटर की मात देता है।

2. 2; $\because$ B, 15 मी. की दूरी 5 सेकेंड में तय करता है।

$\therefore$ B, 300 मी. की दूरी $\frac{5}{15} \times 300 = 100$ सेकेंड में तय करता है।

$\therefore$ A को $100 - 5 = 95$ सेकेंड लगता है।

3. 2; $A : B : C = 100 : 900 : 720$

$$\therefore B : C = \frac{900}{720} = \frac{900 \times \frac{1000}{900}}{720 \times \frac{1000}{900}} = \frac{1000}{800} = 1000 : 800$$

$\therefore$ C, B से 200 मी. आगे से शुरू करता है।

4. 3; $60 \times \left(\frac{1}{1 - \frac{4}{7}}\right) = 60 \times \frac{7}{3} = 140$ मीटर

5. 3; लक्ष्य तक पहुँचने के लिए A, $500 - 140 = 360$ मी. की दूरी तय करता है।

$\therefore$ B, $360 \times \left(\frac{4}{3}\right) = 480$ मीटर की दूरी तय करता है, जब तक A लक्ष्य तक पहुँचता है।

$\therefore$ A लक्ष्य तक पहुँच जाता है और B, 20 मीटर पीछे रह जाता है।

$\therefore$ A 20 मीटर की दूरी से विजयी होता है।

6. B की चाल $= \frac{100 \text{ मी.} - 4 \text{ मी.}}{100 \text{ मी. की दूरी तय करने में A को लगा समय} + 12 \text{ सेकेंड}}$

$\therefore$ 100 मी. की दूरी तय करने में A को लगा समय

$$= 100 + \left(6 \times \frac{5}{18}\right) = \frac{100 \times 18}{6 \times 5} = 60 \text{ सेकेंड}$$

$\therefore$ B की चाल $= \frac{96}{60 + 12} = \frac{4}{3}$ मी./सेकेंड $= \frac{4}{3} \times \frac{18}{5} = 4.8$ कि.मी./घंटा

7. A, B को 60 सेकेंड से मात दे देता है।

B, C को 30 सेकेंड से मात देता है।

$\therefore$ A, C को मात देता है 90 सेकेंड से या 375 मी. से (दिया हुआ है)

yoursmahboob

∴ C 90 सेकेंड में 375 मीटर की दूरी तय करता है।

∴ C 1 किलोमीटर की दूरी तय करेगा $\frac{90}{375}\times 100 = 240$ सेकेंड में

∴ A द्वारा 1 किलोमीटर की दूरी तय करने में लगा समय = 240 − 90 = 150 सेकेंड

B द्वारा 1 किलोमीटर की दूरी तय करने में लगा समय = 240 − 30 = 210 सेकेंड

8. A : B = 60 : 50

A : C = 60 : 45

$\therefore B : C = 50 : 45 = 50\left(\frac{90}{50}\right) : 45\left(\frac{90}{50}\right) = 90 : 81$

∴ 90 के गेम में B, C को 9 प्वाइंट देता है।

9. A की दर : B की दर = 5 : 4

⇒ जितने समय में A 5 चक्कर लगाता है उतने में B 4 चक्कर लगाता है।

⇒ जब A, $\frac{5\times 250}{1000} = \frac{5}{4}$ किलोमीटर की दूरी तय करता है

तो B, $\frac{4\times 250}{1000} = 1$ किमी. की दूरी तय करता है।

⇒ A के 5 बार चक्कर लगाने के दौरान हर बार A, B को पार करता है।

∴ $\frac{5}{4}$ किलोमीटर तय करने की प्रक्रिया में A, B को केवल 1 बार पार करता है।

∴ 4 किलोमीटर तय करने की प्रक्रिया में A, B को $1\times\frac{4}{5}\times 4 = 3\frac{1}{5} = 3$ बार पार करता है।

10. A : B : C = 60 : 45 : 40

$\therefore B : C = \frac{45}{40} = \frac{45\times 2}{40\times 2} = \frac{90}{80}$

∴ 90 प्वाइंट के खेल में B, C को 10 प्वाइंट देता है।

yoursmahboob

प्राथमिक क्षेत्रमिति – I

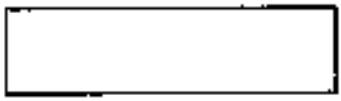
(Elementary Mensuration - I)

क्षेत्रमिति (Mensuration) के अन्तर्गत किसी समतल आकृति के क्षेत्रफल से संबंधित प्रश्नों को हल करना पड़ता है। इस अध्याय में हम ऐसे ही कुछ प्रश्नों की चर्चा करेंगे और उन्हें हल करने की संक्षिप्त विधियाँ भी बताएँगे।

पर इसके पूर्व कुछ परिभाषाओं पर एक नजर डाल लें।

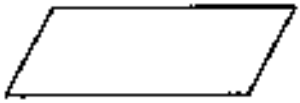
कुछ प्राथमिक परिभाषाएँ

1. ***आयत* (Rectangle)** : एक ऐसा चतुर्भुज, जिसके आमने-सामने की भुजाएँ बराबर हों तथा प्रत्येक कोण 90° हो



2. ***वर्ग* (Square)** : एक ऐसा चतुर्भुज, जिसकी सभी भुजाएँ बराबर हों तथा प्रत्येक कोण समकोण (90°) हो।

3. ***समानांतर चतुर्भुज* (Parallelogram)** : एक ऐसा चतुर्भुज, जिसकी आमने-सामने की भुजाएँ एक-दूसरे के समानांतर एवं बराबर हों।

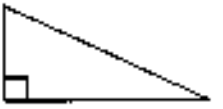


4. ***समचतुर्भुज* (Rhombus)** : एक ऐसा समानांतर चतुर्भुज, जिसकी चारों भुजाएँ बराबर हों।

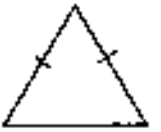
5. ***समलंबचतुर्भुज* (Trapezium)** : एक ऐसा चतुर्भुज, जिसके सम्मुख भुजाओं का कोई एक जोड़ा समानांतर हो।

6. ***समकोण त्रिभुज* (Right-angled triangle)** : एक त्रिभुज, जिसका एक कोण 90° के बराबर हो।

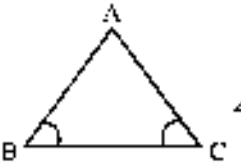
yoursmahboob



7. **समद्विबाहु त्रिभुज (Isosceles triangle) :** एक ऐसा त्रिभुज, जिसकी कोई दो भुजा आपस में बराबर हो।



उपप्रमेय: किसी समद्विबाहु त्रिभुज के सम्मुख कोण बराबर होते हैं।



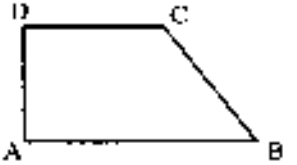
$\angle B = \angle C$

8. **समबाहु त्रिभुज (Equilateral triangle) :** एक ऐसा त्रिभुज, जिसकी तीनों भुजाएँ आपस में बराबर हों।

उपप्रमेय: किसी समबाहु त्रिभुज के तीनों कोण समान होते हैं और इनमें से प्रत्येक कोण का मान 60° के बराबर होता है

$\angle A = \angle B = \angle C = 60°$

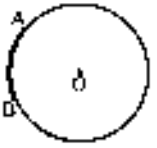
9. **परिमिति (Perimeter) :** ज्यामितीय आकृति के बाह्य सीमा रेखा की लंबाई परिमिति या Perimeter कही जाती है।



ABCD की परिमिति = AB + BC + CD + DA

yousmahboob

10. ***किसी वृत्त का चाप (Arc of a circle)*** : वृत्त की परिमिति (वक्र रेखा का एक हिस्सा) का एक खंड चाप कहलाता है।



चाप AB – AB लंबाई

11. ***वृत्त का त्रिज्याखंड (Sector of a circle)*** : वृत्त के चाप उसके केन्द्र तथा दो त्रिज्याओं से घिरा क्षेत्र त्रिज्याखंड कहलाता है।

छायांकित भाग – त्रिज्याखंड AOB

महत्वपूर्ण सूत्रों की सूची:

1. (i) आयत का क्षेत्रफल = लंबाई × चौड़ाई

   (ii) लंबाई = $\frac{\text{क्षेत्रफल}}{\text{चौड़ाई}}$; चौड़ाई = $\frac{\text{क्षेत्रफल}}{\text{लंबाई}}$

   (iii) (विकर्ण)^2 = (लंबाई)^2 + (चौड़ाई)^2

   (iv) परिमिति = 2(लंबाई + चौड़ाई)

2. (i) वर्ग का क्षेत्रफल = (भुजा)^2 = $\frac{1}{2}$(विकर्ण)^2

   (ii) वर्ग की परिमिति = 4 × भुजा

3. कमरे की चारों दीवारों का क्षेत्रफल = 2 × (लंबाई + चौड़ाई) × ऊँचाई

4. समानांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = आधार × ऊँचाई

5. समचतुर्भुज का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ × (विकर्णों का गुणनफल)

   यदि d_1 एवं d_2 दोनों विकर्ण हों तो, समचतुर्भुज की भुजा = $\frac{1}{2}\sqrt{d_1^2 + d_2^2}$

6. (i) समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\frac{\sqrt{3}}{4}$ × (भुजा)^2

   (ii) समबाहु त्रिभुज की परिमिति = 3 × भुजा

7. समद्विबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\frac{b}{4}\sqrt{4a^2 - b^2}$

yoursmahboob

$$h = \sqrt{a^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{4a^2 - b^2}$$

8. यदि a, b, c त्रिभुज की भुजाओं की लम्बाइयाँ हैं और

$s = \frac{1}{2}(a+b+c)$ तो,

त्रिभुज का क्षेत्रफल $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

9. त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ × आधार × ऊँचाई

10. समलम्ब चतुर्भुज का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ (समानांतर भुजाओं का योग × इन भुजाओं के बीच की लम्बवत दूरी)

$$= \frac{1}{2}(a+b)h$$

(जहाँ a एवं b समलंब चतुर्भुज की समानांतर भुजाएँ हैं तथा h, भुजाएँ a एवं b के बीच की लंबवत दूरी है।)

$$h = \frac{2}{k}\sqrt{s(s-k)(s-c)(s-d)}$$

(जहाँ $k = (a-b)$ अर्थात समानांतर भुजाओं के बीच का अंतर तथा c एवं d समलंब चतुर्भुज की असमानांतर भुजाएँ हैं एवं

$s = \frac{k+c+d}{2}$)

$\therefore$ क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}(a+b)h = \frac{a+b}{k}\sqrt{s(s-k)(s-c)(s-d)}$

11. (i) वृत्त की परिधि = $2\pi r$

(ii) वृत्त का क्षेत्रफल = πr^2

(iii) चाप AB = $\frac{2\pi r\theta}{360^\circ}$ जहाँ $\angle AOB = \theta$ एवं O केन्द्र है।

(iv) त्रिज्याखंड AOB का क्षेत्रफल = $\frac{\pi r^2\theta}{360^\circ}$ (पिछले पृष्ठ पर चित्र देखें)

(v) त्रिज्याखंड AOB का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ × चाप AB × r

yoursmahboob

12. एक समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = $2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-d)}$

जहाँ, a एवं b दो आसन्न भुजाएँ (adjacent sides) हैं तथा d विकर्ण है जो दोनों भुजाओं a एवं b को जोड़ता है।

क्षेत्रफल से संबंधित प्रश्नों को हल करना

क्षेत्रफल से संबंधित प्रश्नों को हल करने के लिए ऊपर दिए गए सूत्र पर्याप्त हैं। पर कुछ खास तरह के प्रश्नों के लिए हम संक्षिप्त विधि विकसित करने का भी प्रयत्न करेंगे। इन सभी संप्रत्ययों की व्याख्या निम्नलिखित उदाहरणों के प्रसंग में की जाएगी।

चतुर्भुज पर प्रश्न

उदा. 1: यदि किसी चतुर्भुज की दो आसन्न भुजाएँ (adjacent sides) क्रमशः 5 से. मी. एवं 4 से. मी. हैं तथा दोनों भुजाओं का विकर्ण 7 से. मी. है तो चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात करें।

हल: अभीष्ट क्षेत्रफल = $2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-D)}$

जहाँ $S = \frac{a+b+D}{2} = \frac{5+4+7}{2} = 8$

$= 2\sqrt{8(8-5)(8-4)(8-7)}$

$= 2\sqrt{8\times3\times4} = 8\sqrt{6} = 19.6$ वर्ग से. मी.

उदा. 2: एक चतुर्भुज में आसन्न भुजाओं की लंबाई क्रमशः 12 से. मी. एवं 14 से. मी. है। यदि एक विकर्ण की लंबाई 16 से. मी. हो तो दूसरे विकर्ण की लंबाई ज्ञात करें।

हल: एक चतुर्भुज के विकर्णों के वर्गों का योग = 2 × दो आसन्न भुजाओं के वर्गों का योग।

या, $D_1^2 + D_2^2 = 2(a^2 + b^2)$

या, $16^2 + x^2 = 2(12^2 + 14^2)$

या, $256 + x^2 = 2(144 + 196)$

या, $x^2 = 680 - 256 = 424$

$\therefore x = \sqrt{424} = 20.6$ से. मी.

समलम्ब चतुर्भुज पर प्रश्न

उदा. 1: एक समलंब चतुर्भुज (trapezium) में समांतर भुजाएँ क्रमशः 60 से. मी. एवं 90 से. मी. हैं एवं असमांतर भुजाएँ क्रमशः 40 से. मी. एवं 50 से. मी. हैं। क्षेत्रफल ज्ञात करें।

हल: h = समांतर भुजाओं के बीच का अंतर = 90 − 60 = 30 से. मी.

yoursmahboob

माना कि c = 40 से. मी. तो d = 50 से. मी.

अब, $s = \frac{k+c+d}{2} = \frac{30+40+50}{2} = \frac{120}{2} = 60$ से. मी.

$\therefore$ क्षेत्रफल $= \frac{a+b}{k}\sqrt{s(s-k)(s-c)(s-d)}$

$= \frac{60+90}{30}\sqrt{60(60-30)(60-40)(60-50)}$

$= 5\sqrt{60\times30\times20\times10} = 5\times600 = 3000$ वर्ग से. मी.

उदा. 2: उपर्युक्त प्रश्न में समलंब चतुर्भुज के दो समान्तर भुजाओं के बीच की लंबवत दूरी ज्ञात करें।

हल: $h = \frac{2}{k}\sqrt{s(s-k)(s-c)(s-d)}$

$= \frac{2}{30}\times\sqrt{60\times30\times20\times10} = \frac{1}{15}\times600 = 40$ से. मी.

नोट: हम इस क्षेत्रफल की जाँच कर सकते हैं।

$= \frac{1}{2}(a+b)h = \frac{1}{2}\times(60+90)\times40 = 150\times20 = 3000$ वर्ग से. मी.

उदा. 3: एक 5100 वर्ग से. मी. क्षेत्रफल वाले समलंब चतुर्भुज के दो समान्तर भुजाओं के बीच की संयवत दूरी 60 से. मी. है। यदि एक समान्तर भुजा की लंबाई 40 से. मी. हो तो दूसरी समान्तर भुजा की लंबाई ज्ञात करें।

$A = \frac{1}{2}(a+b)h$ या, $5100 = \frac{1}{2}(40+x)\times60$ या, $170 = 40 + x$

$\therefore$ अभीष्ट दूसरी समान्तर भुजा = 170 − 40 = 130 मी.

आयत और वर्ग पर आधारित प्रश्न

टाइप 1: ऐसे प्रश्न, जिनमें केवल सूत्रों का अनुप्रयोग निहित होता है

उदा. 1: उस आयत का क्षेत्रफल निकालें जिसकी भुजाएँ क्रमशः 25 मी. 7 डेसीमीटर लंबी एवं 14 मीटर 4 डेसीमीटर 8 सेंटीमीटर चौड़ी हो।

हल: लंबाई = 23.70 मीटर

चौड़ाई = 14.48 मीटर

$\therefore$ क्षेत्रफल = (23.70 × 14.48) वर्ग मीटर = 343.18 वर्ग मीटर Ans

उदा. 2: उस आयत का विकर्ण ज्ञात करें जिसकी भुजाएँ 12 मीटर एवं 5 मीटर हों।

yoursmahboob

हल: विकर्ण की लंबाई = $\sqrt{12^2+5^2}$ मीटर

= $\sqrt{169}$ मीटर = 13 मीटर, उत्तर

टाइप II: फर्श पर दरी लगवाना

उदा. 3: 20 मी. लंबे एवं 12 मीटर चौड़े फर्श पर दरी बिछाने के लिए कितने मीटर दरी चाहिए होगी, यदि दरी की चौड़ाई 75 सेंटीमीटर हो?

हल: *द्रुत विधि* **(Quicker Method):**

$$\text{अभीष्ट लंबाई} = \frac{\text{कमरे की लंबाई} \times \text{कमरे की चौड़ाई}}{\text{दरी की चौड़ाई}}$$

$$\therefore \text{अभीष्ट लंबाई} = \frac{20 \times 12}{0.75} = 320 \text{ मीटर}$$

उपप्रमेय: यदि दरी 20 रु. प्रति मीटर हो तो इसे फर्श पर बिछवाने में कितनी लागत आएगी?

द्रुत विधि **(Quicker Method):**

$$\text{अभीष्ट राशि} = \text{दर प्रति मीटर} \times \frac{\text{कमरे की (लम्बाई} \times \text{चौड़ाई)}}{\text{दरी की चौड़ाई}}$$

$$= 20 \times \frac{20 \times 12}{0.75} = 6400 \text{ रु.}$$

टाइप III: यदि किसी आंगन में टाइलें बिछवानी हों

उदा. 4: 30 मी. लंबे एवं 16.5 मी. चौड़े आंगन के फर्श में पत्थर डलवाने के लिए पत्थर के कितने टुकड़े चाहिए, यदि पत्थर की माप 2.5 मीटर × 2 मीटर हो?

हल: *द्रुत विधि* **(Quicker Method):**

$$\text{अभीष्ट पत्थर के टुकड़ों की संख्या} = \frac{\text{लंबाई} \times \text{आंगन की चौड़ाई}}{\text{लंबाई} \times \text{प्रत्येक पत्थर के टुकड़े की चौड़ाई}}$$

$$= \frac{30 \times 16.5}{2.5 \times 2} = 99$$

उपप्रमेय: यदि उपर्युक्त माप की टाइल 1 रु. प्रति टाइल की दर से उपलब्ध हों तो आंगन में टाइल बिछवाने में कुल कितनी राशि खर्च होगी?

द्रुत विधि **(Quicker Method):**

$$\text{अभीष्ट राशि} = \frac{\text{(एक टाइल की कीमत)} \times \text{आंगन की (लंबाई} \times \text{चौड़ाई)}}{\text{प्रत्येक टाइल की (लंबाई} \times \text{चौड़ाई)}}$$

$$= 1 \times \frac{30 \times 16.5}{2.5 \times 2} = 99 \text{ रु.}$$

yoursmartbook

टाइप IV: वर्गाकार टाइल्स बिछाना: सबसे बड़ा टाइल

उदा. 5: 39 मी. 10 सेंटीमीटर लंबे एवं 35 मीटर 70 सेंटीमीटर चौड़े एक हॉल में समान आकार वाले वर्गाकार टाइल बिछाने हैं। सबसे बड़े टाइल का माप बताएँ ताकि टाइलें पूर्णतया बिना कटे फिट हो जाएँ तथा टाइल की कुल संख्या भी बताएँ।

हल: **द्रुत विधि (Quicker Method) :**

सबसे बड़े टाइल (संभावित) की भुजा = कमरे की लंबाई एवं चौड़ाई का महत्तम समापवर्तक

= 39.10 एवं 35.70 मीटर का महत्तम समापवर्तक

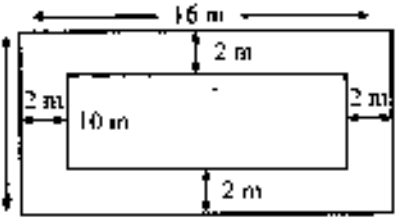
= 1.70 मीटर

अभीष्ट टाइलों की संख्या = $\frac{\text{कमरे की (लंबाई} \times \text{चौड़ाई)}}{(\text{कमरे की लंबाई एवं चौड़ाई का महत्तम समापवर्तक})^2}$

$$= \frac{39.10 \times 35.70}{1.70 \times 1.70} = 483$$

टाइप V: बगीचे के चारों ओर का रास्ता तथा कमरे के चारों ओर का बरामदा

उदा. 6: 12 मीटर लंबे एवं 10 मीटर चौड़े एक हॉल के चारों ओर 2 मीटर चौड़ा बरामदा है। बरामदे का क्षेत्रफल निकालें।



हल: **द्रुत विधि (Quicker Method) :**

ऐसी स्थितियों में,

(I) **जब बरामदा, कमरे के बाहर चारों ओर से घेरता हो**

बरामदे का क्षेत्रफल = 2(बरामदे की चौड़ाई) × [कमरे की लंबाई + चौड़ाई + 2(बरामदे की चौड़ाई)] **(याद रखें)**

(II) **जब रास्ता बगीचे के अंदर चारों ओर बना हुआ हो**

रास्ते का क्षेत्रफल = 2(रास्ते की चौड़ाई) × [बगीचे की लंबाई + चौड़ाई − 2(रास्ते की चौड़ाई)] **[याद रखें]**

दिए गए प्रश्न के लिए,

सूत्र I से, चूँकि बरामदा कमरे के बाहर है, इसलिए सूत्र-I का प्रयोग किया जाएगा।

बरामदे का क्षेत्रफल = 2 × 2 × (10 + 12 + 2 × 2)

= 4 × 26 = 104 वर्ग मीटर

yourmahboob

उदा. 7: किसी आयताकार घास के मैदान की माप 112 मीटर × 78 मीटर है। इस मैदान के अंदर 2.5 मीटर चौड़ा ग्रेवल का एक रास्ता है। रास्ते का क्षेत्रफल निकालें तथा 2 रु. प्रति वर्ग मीटर की दर से इसे बनाने की लागत बताएँ।

हल: ऊपर दिए गए सूत्र II से (चूँकि रास्ता मैदान के अंदर है, इसलिए सूत्र-II ही इस्तेमाल किया जाएगा),

रास्ते का क्षेत्रफल $= 2 \times 2.5 \times (112 - 78 - 2 \times 2.5)$

$= 5 \times 185 = 925$ वर्गमीटर

∴ निर्माण कार्य की लागत = दर × क्षेत्रफल $= 2 \times 925 = 1850$ रु.

रास्ते पर आधारित कुछ और स्थितियाँ

A. जब रास्ते का क्षेत्रफल दिया गया हो तो बगीचे का क्षेत्रफल निकालना (बगीचा वर्गाकार है)

उदा. 8: किसी वर्गाकार बगीचे के चारों ओर स्थित 2 मीटर चौड़े रास्ते का क्षेत्रफल 9680 वर्ग मीटर है। तो रास्ते से घिरे बगीचे का क्षेत्रफल निकालें।

हल: **द्रुत विधि (Quicker Method):**

$$\text{वर्गाकार बगीचे का क्षेत्रफल} = \left[\frac{\text{रास्ते का क्षेत्रफल} - 4 \times (\text{रास्ते की चौड़ाई})^2}{4 \times \text{रास्ते की चौड़ाई}}\right]^2$$

(याद रखें)

∴ दिए गए आँकड़े हैं,

$$\text{बगीचे का क्षेत्रफल} = \left(\frac{9680 - 4 \times (2)^2}{4 \times 2}\right)^2$$

$$= \left(\frac{9664}{8}\right)^2 = (1208)^2$$

$= 1459264$ वर्ग मी.

B. जब रास्ते का क्षेत्रफल दिया गया हो, तो रास्ते की चौड़ाई निकालना

उदा. 9: 37 मी. लंबे और 30 मीटर चौड़े आयताकार पार्क के अंदर स्थित रास्ते का क्षेत्रफल 570 वर्ग मीटर है। रास्ते की चौड़ाई बताएँ।

हल: *द्रुत विधि (सूत्र-II, उदा. 6 देखें)*

रास्ते का क्षेत्रफल $= 2 \times$ रास्ते की चौड़ाई $\times$ [बगीचे की (लंबाई + चौड़ाई) $- 2 \times$ (रास्ते की चौड़ाई)]

$\Rightarrow 570 = 2 \times x \times [37 + 30 - 2x]$ (x रास्ते की चौड़ाई है)

$\Rightarrow 570 = 134x - 4x^2$

$\Rightarrow 4x^2 - 134x + 570 = 0$

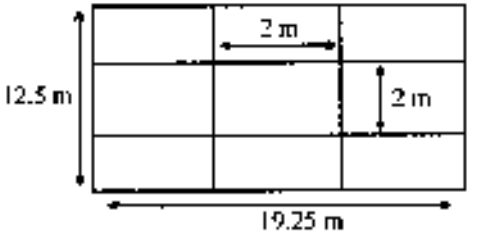
yoursmahboob

∴ इस समीकरण को हल करने पर

$x = 5$ मीटर

C. जब रास्ते एक-दूसरे को काटते हों (महत्वपूर्ण)

उदा. 10: किसी आयताकार मैदान की माप 19 मीटर 2.5 डेसीमीटर × 12 मीटर 5 डेसीमीटर है। प्रत्येक भुजा के केन्द्र से 2 मीटर चौड़ा रास्ता गुजरता है और ये दोनों रास्ते एक-दूसरे को काटते भी हैं। रास्ते का क्षेत्रफल निकालें। 1.32 रु. प्रति वर्ग मीटर की दर से, इन पर पत्थर बिछाने में कितना खर्च आएगा ?



हल: **द्रुत विधि (Quicker Method):**

ऐसे प्रश्नों को हल करने के लिए निम्नलिखित सूत्र का इस्तेमाल करें:

I. रास्ते का क्षेत्रफल – (रास्ते की चौड़ाई) [बगीचे की (लंबाई – चौड़ाई) – रास्ते की चौड़ाई]

(याद रखें)

II. रास्ते को छोड़कर, शेष बगीचे का क्षेत्रफल – (बगीचे की लंबाई – रास्ते की चौड़ाई) × (बगीचे की चौड़ाई – रास्ते की चौड़ाई) *(स्मरणीय)*

दिए गए प्रश्न के अनुसार,

रास्ते का क्षेत्रफल $= 2 \times (19.25 + 12.5 - 2)$

$= 2 \times 29.75 = 59.5$ वर्ग मीटर

∴ पत्थर बिछाने में आने वाला खर्च = दर × क्षेत्रफल

$= (59.5 \times 1.32)$ रु. $= 78.54$ रु.

टाइप VI: क्षेत्रफल और अनुपात

उदा. 11: किसी आयताकार मैदान का क्षेत्रफल 726 वर्ग मीटर है। तथा उसकी भुजाएँ 3:2 के अनुपात में हैं तो भुजाओं की माप क्या है ?

हल: **द्रुत विधि (Quicker Method):**

भुजा $= \sqrt{\text{क्षेत्रफल} \times \text{अनुपात}}$

दूसरी भुजा $= \sqrt{\text{क्षेत्रफल} \times \text{व्युत्क्रम-अनुपात (inverse ratio)}}$

∴ दिए गए प्रश्न में,

पहली भुजा $= \sqrt{726 \times \frac{3}{2}} = \sqrt{1089} = 33$ मीटर

yoursmahboob

तथा, दूसरी भुजा = $\sqrt{726 \times \frac{2}{3}} = \sqrt{484} = 22$ मीटर

टाइप VII: विविध उदाहरण

टर्की कारपेट एवं ऑयल क्लॉथ

उदा.: 12. 10 वर्ग मीटर वाले किसी कमरे के केन्द्र में टर्की कारपेट का एक वर्ग है तथा फर्श के बचे हुए हिस्से पर ऑयल क्लॉथ बिछा हुआ है। कारपेट एवं ऑयल क्लॉथ की कीमतें क्रमशः 15 रु. एवं 6.50 रु. प्रति वर्ग मीटर हैं तथा टर्की कारपेट एवं ऑयल क्लॉथ की कुल लागत 1338.50 रु. है। ऑयल क्लॉथ के बोर्डर की चौड़ाई बताएँ

हल: वर्गाकार कमरे का क्षेत्रफल = 100 वर्ग मीटर

औसत खर्च प्रति वर्ग मीटर = $\frac{1338.50}{100}$ = 13.385 रु.

कारपेट		ऑयलक्लॉथ
15		6.50
	13.385	
0.885		1.615

= 81 : 19

मिश्रण विधि (Rule of Alligation) से वर्गाकार कारपेट का क्षेत्रफल = 81 वर्ग मीटर

∴ कारपेट की लंबाई एवं चौड़ाई = 9 मीटर

लेकिन कमरे की लंबाई एवं चौड़ाई = 10 मी.

∴ बोर्डर की चौड़ाई का दुगुना = (10 − 9 =) 1 मीटर

∴ बोर्डर की चौड़ाई = $\frac{1}{2}$ मीटर = 5 डेसीमीटर; उत्तर

विकर्ण

उदा. 13: 2 वर्ग किलोमीटर क्षेत्रफल वाले एक वर्गाकार मैदान घेरा(fence) के लहारे दो बराबर हिस्सों में विभाजित किया जाता है। यह घेरा (fence) विकर्ण के समानांतर (coincide) होता है। घेरे की लंबाई बताएँ

हल: वर्ग का क्षेत्रफल = 2 वर्ग किलोमीटर

∴ विकर्ण = $\sqrt{2 \times 2} = 2$ किलोमीटर; उत्तर

yousmanbooks

उदा. 14: 31684 वर्ग मीटर माप वाले किसी आयताकार मैदान को तार से घेरना है। ये तार जमीन में क्रमशः 1,2,3, एवं 4 मीटर की ऊँचाई पर लगाए जाने हैं। यदि एक बार घेरने में मैदान की परिमिति से 5% अधिक लंबाई का तार चाहिए होता हो तो कुल मिलाकर कितना लंबा तार चाहिए होगा?

हल: मैदान का क्षेत्रफल = 31684 वर्ग मीटर

परिमिति = $\sqrt{31684} \times 4$ मीटर

= 178 × 4 मीटर

∴ तार के प्रत्येक घेरे की लंबाई = $178 \times 4 \times \frac{105}{100}$ मीटर

∵ तार के चार घेरे डाले जाते हैं इसलिए अभीष्ट तार की कुल लंबाई

$= 178 \times 4 \times \frac{105}{100} \times 4$

= 2990.4 मीटर *(उत्तर)*

त्रिभुज पर आधारित प्रश्न

टाइप I: सूत्रों का साधारण प्रयोग

उदा. 15: किसी त्रिभुजाकार मैदान का आधार 880 मीटर है एवं ऊँचाई 550 मीटर है। इस मैदान का क्षेत्रफल निकालें। इस मैदान में 24.25 रु. प्रति वर्ग हेक्टोमीटर की दर से जल की आपूर्ति का खर्च भी बताएँ

हल: मैदान का क्षेत्रफल = $\frac{\text{आधार} \times \text{ऊँचाई}}{2}$

$= \frac{880 \times 550}{2}$ वर्ग मीटर

$= \frac{440 \times 550}{100 \times 100}$ वर्ग हेक्टोमीटर

= 24.20 वर्ग हेक्टोमीटर (उत्तर)

1 वर्ग हेक्टोमीटर में पानी की आपूर्ति का खर्च = 24.25 रु.

∴ पूरे मैदान में पानी की आपूर्ति का खर्च (24.20 × 24.25) रु.

= 586.85 रु. (उत्तर)

उदा. 16: किसी त्रिभुजाकार खेत का आधार उसकी ऊँचाई का तिगुना है। यदि 36.72 रु. प्रति हेक्टेयर की दर से इसमें खेती करने की लागत 495.72 रु. हो तो खेत का आधार एवं ऊँचाई बताएँ।

हल: खेत का क्षेत्रफल = $\frac{495.72}{36.72}$ हेक्टेयर

$= \frac{27}{2}$ हेक्टेयर

yoursmahboob

खेत का क्षेत्रफल (दूसरे तरीके से) = $\frac{1}{2} \times 3 \times$ ऊँचाई $\times$ ऊँचाई

$= \frac{3}{2}$ (ऊँचाई)^2

$\therefore \frac{3}{2}$ (ऊँचाई)^2 = $\frac{27}{2}$ हेक्टेयर

$\therefore$ (ऊँचाई)^2 = $\frac{27}{2} \times \frac{2}{3}$ हेक्टेयर

= 9 हेक्टेयर

= 90,000 वर्ग मीटर

$\therefore$ ऊँचाई = $\sqrt{90,000}$ मी. = 300 मी. (उत्तर)

आधार = 3 × ऊँचाई = 900 मीटर; उत्तर

उदा. 17: उस त्रिभुज का क्षेत्रफल निकालें, जिसकी भुजाएँ क्रमशः 50 मीटर, 78 मीटर और 112 मीटर हैं। सम्मुख कोण से 112 मीटर लंबी भुजा पर डाले गए लम्ब की लंबाई बताएँ।

हल: यहाँ a = 50 मीटर, b = 78 मीटर, c = 112 मीटर

$\therefore s = \frac{1}{2}(50 + 78 + 112)$ मीटर

$= \frac{1}{2} \times 240$ मीटर = 120 मीटर

$\therefore (s - a) = (120 - 50)$ मीटर = 70 मीटर

$(s - b) = (120 - 78)$ मीटर = 42 मीटर

$(s - c) = (120 - 112)$ मीटर = 8 मीटर

$\therefore$ क्षेत्रफल = $\sqrt{120 \times 70 \times 42 \times 8}$ वर्ग मीटर

= 1680 वर्ग मीटर (उत्तर)

$\therefore$ लंब की लंबाई = $\frac{2 \times \text{क्षेत्रफल}}{\text{आधार}} = \frac{1680 \times 2}{112}$

= 30 मीटर (उत्तर)

टाइप II: त्रिभुज पर आधारित प्रश्नों के लिए संक्षिप्त विधि (Quicker Method)

उदा. (18 – 20): उपर्युक्त तीनों उदाहरणों (उदा.–15, 17) को द्रुत-विधि (Quicker Method) से हल करें।

हल: **उदा.–18:** चूँकि उदा. 15 में सीधे सूत्र का उपयोग किया गया है, इसलिए प्रयुक्त विधि 1 से भी संक्षिप्त विधि हो ही नहीं सकता।

उदा. 19. उदा.–16 में आधार एवं ऊँचाई के बीच का अनुपात 3 : 1 है। ऐसे प्रश्नों के लिए

yoursmahboob

निम्नलिखित नियम का प्रयोग करें:

आधार = $\sqrt{2 \times \text{क्षेत्रफल} \times \text{अनुपात}}$

ऊँचाई = $\sqrt{2 \times \text{क्षेत्रफल} \times \text{अनुपात का व्युत्क्रम}}$

दिया गया है कि आधार : ऊँचाई = 3 : 1

∵ आधार के साथ जुड़ा हुआ अनुपात 3 है तथा ऊँचाई के साथ जुड़ा हुआ अनुपात 1 है

∴ आधार = $\sqrt{2 \times \frac{27}{2} \times \frac{3}{1}} = 900$ मीटर

ऊँचाई = $\sqrt{2 \times \frac{27}{2} \times \frac{1}{3}} = 300$ मीटर

उदा. 20. उदा.–17 में सीधे सूत्र का ही इस्तेमाल किया गया है, इसलिए इससे अधिक संक्षिप्त विधि ढूँढ़ पाना मुश्किल है।

समांतर चतुर्भुज, समचतुर्भुज एवं समलम्ब चतुर्भुज पर आधारित प्रश्न

टाइप 1: प्रश्न, जिनमें सूत्रों का सीधा उपयोग हो

उदा. 21: समांतर चतुर्भुज के आकार वाले धातु के उस टुकड़े का क्षेत्रफल निकालें, जिसका आधार 10 सेंटीमीटर है और ऊँचाई 6.4 सेंटीमीटर।

हल: सतह का क्षेत्रफल = आधार × ऊँचाई
= 6.4 × 10
= 64 वर्ग सेंटीमीटर

उदा. 22: उस समचतुर्भुज का क्षेत्रफल निकालें, जिसके दोनों विकर्णों की लंबाई क्रमशः 8 सेंटीमीटर एवं 10 सेंटीमीटर हो।

हल: क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ × विकर्णों का गुणनफल

= $\frac{1}{2} \times 8 \times 10$ = 40 वर्ग सेंटीमीटर।

उदा. 23: किसी समलम्ब चतुर्भुज की दोनों समांतर भुजाओं के बीच की दूरी बताएँ यदि क्षेत्रफल 250 वर्ग मीटर हो तथा दोनों समांतर भुजाएँ क्रमशः 15 मी. एवं 10 मीटर लंबी हैं।

हल: यहाँ,

क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ × ऊँचाई × (समांतर भुजाओं का योग)

या, 250 = $\frac{1}{2}$ × ऊँचाई × (15 + 10)

yoursmahboob

या, ऊँचाई = $\frac{250 \times 2}{25}$

∴ ऊँचाई = 20 मीटर

टाइप 11: कुछ संक्षिप्त विधियाँ

A. ***किसी ऐसे समचतुर्भुज का क्षेत्रफल निकालना जिसकी एक भुजा एवं एक विकर्ण दिया हुआ हो।***

उदा. 24: उस समचतुर्भुज का क्षेत्रफल निकालिए जिसकी एक भुजा 20 सेंटीमीटर हो तथा एक विकर्ण 24 सेंटीमीटर हो।

हल: ***द्रुत विधि* (Quicker Method):**

समचतुर्भुज का क्षेत्रफल = विकर्ण × $\sqrt{(\text{भुजा})^2 - \left(\frac{\text{विकर्ण}}{2}\right)^2}$ ***(याद रखें)***

∴ दिए गए प्रश्न में

क्षेत्रफल = $24 \times \sqrt{(20)^2 - \left(\frac{24}{2}\right)^2}$

$= 24 \times \sqrt{400 - 144}$

$= 24 \times 16 = 384$ वर्ग सेंटीमीटर

उदा. 25: किसी समचतुर्भुज की परिमिति 146 सेंटीमीटर है तथा इसके एक विकर्ण की लंबाई मात्र 55 सेंटीमीटर है। दूसरा विकर्ण एवं समचतुर्भुज का क्षेत्रफल निकालें।

हल: ***द्रुत विधि* (Quicker Method) :**

दूसरा विकर्ण = $2 \times \sqrt{(\text{भुजा})^2 - \left(\frac{\text{विकर्ण}}{2}\right)^2}$ ***(याद रखें)***

समचतुर्भुज की एक भुजा = $\frac{146}{4} = 36.5$ से. मी.

∴ दूसरा विकर्ण = $2 \times \sqrt{(36.5)^2 - \left(\frac{55}{2}\right)^2}$ = 48 सेंटीमीटर

क्षेत्रफल = $\frac{1}{2} \times$ (विकर्णों का गुणनफल)

$= \frac{1}{2} \times 48 \times 55 = 1320$ वर्ग से. मी.

yourmanhoob

समबहुभुज पर आधारित समस्याएँ (Problems on Regular Polygon)

समबहुभुज (Regular Polygon) एक ऐसा बहुभुज, (त्रिभुज, चतुर्भुज, पंचभुज, षट्भुज, सप्तभुज, अष्टभुज आदि) है, जिसकी सभी भुजाएँ बराबर होती हैं। ऐसे समबहुभुजों के मामलों में निम्नलिखित सूत्र उपयोगी सिद्ध होते हैं :

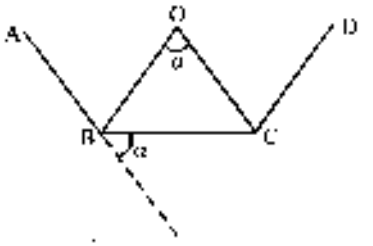
A. किसी समबहुभुज का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ × भुजाओं की संख्या × अंतर्वृत्त (inscribed circle) की त्रिज्या

B. षट्भुज (Hexagon) का क्षेत्रफल = $\frac{3\sqrt{3}}{2} \times (\text{भुजा})^2$

C. अष्टभुज (Octagon) का क्षेत्रफल = $2(\sqrt{2}+1) \times (\text{भुजा})^2$

D. सम बहुभुज में कोणों का माप

(i) समबहुभुज की प्रत्येक भुजा द्वारा केन्द्र पर बनाया गया कोण उसके बाह्य कोण (exterior angle) के बराबर होता है।



(ii) यदि किसी समबहुभुज का प्रत्येक बाह्य कोण दिया हुआ हो तो उस बहुभुज की भुजाओं की संख्या ज्ञात की जा सकती है।

$$\text{भुजाओं की संख्या} = \frac{360}{\text{प्रत्येक बाह्य कोण}}$$

(iii) n भुजाओं वाले किसी समबहुभुज का प्रत्येक अंतःकोण (interior angle) = $180\left(\frac{n-2}{n}\right)$ तथा किसी n भुजाओं वाले समबहुभुज के सभी कोणों का योग = $180^\circ(n-2)$.

उदा. 26: उस समषट्भुज (regular hexagon) का क्षेत्रफल निकालें जिसकी प्रत्येक भुजा 9 सेंटीमीटर है।

हल: किसी समषट्भुज का क्षेत्रफल = $\frac{3\sqrt{3}a^2}{2}$

यहाँ, a = 9 सेंटीमीटर

yoursmahboob

$\therefore$ क्षेत्रफल $= \frac{3\sqrt{3} \times 9^2}{2}$ वर्ग सेंटीमीटर

$= 210.4$ वर्ग सेंटीमीटर (लगभग)

उदा. 27: उस सम्अष्टभुज की भुजा (मीटर में) निकालें जिसका क्षेत्रफल 1 हेक्टेयर है।

हल: सम्अष्टभुज का क्षेत्रफल $= 2(1+\sqrt{2})a^2$

प्रश्नानुसार, $2(1+\sqrt{2})a^2 = 1$ हेक्टेयर

$\therefore a^2 = \frac{10,000}{2(1+\sqrt{2})}$ वर्ग मीटर

या, $a^2 = 2071$ वर्ग मीटर (लगभग)

$\therefore a = 46$ मीटर (लगभग); उत्तर

कमरे एवं दीवारों पर आधारित प्रश्न

उदा. 28: 8 मीटर लंबे, 6 मीटर चौड़े और 3 मीटर ऊँचे किसी कमरे में $1\frac{1}{2}$ मीटर × 1 मीटर आकार की दो खिड़कियाँ हैं एवं 2 मीटर × $1\frac{1}{2}$ मीटर आकार का एक दरवाजा है। दीवारों पर पेपर बिछाने में कितना खर्च आएगा यदि 50 सेंटीमीटर चौड़ा पेपर 25 पैसे प्रति मीटर हो?

हल: दीवारों का क्षेत्रफल $= 2(8+6) \times 3 = 84$ वर्ग मीटर

1 दरवाजा एवं दो खिड़कियों का क्षेत्रफल $= 2 \times \left(1\frac{1}{2} \times 1\right) + \left(2 \times 1\frac{1}{2}\right) = 6$ वर्ग मीटर

$\therefore$ पेपर बिछाए जाने वाले सतह का क्षेत्रफल $= 84 - 6 = 78$ वर्ग मीटर

$\therefore$ पेपर की लंबाई $= \frac{78 \times 100}{50}$ मी. $= 156$ मी.

$\therefore$ लागत $= \frac{156 \times 25}{100} = 39.0$ रु.

कमरे की ऊँचाई

उदा. 29: किसी कमरे की लंबाई एवं चौड़ाई क्रमशः 7 मीटर एवं 5 मीटर है। दरवाजे एवं खिड़कियाँ इसके 5 वर्ग मीटर स्थान को घेरे हुए हैं। दीवार के शेष सतह पर 75 से. मी. चौड़ा पेपर 4.20 रु. प्रति 13 मी. लंबा टुकड़ा की दर से चढ़ाने में कुल मिलाकर 39.20 रु. का खर्च आता है, कमरे की ऊँचाई बताएँ।

हल: पेपर की लंबाई $= \frac{39.20 \text{ रु.}}{4.20 \text{ रु.}} \times 13$ मीटर $= \frac{364}{3}$ मीटर

yoursmahboob

$\therefore$ पेपर का क्षेत्रफल $= \frac{364}{3} \times \frac{75}{100} = 91$ वर्ग मीटर

$\therefore$ दीवारों की क्षेत्रफल $= 91 + 5 = 96$ वर्ग मीटर

दीवारों का क्षेत्रफल $= 2(7 + 5) \times$ ऊँचाई $= (24 \times$ ऊँचाई$)$ वर्ग मीटर

$\therefore 24 \times$ ऊँचाई $= 96$

$\therefore$ ऊँचाई $= \frac{96}{24} = 4$ मीटर (उत्तर)

उदा. 30: एक हॉल, जिसकी लंबाई 16 मीटर है तथा चौड़ाई, ऊँचाई की दुगुनी है, के चारों दीवारों पर पेपर बिछवाने में 2 मीटर चौड़े पेपर का 168 मीटर लंबा टुकड़ा चाहिए होता है। फर्श का क्षेत्रफल निकालें।

हल: मान लिया कि चौड़ाई $= 2h$ मीटर

$\therefore$ ऊँचाई $= h$ मीटर

दीवारों का क्षेत्रफल $= 2(16 + 2h)h$ वर्ग मीटर

पेपर का क्षेत्रफल $= 168 \times 2$ वर्ग मीटर

$\therefore 2(16 + 2h) \times h = 168 \times 2$

$\therefore (8 + h) \times h = 84$

हल करने पर, $h = 6$ एवं -14 (-14 स्वीकार्य नहीं है)

$\therefore h = 6$ एवं चौड़ाई $= 12$

फर्श का क्षेत्रफल $= 16 \times 12$ वर्गमीटर $= 192$ वर्ग मीटर; उत्तर

किसी बक्से की सतह पर धातु की कलई (लेप) चढ़ाना

उदा. 31: किसी बंद बक्से की बाहरी माप 9 डेसीमीटर $\times$ 6 डेसीमीटर $\times 4\frac{1}{2}$ डेसीमीटर है, और $\frac{5}{2}$ सेंटीमीटर मोटे लकड़ी से निर्मित है। 6 पैसे प्रति वर्ग मीटर की दर से इसके अंदरूनी सतह पर धातु की कलई चढ़ाने में कितना खर्च आएगा ?

हल: आंतरिक माप क्रमशः $8\frac{1}{2}$ डेसीमीटर, $5\frac{1}{2}$ डेसीमीटर एवं 4 डेसीमीटर है।

$\therefore$ चारों भुजाओं का क्षेत्रफल $= 2\left(8\frac{1}{2} + 5\frac{1}{2}\right) \times 4$ वर्ग डेसीमीटर

$= 112$ वर्ग डेसी मीटर

नीचे एवं ऊपर की सतह का क्षेत्रफल $= 2 \times 8\frac{1}{2} \times 5\frac{1}{2}$ वर्ग डेसीमीटर

$= \frac{187}{2}$ वर्ग डेसीमीटर

yoursmahboob

$\therefore$ कलई किए जानेवाले सतह का क्षेत्रफल = $\left(112 + \frac{187}{2}\right)$ वर्ग डेसीमीटर

$= \frac{411}{2}$ वर्ग डेसीमीटर

$\therefore$ लागत = $\frac{411}{2} \times 6$ पैसे = 12.33 रु. (उत्तर)

वृत्त पर आधारित प्रश्न

उत्तर तक शीघ्रता से पहुँचने के लिए निम्नलिखित सूत्रों को उपयोग किया जा सकता है :

(i) क्षेत्रफल = $\pi \times (\text{त्रिज्या})^2$

(ii) त्रिज्या = $\sqrt{\left(\frac{\text{क्षेत्रफल}}{\pi}\right)}$

(iii) व्यास = $2\sqrt{\left(\frac{\text{क्षेत्रफल}}{\pi}\right)}$

(iv) क्षेत्रफल = $\pi\left(\frac{\text{व्यास}}{2}\right)^2$

(v) परिमिति = 2π (त्रिज्या)

(vi) त्रिज्या = $\frac{\text{परिमिति}}{2\pi}$

(vii) परिमिति = π(व्यास)

(viii) व्यास = $\left(\frac{\text{परिमिति}}{\pi}\right)$

(ix) किसी त्रिज्याखंड का चाप = $\left(\frac{\theta^\circ}{360^\circ}\right) \times$ परिधि

(x) किसी त्रिज्याखंड का क्षेत्रफल = $\left(\frac{\theta^\circ}{360^\circ}\right) \times \pi \times (\text{त्रिज्या})^2$

आइए, अब कुछ उदाहरणों को देखें।

I: सूत्रों के सरल उपयोग पर आधारित प्रश्न

उदा. 32:

(a) उस वृत्त की परिधि निकालें, जिसकी त्रिज्या 42 मीटर है।

yoursmahboob

(b) उस वृत्ताकार क्षेत्र की त्रिज्या निकालें, जिसकी परिधि $5\frac{1}{2}$ कि.मी. के बराबर है।

$\left[\pi = \frac{22}{7}\right]$

हल: (a) $C = 2\pi r$

$\therefore$ अभीष्ट परिधि $= 2 \times \frac{22}{7} \times 42$ मीटर $= 264$ मीटर (उत्तर)

(b) $r = \frac{C}{2\pi}$

$\therefore$ अभीष्ट त्रिज्या $= \frac{\frac{11}{2} \times 1000}{2\pi}$ मीटर

$= \frac{\frac{11}{2} \times 1000 \times 7}{2 \times 22}$ मीटर

$= 875$ मीटर (उत्तर)

उदा. 13: किसी वृत्ताकार पहिए की त्रिज्या $1\frac{3}{4}$ मीटर है: 11 किलोमीटर की यात्रा करने के लिए, इसे कितने चक्कर लगाने होंगे ?

हल: तय की जानेवाली दूरी = 11 किलोमटर = 11000 मीटर

पहिए की त्रिज्या $= 1\frac{3}{4}$ मीटर

$\therefore$ पहिए की परिधि $= 2 \times \frac{22}{7} \times 1\frac{3}{4} = 11$ मीटर

$\therefore$ 11 मीटर की यात्रा पूरी करने में पहिए को 1 चक्कर काटना पड़ता है।

$\therefore$ 11000 मीटर की यात्रा करने के लिए $\frac{1}{11} \times 11000$ चक्कर

$= 1000$ चक्कर काटने पड़ते हैं।

सूत्र (Direct Formula):

चक्करों की संख्या $= \frac{\text{दूरी}}{2\pi r} = \frac{11000}{2 \times \frac{22}{7} \times \frac{7}{4}} = 1000$

yoursmabooh

II. कुछ संक्षिप्त विधियाँ (Some Quicker Methods) :

A. घेरा (Ring) का क्षेत्रफल

उदा. 34: किसी वृत्ताकार बगीचे की परिधि 1012 मीटर है। क्षेत्रफल निकालें। बगीचे के बाहर इसके चारों ओर 3.5 मीटर चौड़ी एक सड़क है। इस सड़क का क्षेत्रफल निकालें तथा 32 पैसे प्रति वर्ग मीटर की दर से इस पर कंकड़ बिछाने में होने वाले खर्च की गणना करें।

हल: **द्रुत विधि (Quicker Method) :**

$$\text{क्षेत्रफल} = \frac{(\text{परिधि})^2}{4\pi}$$ *(याद रखें)*

$$= \frac{(1012)^2}{4 \times \frac{22}{7}} = 81466 \text{ वर्ग मीटर}$$

वृत्तकर घेरा (ring) का क्षेत्रफल

= π [(घेरा की चौड़ाई) (2 × अंदर की त्रिज्या × घेरा की चौड़ाई)]

(याद रखें)

$$\text{अंदर की त्रिज्या} = \sqrt{\frac{\text{क्षेत्रफल}}{\pi}} = \sqrt{\frac{81466 \times 7}{22}} = 161 \text{ मीटर}$$

वृत्तकर घेरा के आकार वाले सड़क (ring-shaped road) का क्षेत्रफल

$$= \frac{22}{7} \times 3.5 \times (3.5 + 2 \times 161)$$

$$= \frac{22}{7} \times 3.5 \times (3.5 + 322) = 3580.5 \text{ वर्ग मीटर}$$

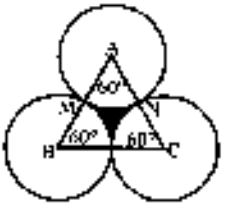
कंकड़ बिछाने में आनेवाली लागत = 3580.5 × 0.32 = 1145.76 रु.

B. यदि एक जैसे वृत्त साथ-साथ रखे गए हों (Identical Circles Placed Together)

उदा. 35: किसी समबाहु त्रिभुज की प्रत्येक भुजा 2 मीटर के बराबर है। इस त्रिभुज के तीनों कोणों को केन्द्र बनाकर 1 मीटर की त्रिज्या वाले तीन वृत्त खींचे जाते हैं।

(i) इन सभी वृत्तों एवं त्रिभुज में सर्वनिम्न हिस्से का क्षेत्रफल निकालें।

(ii) त्रिभुज के शेष हिस्से का भी क्षेत्रफल निकालें।



yourspakboob

हल: **द्रुत विधि (Quicker Method) :**

जब किसी समबाहु त्रिभुज की भुजा वृत्त के त्रिज्या की दुगुनी हो तो सभी वृत्त एक दूसरे को स्पर्श करते हैं। ऐसी स्थिति में निम्नलिखित सूत्र का इस्तेमाल किया जा सकता है।

प्रत्येक त्रिज्याखंड(sector) का क्षेत्रफल = $=\frac{1}{6}\times\pi\times$ (त्रिज्या)^2

शेष या छायांकित(shaded) हिस्से का क्षेत्रफल = $\left[\sqrt{3}-\frac{\pi}{2}\right]$ (त्रिज्या)^2

= (0.162) (त्रिज्या)^2

(याद रखें)

दिए गए प्रश्न में,

(i) सभी वृत्तों एवं त्रिभुज के बीच सर्वनिष्ठ हिस्से का क्षेत्रफल = त्रिज्याखंड AMN, BML एवं CLN के क्षेत्रफलों का योगफल

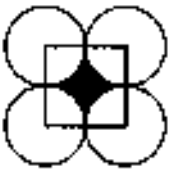
$$=\frac{1}{6}\pi r^2+\frac{1}{6}\pi r^2+\frac{1}{6}\pi r^2-\frac{1}{2}\pi r^2$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{22}{7}\times(1)^2=1.57 \text{ वर्ग मीटर}$$

(ii) त्रिभुज के शेष हिस्से का क्षेत्रफल = छायांकित हिस्से का क्षेत्रफल

= (0.162) × (1)^2 = 0.162 वर्ग मीटर

उदा. 36: किसी सिक्के का व्यास 1 सेंटीमीटर है; यदि चारों सिक्कों को किसी मेज पर इस प्रकार रखा जाए ताकि प्रत्येक सिक्के का किनारा अन्य दो सिक्कों के किनारे को स्पर्श करे तो उनके बीच के खाली स्थान का क्षेत्रफल निकालें।



(π = 3.1416)

हल: **द्रुत विधि (Quicker Method) :**

यदि वृत्त इस ढंग से सजाए जाएँ कि एक दूसरे को स्पर्श करें तो इस प्रकार निर्मित वर्ग की भुजा त्रिज्या की दुगुनी होती है। ऐसी स्थिति मे निम्नलिखित सूत्र का इस्तेमाल किया जा सकता है।

प्रत्येक त्रिज्याखंड का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}\times\pi\times$(त्रिज्या)^2 *(याद रखें)*

शेष हिस्से (छायांकित हिस्सा) का क्षेत्रफल = $(4-\pi)$ (त्रिज्या)^2

= (0.86) (त्रिज्या)^2 *(याद रखें)*

yoursmahboob

अतः दिए गए वृत्त में

खाली हिस्से का क्षेत्रफल = (0.86) (त्रिज्या)^2

$$= (0.86)\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 0.215 \text{ वर्ग सेंटीमीटर}$$

विविध उदाहरण

उदा. 37: किसी आयत की लंबाई 60% बढ़ा दी जाती है। इसकी चौड़ाई में कितने प्रतिशत की कमी की जाए ताकि क्षेत्रफल में कोई परिवर्तन न हो?

हल: मान लिया कि आयत की लंबाई एवं चौड़ाई क्रमशः x एवं y है। $\therefore$ क्षेत्रफल $= xy$

नई लंबाई $= x\left(\frac{160}{100}\right) = \frac{8x}{5}$

$\because$ क्षेत्रफल में कोई परिवर्तन नहीं होता है, इसलिए आयत की नई चौड़ाई $= \frac{xy}{\frac{8x}{5}} = \frac{5y}{8}$

$\therefore$ चौड़ाई में कमी $= y - \frac{5y}{8} = \frac{3y}{8}$

$\therefore$ चौड़ाई में प्रतिशत कमी $= \frac{3y \times 100}{8 \times y} = \frac{75}{2} = 37\frac{1}{2}\%$

द्रुत विधि (Quicker Method):

'प्रतिशत' वाले अध्याय में आपको ऐसे तमाम प्रश्नों से निबटना पड़ा होगा। यदि आप स्मरण-शक्ति पर जोर डालें तो आप खूब कुछ इस तरह का पाएँगे:

चौड़ाई में अभीष्ट प्रतिशत कमी $= 60\left(\frac{100}{100+60}\right) = \frac{75}{2} = 37\frac{1}{2}\%$

उदा. 38: यदि किसी आयत की लंबाई में 20% की कमी कर दी जाए तो उसकी चौड़ाई में कितने प्रतिशत की वृद्धि करने से क्षेत्रफल यथावत रहेगा?

हल: ***द्रुत विधि (Quicker Method):***

चौड़ाई में अभीष्ट प्रतिशत वृद्धि $= 20\left[\frac{100}{100-20}\right] = 25\%$

नोट: उपर्युक्त सूत्र प्राप्त करने के लिए हमने भिन्न के नियम (Rule of Fraction) का इस्तेमाल किया है।

प्रमेय: यदि किसी आयत की लंबाई एवं चौड़ाई में क्रमशः x एवं y प्रतिशत की वृद्धि कर दी जाए तो क्षेत्रफल में $\left(x + y + \frac{xy}{100}\right)\%$ की वृद्धि हो जाती है।

प्रमाण: 'प्रतिशत' वाला अध्याय देखिए। वहाँ ऐसा ही एक प्रमेय का प्रमाण मिल जाएगा।

yousmathboob

नोट: यदि आयत की दोनों भुजाओं में से किसी की भी माप में कमी आती है तो दिए गए सूत्र में उस माप के लिए ऋण चिह्न का इस्तेमाल करना न भूलें।

उदा. 39: यदि किसी आयत की लंबाई एवं चौड़ाई क्रमशः 5% एवं 4% बढ़ा दी जाती है तो उसके क्षेत्रफल में कितने प्रतिशत की वृद्धि होगी?

हल: **सूत्र से (Direct Formula):**

क्षेत्रफल में प्रतिशत वृद्धि $= 5 - 4 + \frac{5 \times 4}{100} = 9 + 0.2 = 9.2\%$

उदा. 40: यदि किसी आयत की लंबाई में 10% की वृद्धि होती है और चौड़ाई में 12% की कमी आती है तो कुल मिलाकर क्षेत्रफल में कितने प्रतिशत का परिवर्तन आता है?

हल: चूँकि चौड़ाई में 12% की कमी आती है। इसलिए $y = -12$

क्षेत्रफल में प्रतिशत परिवर्तन $= 10 - 12 + \frac{10 \times (-12)}{100}$

$= -2 - 1.2 = -3.2\%$

$\therefore$ यहाँ चिह्न ऋणात्मक है, इसलिए क्षेत्रफल में होने वाली प्रतिशत कमी = 3.2%

उदा. 41: यदि किसी आयत की लंबाई में 4% की कमी हो तथा चौड़ाई में 6% की वृद्धि हो तो क्षेत्रफल में कितने प्रतिशत का परिवर्तन आएगा?

हल: स्वयं प्रयास कीजिए। (उत्तर 1.76% वृद्धि)

उदा. 42: यदि किसी वर्ग की भुजाएँ 10% बढ़ा दी जाएँ तो इसके क्षेत्रफल में ..... % की वृद्धि होगी।

हल: हमलोग उपर्युक्त सूत्र में $x = y = 10\%$ रखकर क्षेत्रफल में होने वाले प्रतिशत वृद्धि की गणना कर सकते हैं।

क्षेत्रफल में प्रतिशत वृद्धि $= 10 + 10 + \frac{10 \times 10}{100} = 21\%$

प्रमेय: यदि किसी द्विविमीय ज्यामितीय आकृति की सभी भुजाएँ $x\%$ बदल दी जाएँ तो इसके क्षेत्रफल में $\left(2x + \frac{x^2}{100}\right)\%$ का परिवर्तन आता है।

प्रमाण: उपर्युक्त प्रमेय किसी भी प्रकार की द्विविमीय आकृतियों (जैसे, सप्तभुज, षट्भुज, पंचभुज, चतुर्भुज, त्रिभुज, वृत्त आदि) पर लागू होता है।

हमलोग, त्रिभुज, आयत और वृत्त के संदर्भ में इस प्रमेय को प्रमाणित करेंगे। इसके बाद सभी प्रकार की द्विविमीय आकृतियों के लिए इसका सामान्यीकरण किया जाएगा।

त्रिभुज के संदर्भ में : मान लिया कि त्रिभुज की तीनों भुजाएँ क्रमशः a, b एवं c हैं।

$\therefore$ क्षेत्रफल $A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

जहाँ, $s = \frac{a+b+c}{2}$

yousmahboob

सभी भुजाओं में x% की वृद्धि होने पर भुजाएँ क्रमशः $\frac{a(100+x)}{100}$, $\frac{b(100+x)}{100}$ एवं $\frac{c(100+x)}{100}$ हो जाती हैं।

अब, $s_1 = \frac{100+x}{100}\left(\frac{a+b+c}{2}\right) = \frac{100-x}{100}(s)$

∴ नया क्षेत्रफल

$$A_1 = \sqrt{s_1\left(s_1 - \frac{a(100+x)}{100}\right)\left(s_1 - \frac{b(100+x)}{100}\right)\left(s_1 - \frac{c(100+x)}{100}\right)}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{100+x}{100}\right)^4 s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$A_1 = \left(\frac{100+x}{100}\right)^2 A$$

क्षेत्रफल में % वृद्धि $= \frac{A_1 - A}{A} \times 100$

$$= \frac{\left[\left(\frac{100+x}{100}\right)^2 - 1\right]A}{A} \times 100$$

$$= \left[\left(\frac{100+x}{100}\right)^2 - 1\right] \times 100$$

$$= \left[1 + \frac{x^2}{(100)^2} + \frac{2x}{(100)} - 1\right] \times 100 = \left[2x + \frac{x^2}{100}\right]$$

इस प्रकार त्रिभुज के संदर्भ में प्रमेय प्रमाणित हो गया।

आयत के संदर्भ में : मान लिया कि आयत की भुजाएँ a और b हैं। भुजाओं में x% का परिवर्तन आने पर इसका मान बदलकर क्रमशः $\frac{a(100+x)}{100}$ एवं $\frac{b(100+x)}{100}$ हो जाता है।

अब, नया क्षेत्रफल – $A_1 = ab\left[\frac{100+x}{100}\right]^2$

yoursmahboob

$$= \left[\frac{100+x}{100}\right]^2 \times A$$

क्षेत्रफल में % वृद्धि $= \frac{A_1 - A}{A} \times 100$

$$= \left[\left(\frac{100+x}{100}\right)^2 - 1\right] \times 100$$

$$= \left[2x + \frac{x^2}{100}\right]$$

इस प्रकार यह प्रमेय आयत के लिए भी सही है।

वृत्त के संदर्भ में : वृत्त की दो भुजाएँ एक समान होती हैं और यह प्रत्येक भुजा त्रिज्या कहलाती है (∵ क्षेत्रफल = πr^2, r का उपयोग दुबारा किया जाता है)

क्षेत्रफल = $A = \pi r^2$

जब इसकी त्रिज्या में x% का बदलाव (बढ़ना) आता है तो, त्रिज्या

$\frac{r(100+x)}{100}$ हो जाती है।

$\therefore$ नया क्षेत्रफल $A_1 = \pi\left[\frac{r(100+x)}{100}\right]^2$

$$= \pi r^2\left[\frac{100+x}{100}\right]^2$$

$$= \left[\frac{100+x}{100}\right]^2 A$$

क्षेत्रफल में प्रतिशत वृद्धि $= \frac{A_1 - A}{A} \times 100$

$$= \left[\left(\frac{100+x}{100}\right)^2\right] \times 100 - \left[2x + \frac{x^2}{100}\right]$$

इस प्रकार यह प्रमेय वृत्त के लिए भी सही है।

निष्कर्ष : इस प्रकार हम इस निष्कर्ष पर पहुँचते हैं कि दिया गया प्रमेय सभी प्रकार की द्विविमीय आकृतियों के लिए सही है।

yourmathbook

नोट: 1. जब कभी माप में कमी हो तो x के ऋणात्मक मान का प्रयोग करें। इसी तरह जब उत्तर ऋणात्मक आए तो यह कहते हुए बिल्कुल न हिचकिचाएँ कि क्षेत्रफल में कमी आई है।

2. इस प्रमेय का प्रयोग उदा.–42 के लिए किया जा सकता है। ऐसी स्थिति में क्षेत्रफल में प्रतिशत

$$\text{वृद्धि} = 2\times10+\frac{(10)^2}{100} = 21\%$$

उदा. 43: यदि वृत्त की त्रिज्या में 5% की वृद्धि होती हो तो इसके क्षेत्रफल में कितने प्रतिशत की वृद्धि होगी ?

हल: प्रमेय से (By Theorem):

$$\text{क्षेत्रफल में प्रतिशत वृद्धि} = 2\times5+\frac{5^2}{100} = 10+0.25 = 10.25\%$$

उदा. 44: यदि किसी षट्भुज की प्रत्येक भुजा में 2% की वृद्धि होती हो तो क्षेत्रफल में होने वाली प्रतिशत वृद्धि बताएँ।

हल: अभीष्ट प्रतिशत वृद्धि $= 2\times2+\frac{2^2}{100} = 4+0.04 = 4.04\%$

नोट: यदि उपर्युक्त प्रश्न में भुजा के माप में वृद्धि के बजाय इसमें कमी आए तो क्षेत्रफल में कितने प्रतिशत की कमी होगी ?

उत्तर: (उदा.- 43 = 9.75%, उदा.–44 = 3.96%)

प्रमेय: यदि किसी द्विविमीय त्रिआयामीय आकृति की प्रत्येक भुजा में x% का बदलाव (वृद्धि या कमी) आता हो तो इसकी परिमिति में भी x% का ही बदलाव आता है।

प्रमाण: इसे प्रमाणित करना आसान है। स्वयं प्रयत्न कीजिए।

उदा. 45: यदि किसी वृत्त के व्यास में 12% की वृद्धि होती हो तो इसकी परिधि में कितने प्रतिशत की वृद्धि होगी ?

हल: हालाँकि व्यास को वृत्त की भुजा के माप के रूप में इस्तेमाल नहीं किया जाता, पर यहाँ भी उपर्युक्त प्रमेय सही ढंग से लागू होता है।

∴ परिधि में वृद्धि = 12%

प्रमेय: यदि किसी चतुर्भुज की सभी भुजाएँ x% बढ़ा दी जाएँ तो उनके संगत विकर्णों में भी x% की वृद्धि हो जाती है।

प्रमाण: स्वयं प्रयास करें।

उदा. 46: यदि किसी आयत की भुजाएँ 10% बढ़ा दी जाएँ तो इनके विकर्णों में कितने प्रतिशत की वृद्धि होती है?

हल: विकर्णों में प्रतिशत वृद्धि = 10%

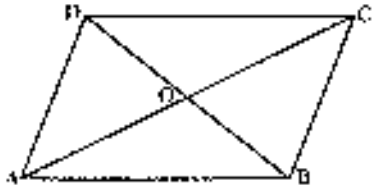
उदा. 47: यदि किसी आयत की लंबाई एवं दोनों विकर्णों में 9% की वृद्धि की जाए तो चौड़ाई में कितने प्रतिशत की वृद्धि होगी ?

हल: उपर्युक्त प्रमेय से यह निष्कर्ष निकाला जा सकता है कि चौड़ाई में भी 9% की ही वृद्धि होगी।

yousmahboob

उदा. 48: किसी समांतर चतुर्भुज की भुजाएँ 12 से.मी. तथा 8 सेंटीमीटर हैं। इसका एक विकर्ण 10 सेंटीमीटर लंबा है। दूसरे विकर्ण की लंबाई बताएँ।

हल:



किसी समांतर चतुर्भुज के विकर्ण एक-दूसरे को समद्विभाजित करते हैं।
मान लिया कि BD = 10 सेंटीमीटर
एवं OB = 5 सेंटीमीटर
त्रिभुज ABC में, O, AC का मध्य बिन्दु है।
समतल ज्यामिति (plane geometry) के एक महत्वपूर्ण प्रमेय से, ΔABC में
$AB^2 + BC^2 = 2(OB^2 + AO^2)$
$\Rightarrow 12^2 + 8^2 = 2(5^2 + AO^2)$
$\Rightarrow 144 + 64 = 50 + 2AO^2$
$\Rightarrow AO^2 = 79 \therefore AO = 8.9$ (लगभग)
दूसरा विकर्ण = $AC = 2AO = 2 \times 8.9 = 17.8$ से.मी.

द्रुत विधि (Quicker Method):
उपर्युक्त प्रमेय से
$AB^2 + BC^2 = 2(OB^2 + AO^2)$
या, $2AO^2 = AB^2 + BC^2 - 2(OB^2)$

$$\therefore AO = \sqrt{\frac{1}{2}\left\{AB^2 + BC^2 - 2(OB)^2\right\}}$$

$$\therefore \text{ दूसरा विकर्ण} = 2 \times AO = 2\sqrt{\frac{1}{2}\left\{AB^2 + BC^2 - 2(OB)^2\right\}}$$

या, दूसरा विकर्ण = $\sqrt{2\left\{AB^2 + BC^2 - 2(OB)^2\right\}}$

$\therefore$ इस प्रश्न के लिए,

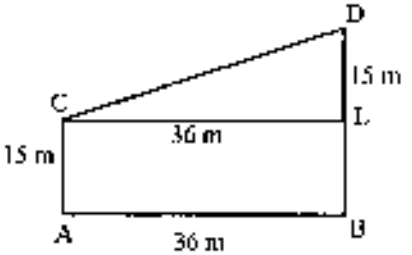
दूसरा विकर्ण = $\sqrt{2\{144 + 64 - 2 \times 25\}} = \sqrt{2 \times 158}$

$= \sqrt{316} = 17.8$ (लगभग)

उदा. 49: खेल के किसी मैदान में 15 मी. एवं 30 मी. लंबे दो खंभे गड़े हैं। यदि इनके आधार(feet) के बीच की दूरी 36 मीटर हो तो इनके शीर्ष के बीच की दूरी बताएँ।

yoursmahboob

हल:



चित्र से स्पष्ट है कि हमें CD की लंबाई निकालनी है।

यहाँ, CA = LB = 15 मीटर

$\therefore$ LD = BD − LB = 15 मीटर

$\therefore CD = \sqrt{CL^2 + DL^2} = \sqrt{36^2 + 15^2}$

$= \sqrt{1521} = 39$ सेंटीमीटर

उदा. 50: 2 मीटर लंबी भुजा वाले एक वर्ग की चारों भुजाओं पर अर्द्धवृत्त बनाए जाते हैं। पूरे आकृति का क्षेत्रफल निकालें।

हल: कुल क्षेत्रफल = वर्ग का क्षेत्रफल + 4 × (अर्द्धवृत्त का क्षेत्रफल)

$= 2^2 + 4\left[\frac{1}{2}\pi r^2\right]$ (त्रिज्या = $\frac{2}{2} = 1$)

$= (4 + 2\pi)$ वर्ग मीटर

उदा. 51: किसी वृत्त की त्रिज्या में n की कमी करने से वृत्त का क्षेत्रफल घटकर आधा हो जाता है। इसकी त्रिज्या निकालें।

हल: प्रश्नानुसार, $\frac{\pi(r-n)^2}{\pi r^2} = \frac{1}{2}$

या, $\pi r^2 = 2\pi(r-n)^2$

या, $r^2 - \{\sqrt{2}(r-n)\}^2 = 0$

या, $\{r - \sqrt{2}(r-n)\}\{r + \sqrt{2}(r-n)\} = 0$

$\because r + \sqrt{2}(r-n) \neq 0,$

$\therefore r - \sqrt{2}(r-n) = 0$

या, $r(\sqrt{2}-1) = \sqrt{2}n$

$\therefore r = \frac{\sqrt{2}n}{\sqrt{2}-1}$

yoursmahboob

द्रुत विधि (Quicker Method) :

$$\frac{\pi(r-n)^2}{\pi r^2}=\frac{1}{2}$$

या, $\left\{\frac{\sqrt{2}(r-n)}{r}\right\}^2=1$

या, $\frac{\sqrt{2}(r-n)}{r}=1$

या, $r(\sqrt{2}-1)=\sqrt{2}n$

$\therefore r=\frac{\sqrt{2}n}{\sqrt{2}-1}$

उदा. 52: रस्सी का एक टुकड़ा यदि वर्ग की शक्ल में है और यह 22 वर्ग सेंटीमीटर का क्षेत्रफल घेरता है। यदि उसी रस्सी की शक्ल बदलकर वृत्त जैसा कर दिया जाए तो इसके द्वारा घेरा गया क्षेत्रफल क्या होगा?

हल: वर्ग का क्षेत्रफल = 22 वर्ग सेंटीमीटर

वर्ग की परिमिति = $4\sqrt{22}$ सेंटीमीटर

अब, यही परिमिति वृत्त की परिधि है

$\therefore$ वृत्त की परिधि = $2\pi r = 4\sqrt{22}$

$\therefore r=\frac{2\sqrt{22}}{\pi}$

वृत्त का क्षेत्रफल $= \pi r^2$

$$=\pi\left(\frac{2\sqrt{22}}{\pi}\right)^2$$

$$=\frac{\pi\times4\times22}{\pi^2}$$

$$=\frac{4\times22}{\pi}=\frac{4\times22\times7}{22}=28 \text{ वर्ग से.मी.}$$

द्रुत विधि (Quicker Method):

यदि किसी वर्ग का क्षेत्रफल x वर्ग सेंटीमीटर हो तो उसी परिमिति से निर्मित वृत्त का क्षेत्रफल $=\frac{4x}{\pi}$ वर्ग सेंटीमीटर। *(स्मरणीय)*

yoursmahboob

∴ उपर्युक्त प्रश्न के संदर्भ में, वृत्त का क्षेत्रफल = $\frac{4 \times 22 \times 7}{22} = 28$ वर्ग सेंटीमीटर

इस सूत्र का प्रमाण, प्रश्न को हल करने की विस्तृत विधि में ढूँढ़ा जा सकता है।

प्रमेय: r त्रिज्या वाले किसी वृत्त के अंदर निर्मित वर्ग का क्षेत्रफल = $2r^2$

(स्मरणीय)

प्रमाण: यदि त्रिज्या = r तो व्यास = 2r

हम जानते हैं कि वृत्त के अंदर निर्मित वर्ग का विकर्ण, व्यास की लंबाई के बराबर होता है।

∴ वृत्त के अंदर निर्मित वर्ग का विकर्ण = 2r

∴ वर्ग का क्षेत्रफल = $\frac{(\text{विकर्ण})^2}{2} = \frac{(2r)^2}{2} = 2r^2$

उपप्रमेय: वृत्त के अंदर निर्मित वर्ग की भुजा $\sqrt{2}r$ के बराबर होता है:

प्रमाण: दिए गए प्रमेय से, वर्ग का क्षेत्रफल = $2r^2$

∴ भुजा = $\sqrt{2r^2} = \sqrt{2}r$

नोट: ऐसा वर्ग वृत्त के अंदर निर्मित सबसे बड़ा चतुर्भुज होता है।

उदा. 53: किसी वृत्त की परिधि 100 से. मी. है। वृत्त के अंदर निर्मित वर्ग की भुजा ज्ञात करें।

हल: वृत्त की परिधि = $2\pi r = 100$

$\therefore r = \frac{50}{\pi}$

∴ वृत्त के अंदर निर्मित वर्ग की भुजा = $\sqrt{2}r = \sqrt{2} \times \frac{50}{\pi}$

प्रमेय: r त्रिज्या वाले अर्द्धवृत्त के अंदर निर्मित सबसे बड़े त्रिभुज का क्षेत्रफल r^2 के बराबर होता है।

(स्मरणीय)

प्रमाण: ऐसा सबसे बड़ा त्रिभुज समद्विबाहु (Isosceles अर्थात् ऐसा त्रिभुज जिसकी दो भुजाएँ बराबर होती हैं) होता है, जिसका आधार होता है व्यास एवं ऊँचाई होती है त्रिज्या।

∴ क्षेत्रफल = $\frac{1}{2} \times$ आधार $\times$ ऊँचाई

$\frac{1}{2} \times 2r \times r = r^2$

उदा. 54: 14 सेंटीमीटर त्रिज्या वाले किसी अर्द्धवृत्त के अंदर सबसे बड़े आकार का त्रिभुज बनाया जाता है। अर्द्धवृत्त के उस हिस्से का क्षेत्रफल निकालें जो त्रिभुज की सीमा से बाहर स्थित है।

yoursmahboob

हल: ऐसे क्षेत्रफल = अर्द्धवृत्त का क्षेत्रफल − ऐसे सबसे बड़े त्रिभुज का क्षेत्रफल

$$= \frac{\pi}{2} r^2 - r^2$$

$$= r^2 \left[\frac{\pi}{2} - 1\right] = 14^2 \times \frac{22 - 14}{14} = 112 \text{ वर्ग सेंटीमीटर}$$

प्रमेय: x भुजा वाले वर्ग के अंदर निर्मित सबसे बड़े वृत्त का क्षेत्रफल = $\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2$

प्रमाण: ऐसे वृत्त का व्यास वर्ग की भुजा के बराबर होता है।

∴ ऐसे सबसे बड़े वृत्त की त्रिज्या = $\frac{x}{2}$

∴ क्षेत्रफल = $\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2$

उदा. 55: 14 सेंटीमीटर भुजा वाले वर्ग के अंदर निर्मित सबसे बड़े वृत्त का क्षेत्रफल क्या होगा?

हल: **सूत्र से (By the Formula):**

अभीष्ट क्षेत्रफल = $\pi\left(\frac{14}{2}\right)^2 = \frac{22}{7} \times 7^2 = 154$ वर्ग से.मी.

उदा. 56: एक चतुर्भुज में किसी एक विकर्ण की लंबाई 23 से. मी. है तथा इस विकर्ण पर अन्य दो शीर्षों (vertices) से खींचे गए लंब की लंबाई क्रमशः 17 से. मी. एवं 7 से. मी. है। चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात करें।

हल: किसी चतुर्भुज में,

चतुर्भुज का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ × कोई विकर्ण × (दो शीर्षों से विकर्ण पर खींचे गए लंबों का योगफल)

$$= \frac{1}{2} \times D \times (P_1 + P_2)$$

$$= \frac{1}{2} \times 23 \times (17 + 7) = 12 \times 23 = 276 \text{ वर्ग से. मी.}$$

उदा. 57: (a) एक समबाहु त्रिभुज एवं उसके परिवृत्त (circumcirle) के बीच का संबंध क्या है?

(b) एक समबाहु त्रिभुज एवं उसके अंतःवृत्त (incircle) के बीच का संबंध क्या है?

(c) एक समबाहु त्रिभुज के परिवृत्त (circumcircle) एवं उसके अंतःवृत्त (incircle) के क्षेत्रफल का अनुपात ज्ञात करें।

yoursmahboob

हल: प्रमेयों को याद रखें:

(a) x भुजा वाले एक समबाहु त्रिभुज के परिवृत्त का क्षेत्रफल $\frac{\pi}{3}x^2$ होता है।

(b) x भुजा वाले समबाहु त्रिभुज के अंतःवृत्त का क्षेत्रफल $\frac{\pi}{12}x^2$ होता है।

(c) उपर्युक्त दो प्रमेयों से हम कह सकते हैं कि अभीष्ट अनुपात

$$= \frac{\pi}{3}x^2 : \frac{\pi}{12}x^2 = \frac{1}{3} : \frac{1}{12} = 4 : 1$$

उदा. 58: किसी समबहुभुज (regular polygon) के भुजाओं की संख्या एवं विकर्णों की संख्या के बीच क्या कोई संबंध है?

हल: हाँ। निम्नलिखित संबंध है:

विकर्णों की संख्या = $\frac{n(n-3)}{2}$; जहाँ n = समबहुभुज की भुजाओं की संख्या

उदाहरण के लिए, एक षट्भुज (Hexagon) के विकर्णों की संख्या = $\frac{6(6-3)}{2} = 9$

नोट: उपर्युक्त कथन को बड़ी आसानी से प्रमाणित किया जा सकता है। स्वयं कोशिश करें। यदि आप प्रमाणित नहीं कर सकते हैं तो निम्नलिखित संकेत को देखें।

किसी n भुजाओं वाली समबहुभुज में n कोनें (corners) होते हैं। दो आसन्न (adjacent) कोनों को छोड़कर प्रत्येक कोना दूसरे कोने के साथ मिलकर एक विकर्ण का निर्माण कर सकता है। इसका तात्पर्य है कि एक कोना $(n-3)$ विकर्ण बना सकता है। इसलिए n कोनों के द्वारा बनाया गया कुल विकर्ण $n(n-3)$ है। यदि आप ध्यान से देखेंगे तो पाएँगे कि यदि हम विकर्ण खींचने के लिए दूसरे कोनों को लेते हैं तो प्रत्येक विकर्ण को दोबार गणना में शामिल कर लिया जाता है। इसलिए विकर्णों की सही संख्या = $\frac{n(n-3)}{2}$

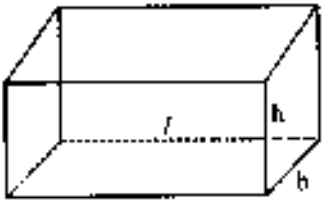
yoursmahboob

प्राथमिक क्षेत्रमिति – II

(Elementary Mensuration - II)

(आयतन एवं पृष्ठ क्षेत्रफल की माप)

कोई भी वस्तु, जो कुछ स्थान घेरती है, के तीन आयाम (dimension) होते हैं – लम्बाई, चौड़ाई एवं गहराई। ऐसे वस्तु को सामान्य तौर पर 'ठोस' (Solid) भी कहा जाता है। नीचे कुछ बहुप्रचलित ठोसों को दर्शाया गया है।



घनाभ

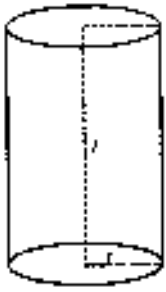
(CUBOID)

शंकु का छिन्नक

(FRUSTUM OF A CONE)

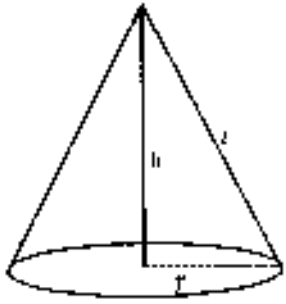
गोला

(SPHERE)



बेलन

(CYLINDER)



शंकु

(CONE)

महत्वपूर्ण सूत्रों की सूची

1. घनाभ (Cuboid)

मान लिया कि लम्बाई = l, चौड़ाई = b एवं ऊँचाई = h इकाई

i) घनाभ का आयतन = $l \times b \times h$ घन इकाई = $\sqrt{A_1 \times A_2 \times A_3}$ घन इकाई।

जहाँ, A_1 = आधार या ऊपर का क्षेत्रफल, A_2 = एक ओर की सतह का क्षेत्रफल, A_3 = दूसरी ओर की सतह का क्षेत्रफल।

ii) घनाभ का कुल पृष्ठ क्षेत्रफल = $2(lb + bh + lh)$ वर्ग इकाई

iii) घनाभ का विकर्ण = $\sqrt{l^2 + b^2 + h^2}$ इकाई

yoursmahboob

2. **घन (Cube)**

मान लिया कि घन की प्रत्येक भुजा या किनारे की लम्बाई = a इकाई,

i) घन का आयतन = a^3 घन इकाई

ii) घन का कुल पृष्ठ क्षेत्रफल = $6a^2$ वर्ग इकाई

iii) घन का विकर्ण = $\sqrt{3}a$ इकाई

3. **बेलन (Cylinder)**

मान लिया कि बेलन के आधार की त्रिज्या = r इकाई एवं उसकी ऊँचाई (लम्बाई) = h इकाई हो तो,

i) बेलन का आयतन = $2\pi r^2 h$ घन इकाई

ii) बेलन के वक्र पृष्ठ का क्षेत्रफल = $2\pi rh$ वर्ग इकाई

iii) बेलन के कुल पृष्ठ का क्षेत्रफल = $(2\pi rh - 2\pi r^2)$ वर्ग इकाई

4. **गोला (Sphere)**

मान लिया कि गोले की त्रिज्या r इकाई है तो,

i) गोले का आयतन = $\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)$ घन इकाई

ii) गोले का पृष्ठ क्षेत्रफल = $\left(4\pi r^2\right)$ वर्ग इकाई

iii) गोलार्द्ध (hemisphere) का आयतन = $\left(\frac{2}{3}\pi r^3\right)$ घन इकाई

iv) गोलार्द्ध (hemisphere) के वक्र पृष्ठ का क्षेत्रफल = $\left(2\pi r^2\right)$ वर्ग इकाई

v) गोलार्द्ध (hemisphere) का कुल पृष्ठ क्षेत्रफल = $\left(3\pi r^2\right)$ वर्ग इकाई

5. **शंकु (Cone)**

मान लिया कि r आधार की त्रिज्या है, h उसकी ऊँचाई है तथा l शंकु की तिरछी ऊँचाई (slant height) है, तो,

i) तिरछी ऊँचाई $l = \sqrt{h^2 + r^2}$

ii) शंकु का आयतन = $\left[\frac{1}{3}\pi r^2 h\right]$ घन इकाई

iii) शंकु के वक्र सतह का क्षेत्रफल = (πrl) वर्ग इकाई

$= \pi r\sqrt{r^2 + h^2}$ वर्ग इकाई

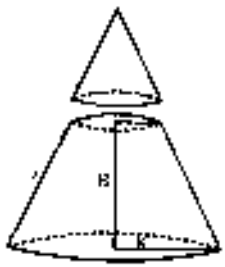
iv) शंकु के कुल पृष्ठ का क्षेत्रफल = $\left(\pi rl + \pi r^2\right) = \pi r(l + r)$

6. **शंकु का छिन्नक (Frustum of a Right Circular Cone)**

यदि एक शंकु को दो भागों में बाँटने के लिए (जैसा कि चित्र में दिखाया गया है) शंकु

yoursmahboob

के आधार के समानान्तर एक समतल (parallel plane) से काटा जाता है तो शंकु का निचला हिस्सा (lower part) छिन्नक (frustum) कहलाता है।



माना कि छिन्नक के आधार की त्रिज्या = R

ऊपर की त्रिज्या = r, ऊँचाई = h एवं तिरछी ऊँचाई (slant height) = l इकाई

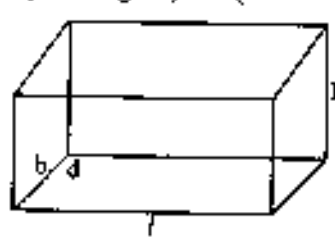
तिरछी ऊँचाई $l = \sqrt{h^2 + (R - r)^2}$ इकाई

वक्र सतह का क्षेत्रफल $= \pi(r + R)l$ वर्ग इकाई

आयतन $= \frac{\pi h}{3}(r^2 - R^2 + rR)$ घन इकाई

7. समानान्तरषट्फलक (Right Parallelopiped)

यह एक ऐसा घनाभ है जिसमें किनारे की सतह आयताकार होती है तथा ऊपर एवं नीचे की सतह चतुर्भुजाकार (parallelogram) अर्थात् न आयताकार न ही वर्गाकार.



सतह का क्षेत्रफल (किनारे की सतहों का) $= 2h(b + l)$ वर्ग इकाई

सतह का क्षेत्रफल (आधार एवं ऊपर की सतहों का) $= 2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-d)}$ वर्ग इकाई

कुल सतहों का क्षेत्रफल $= 2h(b + l) + 4\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-d)}$ वर्ग इकाई

आयतन = आधार का क्षेत्रफल × ऊँचाई

yoursmartbook

प्रश्नों को हल करने की विधि

आम तौर से क्षेत्रमिति के प्रश्नों को हल करने के लिए उपर्युक्त सूत्र पर्याप्त हैं। पर परिस्थिति के अनुसार कुछ जटिल एवं घुमावदार प्रश्नों को हल करने के लिए हम कुछ संक्षिप्त विधियाँ भी इस्तेमाल करेंगे। कुछ उदाहरणों के सहारे इन दोनों ही अभिगमों (approaches) से रू-बरू होना बेहतर रहेगा।

घन एवं घनाभ से संबंधित प्रश्न

टाइप I : सूत्रों का सीधा इस्तेमाल

उदा. 1: पत्थर के उस स्लैब का आयतन निकालें जिसकी लम्बाई 4 मीटर, चौड़ाई 2 मीटर तथा मोटाई $\frac{1}{4}$ मीटर है।

हल: आयतन $= 4 \times 2 \times \frac{1}{4} = 2$ घन मीटर (उत्तर)

सतह का क्षेत्रफल $= 2(lb + bh + hl)$

$= 2\left(4\times 2 + 4\times\frac{1}{4} + 2\times\frac{1}{4}\right)$ 19 वर्ग मीटर उत्तर

उदा. 2: एक आयताकार हौज की आंतरिक माप $37\frac{1}{3}$ मीटर × 12 मीटर × 8 मीटर है। इसमें पानी भरा हुआ है। यदि एक घन मीटर पानी का वजन 1000 किलोग्राम हो तो हौज में कुल पानी का वजन मैट्रिक टन में व्यक्त करें।

हल: पानी का आयतन $= 37\frac{1}{3} \times 12 \times 8$ घन मीटर

$\therefore$ पानी का वजन $= \frac{112}{3} \times 12 \times 8 \times 1000$ किलोग्राम $= 3854000$ किलोग्राम

3854 मैट्रिक टन, उत्तर

उदा. 3(a): किसी ईंट की माप 20 सेंटीमीटर × 10 सेंटीमीटर × $7\frac{1}{2}$ सेंटीमीटर है। 25 मीटर × 2 मीटर × 3/4 मीटर माप वाले दीवार के लिए कितनी ईंटें चाहिए होंगी ?

हल: दीवार का आयतन $= 25 \times 2 \times \frac{3}{4}$ घन मीटर

एक ईंट का आयतन $= \frac{20}{100} \times \frac{10}{100} \times \frac{25}{100} = \frac{3}{2000}$ घन मीटर

$\therefore$ ईंट की अपेक्षित संख्या $= \left[25 \times 2 \times \frac{3}{4}\right] \div \frac{3}{2000} = 25000$ ईंटें उत्तर

उदा. 3(b): एक घनाभ जिसका आधार एवं दो आसन्न (adjacent) पृष्ठों का क्षेत्रफल क्रमशः 180 वर्ग से. मी., 96 वर्ग से. मी. एवं 120 वर्ग से. मी. है तो उसका आयतन निकालें।

yoursmahboob

हल : सूत्र से,

घनाभ का आयतन

$$= \sqrt{\text{आधार का क्षेत्रफल} \times \text{एक सतह का क्षेत्रफल} \times \text{दूसरे सतह का क्षेत्रफल}}$$

$$= \sqrt{180 \times 96 \times 120} = 1440 \text{ घन से. मी.}$$

टाइप II: कुछ संक्षिप्त विधियाँ

उदा. 4: लकड़ी के किसी बंद बक्से की लंबाई = 9 सेंटीमीटर, चौड़ाई = 7 सेंटीमीटर एवं ऊँचाई = 6 सेंटीमीटर है। यदि लकड़ी की मोटाई आधा सेंटीमीटर हो तो (i) बक्से की धारिता (capacity) एवं (ii) बक्से का वजन यदि एक घन सेंटीमीटर लकड़ी का वजन 0.9 ग्राम है।

हल: **द्रुत विधि (Quicker Method) :**

उपर्युक्त स्थितियों में,

धारिता (capacity) = (बाह्य लंबाई − 2 × मोटाई) × (बाह्य चौड़ाई − 2 × मोटाई) × (बाह्य ऊँचाई − 2 × मोटाई) [याद रखो]

∴ बक्से का आयतन = बाह्य आयतन − धारिता [याद रखो]

∴ दिए गए प्रश्न में,

धारिता (capacity) = (9 − 2 × 0.5) (7 − 2 × 0.5) (6 − 2 × 0.5) = 8 × 6 × 5

= 240 घन सेंटीमीटर

∴ लकड़ी का आयतन = बाह्य आयतन − धारिता = 9 × 7 × 6 − 240

= 138 घन सेंटीमीटर

लकड़ी का वजन = लकड़ी का आयतन × लकड़ी का घनत्व [याद रखो]

= 138 × 0.9 = 124.2 ग्राम

उदा. 5: किसी घन का पृष्ठ क्षेत्रफल $30\frac{3}{8}$ वर्ग मीटर है। इसका आयतन निकालें।

हल: **द्रुत विधि (Quicker Method) :**

$$\text{घन का आयतन} = \left(\sqrt{\frac{\text{पृष्ठ क्षेत्रफल}}{6}}\right)^3$$

दिए गए प्रश्न में,

$$\text{आयतन} = \left(\sqrt{\frac{\frac{243}{8}}{6}}\right)^3$$

$$= 11\frac{25}{64} \text{ घन मीटर}$$

yoursmahboob

कुछ विशेष स्थितियाँ

किसी दिए गए क्षेत्र में वर्षा एवं इससे पिघलती-जुलती समस्याएँ

उदा. 6: किसी स्थान पर होने वाली वार्षिक वर्षा 43 सेंटीमीटर है। एक हेक्टेयर क्षेत्र में होने वाली वार्षिक वर्षा का वजन मैट्रिक टन में अभिव्यक्त करें यदि एक घन मीटर पानी का वजन 1 मैट्रिक टन हो।

हल: ***द्रुत विधि* (Quicker Method) :**

पानी का आयतन, (जल स्तर की ऊँचाई) × जलधारक क्षेत्र *(याद रखें)*

दिए गए क्षेत्र में, वर्षा का स्तर = 43 सेंटीमीटर

$\therefore$ पानी का आयतन = $\frac{43}{100}$ मी. × 10000 वर्ग मीटर

= 4300 घन मीटर

($\because$ 1 हेक्टेयर = 10 हजार वर्ग मीटर)

$\therefore$ पानी का वजन = 4300 × 1 = 4300 मैट्रिक टन

उदा. 7: कोई आयताकार हौज 50 मीटर लंबा एवं 29 मीटर गहरा है। यदि हौज से 1000 घन मीटर पानी निकाल लिया जाए तो पानी का स्तर 2 मीटर नीचे चला जाता है। हौज में कितना घन मीटर पानी आ सकता है?

हल: ***द्रुत विधि* (Quicker Method):**

पिछले उदाहरण में दिए गए सूत्र इस प्रश्न को दूसरी पंक्ति से,

आयतन = 1000 = [स्तर (= 2 मीटर) × आधार का क्षेत्रफल]

या जलधारक का क्षेत्रफल = $\frac{1000}{2}$ = 500

कुल आयतन = गहराई × जलधारक का क्षेत्रफल

= 29 × 500 = 14500 घन मीटर

किसी वर्गाकार छड़ (Square Bar) से काटा हुआ एक पूर्ण घन (Exact Cube)

उदा. 8: एक घन मीटर तांबा, जिसका वजन 9000 किलोग्राम है को एक 9 मीटर लंबा वर्गाकार छड़ की शक्ल में ढाला जाता है। इस छड़ से एक पूर्ण घन काटकर निकाला जाता है। इस घन का वजन बताएँ

हल: ***प्रचलित विधि* (General Method):**

यहाँ दिए हुए आयतन के तांबे को एक निश्चित लंबाई के वर्गाकार छड़ (जो मूलतः वर्गाकार आधार वाला एक घनाभ है) की शक्ल में ढाल दिया गया है। इस वर्गाकार छड़ से एक सटीक घन को काटकर अलग कर लिया जाता है। स्पष्टतः सटीक घन का आयाम वही होना चाहिए जो वर्गाकार छड़ के वर्गाकार आधार का है।

अब, दिया हुआ आयतन = 1 घन मीटर

= वर्गाकार आधार का क्षेत्रफल × लम्बाई

$\Rightarrow$ वर्गाकार आधार का क्षेत्रफल × लम्बाई = 1

yoursmahboob

$\Rightarrow$ वर्गाकार आधार का क्षेत्रफल = $\frac{1}{\text{लंबाई}} = \frac{1}{9}$

$\therefore$ वर्गाकार आधार की भुजा = $\sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}$

$\therefore$ कटे हुए घन का आयतन = (वर्गाकार आधार की भुजा)^3 = $\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$

$\therefore$ घन का वजन = $\frac{1}{27} \times 9000 = 333.3$ किलोग्राम

द्रुत विधि (Quicker Method):

ऐसे प्रश्नों को हल करने के लिए निम्नलिखित सूत्रों का इस्तेमाल करें:

कटे हुए घन का आयतन = $\left(\sqrt[3]{\frac{\text{मूल ठोस का आयतन}}{\text{ठोस की लंबाई}}}\right)^3$ *(याद रखें)*

$\therefore$ आयतन = $\left(\sqrt[3]{\frac{1}{9}}\right)^3 = \frac{1}{27}$

$\therefore$ वजन = $\frac{9000}{27}$ = 333.3 किलोग्राम

जब वस्तुएँ अपना आकार बदलती हों

उदा. 9: एक घन मीटर सोने को पीट-पीटकर इतना फैलाया जाता है कि वह 6 हेक्टेयर क्षेत्रफल को पूरी तरह ढक ले। लेपने की मोटाई बताएँ।

हल: ऐसे प्रश्नों को हल करने में अन्तर्निहित संकल्पना (underlying concept) यह है कि ***ठोस की आकृति में परिवर्तन आने से उसके कुल आयतन में कोई परिवर्तन नहीं आता।***

$\therefore$ पुराना आयतन = नया आयतन

$\Rightarrow$ 1 घन मीटर = 60000 × मोटाई

$\Rightarrow$ मोटाई = $\frac{1}{60,000}$ मीटर = 0.0017 सेंटीमीटर

यदि कई घनों को आपस में मिलाकर एक घन बनाया जाए

उदा. 10: धातु के तीन घन, जिनके किनारे क्रमशः 3, 4 एवं 5 मीटर हैं, को पिघलाकर एक घन बनाया जाता है। यदि इस प्रक्रिया के दौरान धातु की क्षति बिलकुल ही नहीं हो तो नए घन की भुजा निकालें।

yoursmartbooks

हल: **द्रुत विधि (Quicker Method) :**

जब कई घनों को मिलाकर एक घन बनाया जाए तो नए घन की भुजा के लिए निम्नलिखित सूत्र है :

भुजा = $\sqrt[3]{\text{प्रत्येक घन की भुजा के घन का योग}}$

यहाँ, भुजा = $\sqrt[3]{3^3+4^3+5^3} = \sqrt[3]{27+64+125}$

$= \sqrt[3]{216} = 6$ सेंटीमीटर

नोट: क्या आप इस प्रश्न को पिछले उदाहरण में दी गई संकल्पना के आधार पर हल कर सकते हैं, जिसमें कहा गया है कि आकार में परिवर्तन की प्रक्रिया में आयतन अपरिवर्तित रहता है।

एक घन को तोड़कर समान आयतन वाले एक से अधिक घन बनाना

उदा. 11: 3 सेंटीमीटर भुजा वाले किसी घन को पिघलाकर 1 सेंटीमीटर भुजा वाले छोटे-छोटे कई घन बनाए जाते हैं। ऐसा कितने घन बनाना संभव है ?

हल: **द्रुत विधि (Quicker Method) :**

ऐसे प्रश्नों को हल करने के लिए निम्नलिखित नियम का प्रयोग करें,

संभावित संख्या = $\left[\dfrac{\text{भुजा की मूल लम्बाई}}{\text{भुजा की नई लम्बाई}}\right]^3$ *(याद रखें)*

$\therefore$ दिए गए प्रश्न में, घन की संभावित संख्या $\left[\dfrac{3}{1}\right]^3 = 27$

एक जेट से पानी निकलने की दर

उदा. 12: एक 20 मीटर चौड़ी जलधारा 2.5 कि. मी. प्रति घंटे की समान रफ्तार से बहती है यदि नाव का 1.2 मीटर हिस्सा पानी में डूबा हुआ है तो एक मिनट में नाव कितना लिटर पानी विस्थापित करेगा?

हल: इस प्रकार के प्रश्न को निम्नलिखित नियम की मदद से हल करते हैं :

आयतन = समय × गति × अनुप्रस्थ काट (cross-section) का क्षेत्रफल

अब, इस प्रश्न में,

समय = 1 मिनट, गति = 2.5 कि. मी. प्रति घंटा = $\dfrac{125}{3}$ मी./मिनट

अनुप्रस्थ काट का क्षेत्रफल = $20 \times 1.2 = 24$

$\therefore$ आयतन = $1 \times \dfrac{125}{3} \times 24 = 1000$ घन मी. = 1000000 लिटर

yoursmahboob

महत्त्वपूर्ण तथ्य

1. किसी चतुर्भुज के अंदर रखे जाने वाला सबसे लंबा छड़ उसके विकर्ण के लंबाई के बराबर होता है।
2. किसी 'a' इकाई की भुजा वाले घन के अंदर रखे जाने वाला सबसे बड़े गोलाकार गोले की त्रिज्या $\left(\frac{a}{2}\right)$ इकाई होती है।
3. सबसे छोटे संपूर्ण गोला, जिसमें 'a' इकाई की भुजा वाला घन रखा जा सकता है, की त्रिज्या $\left(\frac{\sqrt{3}a}{2}\right)$ इकाई होती है।

बेलन पर आधारित समस्याएँ

टाइप I : सूत्रों का सीधा प्रयोग

उदा. 13: उस बेलन का आयतन निकालें जिसके आधार की त्रिज्या 3 मीटर है और ऊँचाई 14 मीटर के बराबर है। बेलन के वक्र सतह का क्षेत्रफल भी निकालें।

हल: आयतन $= 3 \times 3 \times \frac{22}{7} \times 14$ घन मीटर

$= 396$ घन मीटर (उत्तर)

वक्र सतह = परिधि × ऊँचाई

$= 2 \times 3 \times \frac{22}{7} \times 14$ वर्ग मीटर $= 264$ वर्ग मीटर

टाइप II: कुछ द्रुत विधियाँ

थोड़ी मोटाई वाली खोखली नली (Hollow tube with some thickness)

उदा. 14: दोनों सिरे पर खुली हुई एक लोहे की खोखली बेलनाकार नली 2 सेंटीमीटर मोटी है। यदि इस नली का बाहरी व्यास 50 सेंटीमीटर है तथा नली की लंबाई 140 सेंटीमीटर हो तो नली में प्रयुक्त लोहे का आयतन बताएँ।

हल: ***द्रुत विधि (Quicker Method) :***

ऐसी स्थिति में निम्नलिखित नियम का प्रयोग करें :

धातु का आयतन $= \pi$ ऊँचाई $\times \left[(\text{बाहरी त्रिज्या})^2 - (\text{आंतरिक त्रिज्या})^2 \right]$ ***(याद रखें)***

अब, दिए गए प्रश्न में,

बाहरी त्रिज्या $= 50 \div 2 = 25$ सेंटीमीटर

आंतरिक त्रिज्या = बाहरी त्रिज्या − मोटाई

$= 25 - 2 = 23$ सेंटीमीटर

yoursmahboob

$\therefore$ आयतन $= \frac{22}{7} \times 140 \times (25^2 - 23^2) = 42240$ घन सेंटीमीटर

नोट: इसमें से संक्षिप्त विधियों का इस्तेमाल निम्नलिखित रूपों में हो सकता है।

आयतन = π × ऊँचाई × (2 × बाहरी त्रिज्या − मोटाई) × (मोटाई)

(जब बाहरी त्रिज्या दी गई हो)

आयतन = π × ऊँचाई × (2 × आंतरिक त्रिज्या + मोटाई) × (मोटाई)

(जब आंतरिक त्रिज्या दी गई हो)

उदाहरण के लिए, उपर्युक्त प्रश्न में बाहरी त्रिज्या दी गई है, इसलिए हम पहले सूत्र का उपयोग करेंगे।

आयतन $= \frac{22}{7} \times 140 \times (25 \times 2 - 2) \times 2$

$= \frac{22}{7} \times 140 \times 48 \times 2 = 42240$ घन सेंटीमीटर

उदा. 15: सीसे की एक पाइप का वजन निकालें यदि पाइप की लंबाई 3.5 सेंटीमीटर, बाहरी व्यास 2.4 सेंटीमीटर, सीसे की मोटाई 2 मिलीमीटर तथा एक घन सेंटीमीटर सीसे का वजन 11.4 ग्राम हो।

हल: स्वयं हल करें।

किसी वर्गाकार शीट को बेलन की शक्ल में ढालना

उदा. 16: एक आयताकार शीट, जिसकी लंबाई 22 मीटर एवं चौड़ाई 10 मीटर है, को लपेटकर एक बेलन की शक्ल में इस प्रकार ढाला जाता है कि शीट की छोटी भुजा बेलन की ऊँचाई में तब्दील हो जाए। इस प्रकार निर्मित बेलन का आयतन बताएँ।

हल: ***द्रुत विधि* (Quicker Method) :**

ऐसी स्थिति में निम्नलिखित नियम का प्रयोग करें:

$$\text{आयतन} = \frac{\text{ऊँचाई} \times (\text{शीट की दूसरी भुजा})^2}{4\pi}$$ ***(याद रखें)***

$\therefore$ दिए गए प्रश्न में,

$$\text{आयतन} = \frac{10 \times (22)^2}{4 \times \frac{22}{7}} = 385 \text{ घन मीटर}$$

नोट: (यहाँ ऊँचाई = 10 मीटर है क्योंकि यही छोटी भुजा है। स्पष्टतः दूसरी भुजा = 22 मीटर)

शंकु पर आधारित प्रश्न

उदा. 17: 2 मीटर चौड़े कैनवास की लंबाई क्या होगी यदि उससे निर्मित शंक्वाकार टेंट का व्यास 8 मीटर एवं तिरछी ऊँचाई 5.6 मीटर हो? 3.20 रु. प्रति मीटर की दर से कैनवास की कीमत भी बताएँ।

yoursmahboob

हल: वक्र सतह का क्षेत्रफल = πrl

$= \frac{22}{7} \times \frac{1}{2} \times 8 \times 5.6$ वर्गमीटर $= 22 \times 4 \times 0.8$ वर्गमीटर

= 70.4 वर्गमीटर

∴ कैनवास की लंबाई = 70.4 ÷ 2 मीटर

= 35.2 मीटर, उत्तर

कैनवास की लागत = (35.2 × 3.20) रु.

= 112.64 रु. उत्तर

उदा. 18: किसी समकोण वृत्ताकार शंकु (right circular cone) का व्यास 14 मीटर है तथा इसकी तिरछी ऊँचाई 12 मीटर है। इसका (i) वक्र सतह का क्षेत्रफल (ii) कुल सतह का क्षेत्रफल (iii) आयतन तथा (iv) 14 पैसे प्रति वर्ग मीटर की दर से इसकी कुल सतह को रंगने में होने वाले खर्च की गणना करें।

हल: (i) वक्र सतह का क्षेत्रफल = πrl

$= \frac{22}{7} \times \frac{14}{2} \times 12$ वर्ग मीटर = 264 वर्ग मीटर; उत्तर

(ii) कुल सतह का क्षेत्रफल = $\pi r(r + l)$

$= \frac{22}{7} \times \frac{14}{2}\left[\frac{14}{2} + 12\right]$ वर्ग मीटर

$= \frac{22}{7} \times \frac{14}{2} \times 19$ वर्ग मीटर

= 418 वर्ग मीटर (उत्तर)

(iii) आयतन = $\frac{1}{3}\pi r^2 h$

आइए, अब 'h' का मान ज्ञात करें :

$h = \sqrt{l^2 - r^2} = \sqrt{144 - 49}$ मीटर = 9.75 मीटर

आयतन = $\frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7 \times 9.75$ घन मीटर

500.5 घन मीटर (उत्तर)

(v) अभीष्ट लागत = 418 रु. × $\frac{14}{100}$

= 58.52 रु. (उत्तर)

yourmanboob

उदा. 19: किसी शंकु के छिन्नक (frustum) के आधार का व्यास 10 सेंटीमीटर, शीर्ष का व्यास 6 सेंटीमीटर एवं ऊँचाई 5 सेंटीमीटर है। इसके कुल सतह क क्षेत्रफल एवं आयतन ज्ञात करें.

हल: यहाँ R = 5 सेंटीमीटर, r = 3 सेंटीमीटर एवं h = 5 सेंटीमीटर

$\therefore s = \sqrt{h^2 + (R-r)^2}$ से. मी. $= \sqrt{5^2 + (5-3)^2}$ से. मी.

$= \sqrt{29}$ से. मी. = 5.385 से.मी.

$\therefore$ छिन्नक के कुल सतह का क्षेत्रफल $= \pi\left(R^2 + r^2 + Rl + rl\right)$

$= \frac{22}{7}\left(5^2 + 3^2 + 5 \times 5.385 + 3 \times 5.385\right)$

= 242.25 वर्ग सेंटीमीटर

आयतन $= \frac{\pi h}{3}\left(R^2 + r^2 + Rr\right)$ घन सेंटीमीटर

$= \frac{22 \times 5}{7}\left(5^2 + 3^2 + 5 \times 3\right)$ घन सेंटीमीटर

= 256.67 घन सेंटीमीटर (उत्तर)

गोला (Sphere) पर आधारित समस्याएँ

टाइप 1 : सूत्रों का सीधा अनुप्रयोग

उदा. 20: 42 सेंटीमीटर व्यास वाले गोले का आयतन एवं पृष्ठ क्षेत्रफल निकालें।

हल: त्रिज्या = 21 सेंटीमीटर

$\therefore$ आयतन $= \left(\frac{4}{3}\pi r^3\right) = \left(\frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times 21 \times 21 \times 21\right)$ घन से. मी.

= 38808 घन सेंटीमीटर

पृष्ठ क्षेत्रफल $= 4\pi r^2$

$= \left(4 \times \frac{22}{7} \times 21 \times 21\right)$ वर्ग सेंटीमीटर = 5544 वर्ग से. मी.

उदा. 21: 21 सेंटीमीटर त्रिज्या वाले किसी गोलार्द्ध का आयतन, उसके वक्र सतह का क्षेत्रफल एवं कुल पृष्ठ क्षेत्रफल निकालें।

हल: आयतन $= \frac{2}{3}\pi r^3 = \frac{2}{3} \times \frac{22}{7} \times 21 \times 21 \times 21$ घन सेंटीमीटर = 19404 घन सेंटीमीटर

वक्र सतह का क्षेत्रफल $= 2\pi r^2 = \left(2 \times \frac{22}{7} \times 21 \times 21\right)$ वर्ग सेंटीमीटर

= 2772 वर्ग सेंटीमीटर

yoursmahboob

कुल पृष्ठ का क्षेत्रफल $= 3\pi r^2$

$$= \left(3 \times \frac{22}{7} \times 21 \times 21\right) \text{ वर्ग सेंटीमीटर}$$

$= 4158$ वर्ग सेंटीमीटर

टाइप 11 : कुछ संक्षिप्त (द्रुत विधियाँ) विधियाँ

जब गोले का आकार बदल रहा हो: इस प्रकार के प्रश्न, जिसमें किसी खास रूप (shape) का (गोला, बेलन, शंकु आदि) ठोस दूसरे रूप में बदल जाता हो, को हल करने के लिए आधारभूत सिद्धांत है: "आयतन अपरिवर्तित रहता है।" लेकिन हम यहाँ पर कुछ द्रुत विधियों की चर्चा करेंगे: निम्नलिखित उदाहरणों को देखें:

उदा. 22: 18 सेंटीमीटर व्यास वाले तांबे के किसी गोले से 4 मिलीमीटर व्यास वाला तार तैयार किया जाता है। तार की लंबाई ज्ञात करें।

द्रुत विधि (Quicker Method) :

जब किसी गोले को बेलन की शक्ल में ढाला जाता है। (ध्यान रखें कि तार मूलतः एक बेलन ही है।), तो तार की लंबाई निम्नलिखित सूत्र के माध्यम से आसानी से ज्ञात की जाती है

i) बेलन की लंबाई $= \dfrac{4 \times (\text{गोले की त्रिज्या})^3}{3 \times (\text{बेलन की त्रिज्या})^2}$ **(याद रखें)**

$\therefore$ दिए गए प्रश्न में,

$$\text{लंबाई} = \frac{4 \times (90)^3}{3 \times (2)^2} = 243000 \text{ मिलीमीटर} = 24300 \text{ सेंटीमीटर}$$

नोट: जब किसी गोले को बेलन की शक्ल में बदला जाता है तो तीन प्रकार के प्रश्न उठ सकते हैं। पहला, जब गोले और बेलन की त्रिज्या दी गई हो और बेलन की लंबाई का पता लगाना हो। दूसरा, जब बेलन की त्रिज्या और लंबाई दी गई हो तथा गोले की त्रिज्या मालूम करनी हो, एवं तीसरा, जब बेलन की लंबाई और गोले की त्रिज्या दी गई हो तथा बेलन की त्रिज्या मालूम करनी हो। पहली स्थिति में ऊपर दिए गए सूत्र का बखूबी इस्तेमाल किया जा सकता है दूसरी एवं तीसरी स्थितियों के लिए निम्नलिखित सूत्रों का इस्तेमाल किया जा सकता है:

(ii) गोले की त्रिज्या $= \sqrt{\dfrac{3}{4} \times (\text{बेलन की लंबाई}) \times (\text{बेलन की त्रिज्या})^2}$ **(याद रखें)**

(iii) बेलन की त्रिज्या $= \sqrt{\dfrac{4 \times (\text{गोले की त्रिज्या})^3}{3 \times (\text{बेलन की त्रिज्या})}}$

उदा. 23: 36 मीटर व्यास वाले तांबे के किसी गोले को खींचकर 7.29 किलोमीटर लंबा बेलनाकार तार बनाया जाता है। तार की त्रिज्या निकालें।

yoursmartbook

हल: स्वयं प्रयास करें।

उदा. 24: एक बेलन, जिसकी त्रिज्या 2 सेंटीमीटर एवं ऊँचाई 15 सेंटीमीटर है, को पिघलाकर एक गोला बनाया जाता है। गोले की त्रिज्या बताएँ।

हल: स्वयं प्रयास कीजिए। **संकेत :** चाहे गोले को बेलन में बदला जाए या बेलन को गोले में बात बराबर है। उपर्युक्त सूत्र (iii) इस्तेमाल करें

उदा. 25: 28 सेंटीमीटर ऊँचाई और 6 सेंटीमीटर त्रिज्या वाले लोहा के एक बेलन से 1.5 सेंटीमीटर व्यास वाली कितनी गोलियाँ बनाई जा सकती हैं ?

हल: इस प्रश्न में, एक बेलन को एक गोले में नहीं बल्कि कई गोलों में बदल दिया जाता है। इसलिए हमलोग यहाँ निम्नलिखित सूत्र का प्रयोग करेंगे।

$$\text{गोलियों की संख्या} = \frac{\text{बेलन का आयतन}}{\text{1 गोली का आयतन}} \qquad \textit{(याद रखें)}$$

$$= \frac{\pi \times 6 \times 6 \times 28}{\frac{4}{3} \times \pi \times 0.75 \times 0.75 \times 0.75} = 1792$$

उदा. 26: 16 सेंटीमीटर व्यास वाले किसी गोले से 1 सेंटीमीटर व्यास वाली कितनी गोलियाँ बनाई जा सकती हैं ?

हल: $$\text{गोलियों की संख्या} = \frac{\text{बड़े गोले का आयतन}}{\text{1 छोटे गोले का आयतन}} = \frac{\frac{4}{3}\pi \times 8 \times 8 \times 8}{\frac{4}{3}\pi \times 0.5 \times 0.5 \times 0.5} = 4096$$

द्रुत विधि (Quicker Method) :

जब एक गोला, कई छोटे एवं एक प्रकार के गोलों में टूट जाता हो तो निम्नलिखित सूत्र का इस्तेमाल किया जाता है :

$$\text{अभीष्ट संख्या} = \left[\frac{\text{बड़ी त्रिज्या}}{\text{छोटी त्रिज्या}}\right]^3 \qquad \textit{(याद रखें)}$$

$$\therefore \text{संख्या} = \left[\frac{8}{0.5}\right]^3 = [16]^3 = 4096$$

कुछ मिली-जुली स्थितियाँ

अनुपात पर आधारित प्रश्न

निम्नलिखित परिणामों को याद रखें। यह बहुत ही सहायक होंगे।

1. दो गोले

(i) (त्रिज्याओं का अनुपात)^2 = पृष्ठ क्षेत्रफल का अनुपात

yoursmahboob

(ii) (त्रिज्याओं का अनुपात)^2 – आयतन का अनुपात

(iii) (पृष्ठ क्षेत्रफल का अनुपात)^2 – (आयतन का अनुपात)^2

II. दो बेलन

A. जब आयतन समान हो

(i) त्रिज्या का अनुपात – $\sqrt{\text{ऊँचाई के व्युत्क्रम का अनुपात}}$

(ii) वक्र सतह के क्षेत्रफलों का अनुपात – त्रिज्या के व्युत्क्रम का अनुपात

(iii) वक्र सतह के क्षेत्रफलों का अनुपात – $\sqrt{\text{ऊँचाई का अनुपात}}$

B. जब त्रिज्या समान हो

(i) आयतन का अनुपात = ऊँचाई का अनुपात

(ii) वक्र सतह के क्षेत्रफल का अनुपात = ऊँचाई का अनुपात

(iii) आयतन का अनुपात = वक्र सतह के क्षेत्रफल का अनुपात

C. जब ऊँचाई समान हो

(i) आयतन का अनुपात – (त्रिज्या का अनुपात)^2

(ii) वक्र सतह के क्षेत्रफल का अनुपात – त्रिज्या का अनुपात

(iii) आयतन का अनुपात = (वक्र सतह के क्षेत्रफल का अनुपात)^2

D. जब वक्र सतह का क्षेत्रफल समान हो

(i) आयतन का अनुपात = त्रिज्या का अनुपात

(ii) आयतन का अनुपात = ऊँचाई के व्युत्क्रम का अनुपात

(iii) त्रिज्या का अनुपात = ऊँचाई के व्युत्क्रम का अनुपात

III. दो घन

(i) आयतन का अनुपात = (भुजाओं का अनुपात)^3

(ii) पृष्ठ क्षेत्रफल का अनुपात = (भुजाओं का अनुपात)^2

(iii) (पृष्ठ क्षेत्रफल का अनुपात)^3 = (आयतन का अनुपात)^2

(नोट: गोला एवं घन के सूत्रों की समानता पर ध्यान दें।)

IV. दो शंकु

(A) जब आयतन समान हो : बेलन का सूत्र नं.–(i)

(B) जब त्रिज्या समान हो : बेलन का सूत्र (i) उपयोग करें।

(C) जब ऊँचाई समान हो : बेलन का सूत्र (i) उपयोग करें

(D) जब वक्र सतह का क्षेत्रफल समान हो :

बेलन से संबद्ध सूत्र (iii) परिवर्तित रूप में इस्तेमाल करें।

त्रिज्या का अनुपात = तिरछी ऊँचाई (slant height) के व्युत्क्रम का अनुपात

कुछ हल किए गए उदाहरण

उदा. 27: दो गोलों के वक्र सतह के क्षेत्रफल का अनुपात 1 : 4 है। उनके आयतन का अनुपात बताएँ

yoursmahboob

हल: सूत्र I (iii) से,

(पृष्ठ क्षेत्रफल का अनुपात)^2 = (आयतन का अनुपात)^2

$\therefore$ $(1 : 4)^2$ = (आयतन का अनुपात)^2

$\therefore$ $1 : 64$ = (आयतन का अनुपात)^2

$\therefore$ आयतन का अनुपात = $\sqrt{1:64} = 1:8$

दूसरी विधि: भुजाओं का अनुपात = $\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} = 1:2$

$\therefore$ आयतन का अनुपात $\left[\frac{1}{2}\right]^3 = \frac{1}{8} = 1:8$.

उदा. 28: दो गोलों की त्रिज्या 1 : 2 के अनुपात में है। उनके पृष्ठ क्षेत्रफल का अनुपात बताएँ।

हल: सूत्र I (i) से,

(पृष्ठ क्षेत्रफल का अनुपात) = $(1 : 2)^2 = 1 : 4$

उदा. 29: समान आयतन वाले दो वृत्ताकार बेलनों की ऊँचाई 1 : 2 के अनुपात में है। उनकी त्रिज्याओं का अनुपात बताएँ।

हल: सूत्र II (A) (i) से,

त्रिज्या का अनुपात = $\sqrt{\text{ऊँचाई के व्युत्क्रम का अनुपात}}$

$= \sqrt{2:1} = \sqrt{2:1}$

उदा. 30: यदि दो शंकुओं की ऊँचाई का अनुपात 1 : 4 हो तथा उनके व्यास का अनुपात 4 : 5 हो तो उनके आयतन का अनुपात बताएँ।

हल: चूँकि ऐसे प्रश्नों को हल करने के लिए कोई सुपरिभाषित संक्षिप्त विधि नहीं है, इसलिए हमलोग इस प्रश्न को सामान्य विधि से हल करेंगे। हमलोग जानते हैं कि,

आयतन = $\frac{1}{3}\pi$ (त्रिज्या)^2 (ऊँचाई)

$$\therefore \frac{\text{पहले शंकु का आयतन}}{\text{दूसरे शंकु का आयतन}} = \frac{\frac{1}{3}\pi\,(\text{पहले शंकु की त्रिज्या})^2 \times \text{ऊँचाई}}{\frac{1}{3}\pi\,(\text{दूसरे शंकु की त्रिज्या})^2 \times \text{ऊँचाई}}$$

$$= \left(\frac{\text{पहले शंकु की त्रिज्या}}{\text{दूसरे शंकु की त्रिज्या}}\right)^2 \times \left(\frac{\text{पहले शंकु की ऊँचाई}}{\text{दूसरे शंकु की ऊँचाई}}\right)$$

$\therefore$ आयतन का अनुपात = (त्रिज्या का अनुपात)^2 × (ऊँचाई का अनुपात)

$$= (4 : 5)^2\,(1 : 4) = \frac{16}{25} \times \frac{1}{4} = 4:25$$

yoursmahboob

नोट: यदि आप उपर्युक्त विधि के विस्तार में नहीं जाना चाहते हैं, तो

आयतन $= \frac{\pi}{3}$ (त्रिज्या)^2 (ऊँचाई)

$\therefore$ आयतन का अनुपात = (त्रिज्या या व्यास का अनुपात)^2 (ऊँचाई का अनुपात)

$\because \frac{\pi}{3}$ एक अचर मान है, इसलिए इसे हटा दिया जाता

स्मरण रखें:

V ***किसी शंकु और बेलन के लिए:***

(i) आयतन का अनुपात = (त्रिज्या का अनुपात)^2 (ऊँचाई का अनुपात)

(ii) ऊँचाई का अनुपात = (त्रिज्या के व्युत्क्रम का अनुपात)^2 (आयतन का अनुपात)

(iii) त्रिज्या का अनुपात = $\sqrt{\text{(आयतन का अनुपात) (ऊँचाई के व्युत्क्रम का अनुपात)}}$

VI ***बेलन के लिए :***

(i) वक्र सतह के क्षेत्रफल का अनुपात = (त्रिज्या का अनुपात) (ऊँचाई का अनुपात)

(ii) ऊँचाई का अनुपात

= (वक्र सतह के क्षेत्रफल का अनुपात) (त्रिज्या के व्युत्क्रम का अनुपात)

(iii) त्रिज्या का अनुपात

= (वक्र सतह के क्षेत्रफल का अनुपात) (ऊँचाई के व्युत्क्रम का अनुपात)

VII ***शंकु के लिए:***

VI के अन्तर्गत दिए गए सभी सूत्र लागू होते हैं, केवल 'ऊँचाई' की जगह 'तिरछी ऊँचाई' डाल दें।

उदा. 31: एक वर्ग किलोमीटर जमीन पर 2 सेंटीमीटर वर्षा हुई है। यह मानते हुए कि वर्षा के जल के 50 प्रतिशत जल को संग्रह करके 100 मीटर × 10 मीटर आधार वाले कुण्ड(pool) में रखा जा सकता था, तो कुण्ड(pool) के जल स्तर में कितनी वृद्धि होती ?

हल: वर्षा के जल का आयतन = क्षेत्रफल × ऊँचाई

= (1 किलोमीटर)^2 × 2 सेंटीमीटर

= (1000 मीटर)^2 × 0.02 मीटर = 20000 घन मीटर

संग्रहीत जल की मात्रा = 20,000 घन मीटर का 50%

$= \frac{1}{2} \times 20{,}000 = 10{,}000$ घन मीटर

कुण्ड में पानी का बढ़ा हुआ स्तर = $\frac{\text{संग्रहीत आयतन}}{\text{कुण्ड के आधार का क्षेत्रफल}} = \frac{10{,}000}{10 \times 100} = 10$ मीटर

$\therefore$ जल-स्तर में 10 मीटर की वृद्धि होगी।

उदा. 32: यदि क्षेत्र की त्रिज्या दूनी कर दी जाए और ऊँचाई आधी कर दी जाए तो नए आयतन एवं पिछले आयतन के बीच का अनुपात निकालें

youtomahboob

हल: मान लिया कि बेलन की आरंभिक त्रिज्या एवं ऊँचाई क्रमशः r सेंटीमीटर एवं h सेंटीमीटर है;

$\therefore\ V_1 = \pi r^2 h$

एवं $V_2 = \pi(2r)^2 \dfrac{h}{2} = 2\pi r^2 h$

$$\therefore \frac{\text{नया आयतन}}{\text{पिछला आयतन}} = \frac{2\pi r^2 h}{\pi r^2 h} = \frac{2}{1} = 2:1$$

उदा. 33: 11.2 मीटर व्यास का एक कुआँ 8 मीटर गहरा खोदा जाता है। खोद कर निकाली गई मिट्टी इस कुएँ के चारों ओर 7 मीटर की चौड़ाई में वृत्ताकार तटबन्ध (circular embankment) के रूप में बिखेर दी जाती है। तटबन्ध की ऊँचाई बताएँ।

हल: निकाली गई मिट्टी का आयतन $= \pi r^2 h$

$$= \frac{22}{7} \times \left[\frac{11.2}{2}\right]^2 \times 8 = \frac{22}{7} \times 5.6 \times 5.6 \times 8 = 788.48 \text{ घन मीटर}$$

तटबन्ध का क्षेत्रफल $= \pi(5.6+7)^2 - \pi(5.6)^2$

$$= \pi\left[(5.6+7)^2 - (5.6)^2\right]$$

$$= \pi[(5.6-7-5.6)(5.6+5.6+7)]$$

$$= \frac{22}{7} \times 7 \times 18.2 = 400.4 \text{ वर्ग मीटर}$$

$$\therefore \text{ तटबन्ध की ऊँचाई} = \frac{\text{मिट्टी का आयतन}}{\text{तटबन्ध का क्षेत्रफल}} = \frac{788.48}{400.4} = 1.97 \text{ मीटर}$$

उदा. 34: एक समकोण त्रिभुज, जिसका आधार 6.3 मीटर है तथा ऊँचाई 10 सेंटीमीटर है, को उसकी ऊँचाई के चारों ओर घुमाया जाता है। इस प्रकार निर्मित शंकु का आयतन एवं कुल क्षेत्रफल ज्ञात करें।

हल: *संकेत :* इस प्रकार निर्मित शंकु की ऊँचाई = त्रिभुज की ऊँचाई एवं

त्रिज्या = त्रिभुज का आधार

तिरछी ऊँचाई = त्रिभुज का कर्ण

अब इस सवाल को स्वयं हल करें।

प्रमेय: यदि किसी घनाभ की लंबाई, चौड़ाई एवं ऊँचाई क्रमशः x%, y% एवं z% बढ़ा दी जाए, तो इसके आयतन में $\left[x + y + z + \dfrac{xy + xz + yz}{100} + \dfrac{xyz}{(100)^2}\right]$% की वृद्धि होती है।

प्रमाण: गणना में सुविधा की दृष्टि से यह मान लें कि घनाभ की प्रत्येक भुजा की माप 100 इकाई है।

$\therefore$ इसका आयतन $= (100)^3$ इकाई

yoursmahboob

घनाभ की बढ़ी हुई भुजाएँ – $(100 + x)$, $(100 + y)$ एवं $(100 + z)$

$\therefore$ इसका नया आयतन $= (100 + x)(100 + y)(100 + z)$

$$= 100^3 + 100^2(x + y + z) + 100(xy + yz + xz) + xyz$$

$\therefore$ आयतन में प्रतिशत परिवर्तन

$$= \frac{100^2(x + y + z) + 100(xy + xz + yz) + xyz}{100^3} \times 100$$

$$= x + y + z + \frac{xy + xz + yz}{100} + \frac{xyz}{(100)^2}$$

नोट: यह प्रमेय सभी त्रिविमीय आकृतियों (three-dimensional figures) के लिए आधारभूत सूत्र माना जाता है। अब आप यह देखें कि किस प्रकार इस एक प्रमेय के आधार पर अनेक प्रमेय बनाए जा सकते हैं।

प्रमेय: (घन के लिए) यदि किसी घन की भुजा $x\%$ बढ़ा दी जाए तो उसके आयतन में

$$\left[3x + \frac{3x^2}{100} + \frac{x^3}{100^2}\right]\% \quad \text{या} \quad \left[\left[1 + \frac{x}{100}\right]^3 - 1\right] \times 100\ \%$$ की वृद्धि होगी।

प्रमाण: ***(घन के लिए)*** : किसी घन की सभी भुजाएँ बराबर होती हैं, सभी भुजाओं में समान प्रतिशत की वृद्धि होती है उपर्युक्त आधारभूत प्रमेय में $x = y = z$ रखने पर,

$$3x + \frac{3x^2}{100} + \frac{x^3}{100^2}$$

इसे निम्नलिखित रूप में भी रखा जा सकता है,

$$\left[\left[1 + \frac{x}{100}\right]^3 - 1\right] \times 100$$

प्रमेय: ***(गोला के लिए):*** यदि किसी गोले की त्रिज्या या व्यास में $x\%$ का परिवर्तन आता हो तो इसके आयतन में $\left[3x + \frac{3x^2}{100} + \frac{x^3}{100^2}\right]\%$ का बदलाव आ जाता है।

प्रमाण: किसी भी त्रिविमीय ज्यामितीय आकृति के तीन मापांक होते हैं। गोले के संदर्भ में भी तीन मापांक हैं और ये तीनों ही आपस में बराबर हैं। क्योंकि r^3 में तीन r अन्तर्निहित हैं। इस प्रकार, यहाँ भी हम मूल सूत्र में तीनों मानों को बराबर रखते हैं तथा हमें अभीष्ट परिणाम प्राप्त होता है।

प्रमेय (बेलन के लिए):

I. यदि ऊँचाई में $x\%$ का बदलाव आता हो और त्रिज्या यथावत् बनी रहे तो आयतन में भी $x\%$ का परिवर्तन होता है।

yoursmanbooks

प्रमाण: आयतन = $\pi r^2 h$

चूँकि यहाँ केवल ऊँचाई बदलता है और त्रिज्या की माप में कोई फर्क नहीं आता, इसलिए त्रिज्या में 0% का बदलाव मान लिया जाए और चूँकि r^2 में दो मापांक हैं इसलिए आधारभूत प्रमेय के दो अन्य मानों को '0' के बराबर मान लिया जाए।

इस प्रकार ($y = z = 0$ रखने पर),

$$x + 0 + 0 + \frac{0+0+0}{100} + \frac{0\times0\times0}{100^2} = x$$

II. यदि त्रिज्या में x% का परिवर्तन आता हो तथा ऊँचाई अपरिवर्तित रहता हो तो आयतन में,

$$\left[2x - \frac{x^2}{100}\right]\% \text{ या } \left[\left[1 + \frac{x}{100}\right]^2 - 1\right]\times100\% \text{ का बदलाव आ जाता है}$$

प्रमाण: केवल दो मापांक (r^2) ही बदलते हैं, इसलिए तीन में से दो त्रिज्याओं को समान कर दें एवं तीसरी त्रिज्या का मान शून्य रख दें। ऐसा करने पर ($y = x$ एवं $z = 0$ रखने पर),

$$x + x + 0 + \frac{x^2+0+0}{100} + \frac{x\times x\times 0}{100^2} = 2x + \frac{x^2}{100}$$

III. यदि त्रिज्या में x% का परिवर्तन हो एवं ऊँचाई में y% का परिवर्तन हो तो आयतन में,

$$\left[2x + y - \frac{x^2+2xy}{100} + \frac{x^2y}{100^2}\right]\% \text{ का बदलाव आता है।}$$

प्रमाण: यहाँ दो समान मापांकों (r^2) में x% का परिवर्तन आता है, जबकि तीसरे घटक में y% का बदलाव आता है। इसलिए दो मान समान होंगे और तीसरा अलग होगा। (x एवं z की जगह x रखें एवं y को यथावत रहने दें)। इस प्रकार,

$$x + y - x + \frac{xy + x^2 + xy}{100} + \frac{x^2y}{100^2} \quad 2x - y + \frac{x^2+2xy}{100} + \frac{x^2y}{100^2}$$

IV. यदि ऊँचाई और त्रिज्या दोनों में x% का बदलाव आता हो तो आयतन में

$$\left[3x + \frac{3x}{100} + \frac{x^3}{100^2}\right]\% \text{ का परिवर्तन आएगा।}$$

प्रमाण: घन एवं गोला के समान ही, यहाँ भी तीनों मापांक (2 त्रिज्याएँ एवं एक ऊँचाई) बदल जाते हैं। इसलिए x,y एवं z की जगह x रखें।

नोट: (1) हमारा सुझाव है कि आप केवल आधारभूत प्रमेय को याद रखें तथा इस बात को अच्छी तरह समझ लें कि किसी भी त्रिविमीय आकृति की मापक भुजाओं में परिवर्तन करने से इसमें किस प्रकार का बदलाव आता है।

(2) कुछ स्थितियों में हमने वृद्धि या ह्रास की जगह 'परिवर्तन' शब्द का इस्तेमाल किया है, इसका मतलब यह है कि वृद्धि होने पर धनात्मक मान का इस्तेमाल करें और कमी आने

yourmathbook

पर ऋणात्मक मान का प्रयोग करें। यदि उत्तर में धन या ऋण चिह्न आता है तो क्रमशः आयतन में वृद्धि या ह्रास का सूचक माना जाता है। उपर्युक्त प्रमेय में उल्लिखित परिस्थिति का मतलब यह नहीं होता कि यदि एक मान में वृद्धि होती है तो दूसरे में भी वृद्धि होगी।

(3) शंकु के लिए एक प्रमेय ज्ञात करें। सभी स्थितियों की कल्पना करके अलग-अलग सूत्र निकालें।

उदा. 35: किसी घन की प्रत्येक भुजा 50 प्रतिशत बढ़ा दी जाती है। आयतन में होनेवाली प्रतिशत वृद्धि की गणना करें। सतह के क्षेत्रफल में होनेवाली प्रतिशत वृद्धि की भी गणना करें।

हल: प्रमेय के अनुसार,

$$\text{आयतन में प्रतिशत वृद्धि} = 3 \times 50 + \frac{3(50)^2}{100} + \frac{(50)^3}{100^2}$$

$$= 150 + 75 + 12.5 = 237.5\%$$

क्षेत्रफल के संदर्भ में, यह स्पष्ट है कि केवल दो मापक भुजाएँ ही बदलती हैं (क्योंकि क्षेत्रफल एक द्विविमीय संकल्पना है)। इसलिए हमलोग निम्नलिखित सूत्र का इस्तेमाल करते हैं (पिछला अध्याय देखिए)।

$$\text{क्षेत्रफल में प्रतिशत वृद्धि} = 2x + \frac{x^2}{100} = 2 \times 50 + \frac{50 \times 50}{100} = 125\%$$

उदा. 36: यदि किसी बेलन की त्रिज्या एवं ऊँचाई दोनों में 10% की वृद्धि होती हो तो आयतन में कितने प्रतिशत की वृद्धि होगी ?

हल: चूँकि तीनों मापक भुजाएँ (दो त्रिज्या + एक ऊँचाई) में समान प्रतिशत की वृद्धि होती है, इसलिए हमलोग निम्नलिखित सूत्र का उपयोग करते हैं:

$$\text{आयतन में प्रतिशत वृद्धि} = 3 \times 10 + \frac{3(10)^2}{100} + \frac{(10)^3}{(100)^2} = 30 + 3 + 0.1 = 33.1\%$$

उदा. 37: किसी शंकु की त्रिज्या और ऊँचाई में 20% की वृद्धि होती है तो आयतन में कितने प्रतिशत की वृद्धि होगी ?

हल: चूँकि तीनों मापक भुजाएँ (2 त्रिज्याएँ + 1 ऊँचाई) के मान में समान प्रतिशत की वृद्धि होती है, इसलिए पिछले उदाहरण में दिया गया सूत्र ही इस्तेमाल करेंगे।

$$\therefore \text{ आयतन में \% वृद्धि} = 3 \times 20 + \frac{3(20)^2}{100} + \frac{(20)^3}{(100)^2}$$

$$= 60 + 12 + 0.8 = 72.8\%$$

उदा. 38: किसी गोले की त्रिज्या में 5% की वृद्धि होती है। इसके पृष्ठ क्षेत्रफल में होने वाली प्रतिशत वृद्धि का आकलन करें।

हल: यहाँ क्षेत्रफल में होनेवाली प्रतिशत वृद्धि के विषय में पूछा गया है, इसलिए यहाँ द्विविमीय (two dimensional) आकृति के संदर्भ में प्रयुक्त सूत्र का इस्तेमाल किया जाएगा (पिछले अध्याय में ऐसे सूत्रों की चर्चा की गई है) :

yoursmahboob

अभीष्ट प्रतिशत मान $= 2 \times 5 + \frac{5 \times 5}{100} = 10 + 0.25 = 10.25$

उदा. 39: घन के प्रत्येक किनारे में 50 प्रतिशत की कमी की जाती है। पृष्ठ क्षेत्रफल एवं आयतन में होने वाली प्रतिशत कमी का आकलन करें।

हल: पृष्ठ क्षेत्रफल (द्विविमीय आकृति के लिए), हमलोग पिछले अध्याय में दिए गए सूत्र का इस्तेमाल करते हैं (ऐसे सूत्रों का उल्लेख पिछले अध्याय में है): $\left[2x + \frac{x^2}{100}\right]\%$

चूँकि यहाँ मान में कमी हो रही है, इसलिए x का ऋणात्मक मान रखें :

$\therefore$ पृष्ठ क्षेत्रफल में अभीष्ट प्रतिशत कमी $= 2(-50) + \frac{(-50)^2}{100}$

$= -100 + 25 = -75\%$

$\therefore$ क्षेत्रफल में 75% की कमी आती है।

आयतन में प्रतिशत कमी $= 3(-50) + \frac{3(-50)^2}{100} + \frac{(-50)^3}{(100)^2}$

$= -150 + 75 - 12.5 = -87.5\%$

$\therefore$ आयतन में 87.5% की कमी आती है.

उदा. 40: कोई बेलन, गोलार्द्ध और शंकु एक ही आधार पर स्थित हैं और उनकी ऊँचाई भी एकसमान है। उनके आयतनों का, तथा वक्र सतह के क्षेत्रफलों का अनुपात ज्ञात करें।

हल: मान लिया कि इन तीनों का आधार x सेंटीमीटर है तथा ऊँचाई y सेंटीमीटर है।

$\therefore$ ***गोलार्द्ध के लिए :***

त्रिज्या $= \frac{x}{2}$ सेंटीमीटर एवं ऊँचाई $= y = \frac{x}{2}$ से. मी. .....(*)

शंकु के लिए:

त्रिज्या $= \frac{x}{2}$ सेंटीमीटर एवं ऊँचाई $= y = \frac{x}{2}$ से. मी. (चूँकि ऊँचाई सबके लिए बराबर है)

बेलन के लिए:

त्रिज्या $= \frac{x}{2}$ सेंटीमीटर, एवं ऊँचाई $= y = \frac{x}{2}$ सेंटीमीटर

$\therefore$ बेलन का आयतन : गोलार्द्ध का आयतन : शंकु का आयतन

$$= \pi\left[\frac{x}{2}\right]^2 \left[\frac{x}{2}\right] : \frac{2}{3}\pi\left[\frac{x}{2}\right]^3 : \frac{1}{3}\pi\left[\frac{x}{2}\right]^2\left[\frac{x}{2}\right]$$

yoursmahboob

$$= 1 : \frac{2}{3} : \frac{1}{3} = 3 : 2 : 1$$

अब, बेलन का क्षेत्रफल : गोलार्द्ध का क्षेत्रफल : शंकु का क्षेत्रफल

$$= 2\pi\left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{x}{2}\right) : 2\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2 : \pi\left(\frac{x}{2}\right)\sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2}$$

$$= 2\pi\frac{x^2}{4} : 2\pi\frac{x^2}{4} : \pi\frac{x^2}{2\sqrt{2}}$$

$$= \pi\frac{x^2}{2} : \pi\frac{x^2}{2} : \pi\frac{x^2}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 1 : 1 : \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} : \sqrt{2} : 1$$

नोट: (*): गोलार्द्ध की ऊँचाई = गोलार्द्ध की त्रिज्या

उदा. 41: एक घन एवं उसके अंदर फिट हो जाने वाले गोले के आयतन का अनुपात निकालें।

हल: मान लिया कि घन की भुजा = a सेंटीमीटर।

$\therefore$ घन के अंदर पूरी तरह फिट कर जाने वाले गोले की त्रिज्या = $\frac{a}{2}$ सेंटीमीटर।

$\therefore$ उनके आयतन का अनुपात = $a^3 : \frac{4}{3}\pi\left[\frac{a}{2}\right]^3 = 1 : \frac{4\pi}{24} = 1 : \frac{\pi}{6} = 6 : \pi$

उदा. 42: किसी गोले के अंदर से सबसे बड़े आकार का (जिसके कोने अंदर से खाड़ को छू रहे हैं) घन काट लिया जाता है। घन और गोला के आयतन का अनुपात निकालें।

हल: मान लिया कि गोले की त्रिज्या = r सेंटीमीटर तथा घन की भुजा = x से. मी.

तो, घन का विकर्ण = गोले का व्यास

या, $\sqrt{3}x = 2r$ या, $x = \frac{2r}{\sqrt{3}}$

आयतन का अनुपात = घन का आयतन : गोले का आयतन

$$= x^3 : \frac{4}{3}\pi r^3 = \left(\frac{2r}{\sqrt{3}}\right)^3 : \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$= \frac{8}{3\sqrt{3}} : \frac{4}{3}\pi = 2 : \sqrt{3}\pi$$

उदा. 43: दो घनों के आयतन का अनुपात 8:125 है। इनके किनारों एवं पृष्ठ क्षेत्रफल का अनुपात बताएँ।

हल: सूत्र से, घन के लिए

yoursmahboob

भुजाओं का अनुपात = $(\text{आयतन का अनुपात})^{1/3}$

तथा, पृष्ठ क्षेत्रफल का अनुपात = $(\text{आयतन का अनुपात})^{2/3}$

भुजाओं का अनुपात = $(8:125)^{1/3} = \left(\frac{8}{125}\right)^{1/3} = \frac{2}{5}$ 2 : 5

तथा, पृष्ठ क्षेत्रफल का अनुपात = $(8:125)^{2/3} = \left(\frac{8}{125}\right)^{2/3} = \frac{4}{25} = 4:25$

उदा. 44: 10 मीटर किनारे वाले दो घनों को जोड़कर एक घनाभ बनाया जाता है। इस प्रकार निर्मित नए घनाभ का पृष्ठ क्षेत्रफल निकालें।

हल: नए घनाभ की चौड़ाई एवं ऊँचाई, घन जितनी ही रहेंगी, केवल इसकी लंबाई दुगुनी हो जाएगी।
तब घनाभ के लिए,
लंबाई $(l) = 2 \times 10 = 20$ सेंटीमीटर
चौड़ाई $(b) = 10$ सेंटीमीटर
ऊँचाई $(h) = 10$ सेंटीमीटर
$\therefore$ घनाभ का पृष्ठ क्षेत्रफल $= 2(lb + bh + lh)$
$= 2(20 \times 10 + 10 \times 10 + 20 \times 10)$
$= 2 \times 500 = 1000$ वर्ग सें. मी.

***दूसरी विधि* (Quicker Method):**
दो घनों के कुल मिलाकर $6 \times 2 = 12$ पृष्ठ हुए; जब इन दो घनों को एक साथ मिलाया जाता है तब दो पृष्ठ मिलकर एक हो जाते हैं। इस प्रकार यह कहा जा सकता है कि नए घनाभ का पृष्ठ क्षेत्रफल दोनों घनों के कुल पृष्ठों के क्षेत्रफल तथा घन के दो पृष्ठों के क्षेत्रफल के अंतर के बराबर है। इस प्रकार निम्नलिखित सूत्र प्राप्त होता है:
नए घनाभ का पृष्ठ क्षेत्रफल $10a^2$
(जहाँ, a घन की भुजा है।)
$\therefore$ यहाँ, घनाभ का कुल पृष्ठ क्षेत्रफल $10 \times (10)^2 = 1000$ वर्ग सेंटीमीटर

उदा. 45: प्रमाणित करें कि लिंबू गोले के वक्र सतह का क्षेत्रफल तथा उस बेलन का, जो गोले को परिगत (circumscribe) करता है, पृष्ठ क्षेत्रफल समान होता है।

हल: यदि आप रेखाचित्र बनाएँ तो पाएँगे कि यदि r गोले की त्रिज्या है, तो उल्लिखित बेलन की त्रिज्या r होगी और इसकी ऊँचाई $2r$ के बराबर होगी।
अब, गोले के वक्र सतह का क्षेत्रफल $= 4\pi r^2$
तथा बेलन के वक्र सतह का क्षेत्रफल $2\pi(r)(2r) = 4\pi r^2$
इस प्रकार धारणा प्रमाणित हुई।

उदा. 46: 42 सेंटीमीटर त्रिज्या वाला एक वृत्ताकार तार 'V' या 'W' की शक्ल में मोड़ा जाता है। इस आकृति की भुजाएँ 6 : 5 के अनुपात में हैं। आकृति की छोटी वाली भुजा ज्ञात करें।

yoursmahboob

हल: वृत्त की लंबाई = वृत्त की परिधि = $2\pi \times 42 = \frac{2 \times 22 \times 42}{7} = 264$ सेंटीमीटर

अब आयत की परिमिति = 264 सेंटीमीटर

चूँकि परिमिति में लंबाई और चौड़ाई का दुगुना शामिल रहता है, इसलिए भुजाओं को ज्ञात करने के लिए हम परिमिति में अनुपात के योगफल के दुगुने से भाग देते हैं।

$\therefore$ लंबाई = $\frac{264}{2(6+5)} \times 6 = 72$ सेंटीमीटर

अब चौड़ाई = $\frac{264}{2(6+5)} \times 5 = 60$ सेंटीमीटर। उत्तर

उदा. 47: एक शंकु एक घन के अंदर इस प्रकार पूरी तरह से फिट हो जाता है कि शंकु का आधार घन के किसी एक सतह को स्पर्श करता है तथा उसका शीर्ष (vertex) घन के सम्मुख सतह को। यदि घन का आयतन 343 घन से. मी. हो तो शंकु का आयतन (लगभग में) ज्ञात करें:

1) 80 घन से. मी.
2) 90 घन से. मी.
3) 110 घन से. मी.
4) 105 घन से. मी.
5) 100 घन से. मी.

हल: घन का किनारा = $\sqrt[3]{343} = 7$ से. मी.

शंकु की त्रिज्या = 3.5 से. मी. तथा ऊँचाई = 7 से. मी.

शंकु का आयतन = $\frac{1}{3}\pi r^2 h$

$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 3.5 \times 3.5 \times 7$

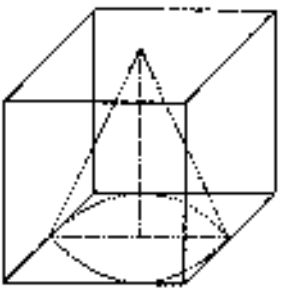
$= \frac{1}{3} \times 22 \times 12.25 = 90$ घन से. मी.

द्रुत विधि (Quicker Method):

यदि एक शंकु एक घन के अंदर इस प्रकार फिट हो जाता है कि शंकु के आधार के किनारा घन के किसी एक सतह के किनारों को स्पर्श करता है तथा शंकु का शीर्ष (vertex) घन के दूसरे विपरीत (opposite) सतह को स्पर्श करता हो तो शंकु का आयतन

$\left(\frac{\pi}{12} \times \text{घन का आयतन}\right)$ के बराबर होता है।

yoursmahboob

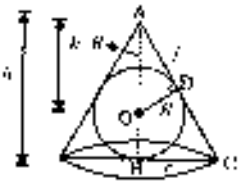


उपर्युक्त प्रश्न में,

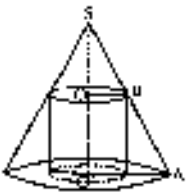
अभीष्ट उत्तर $= \frac{\pi}{12} \times 343 = \frac{22 \times 343}{7 \times 12} = \frac{49 \times 11}{6} \approx 90$ घन से.मी.

महत्वपूर्ण परिणाम (Important Results)

1. एक शंकु जिसकी त्रिज्या r एवं ऊँचाई (vertical height) h है, के अंदर रखे गए सबसे बड़े गोले की त्रिज्या $= \left(\frac{hr}{r+l}\right)$; जहाँ $l = \sqrt{h^2 - r^2}$ है।

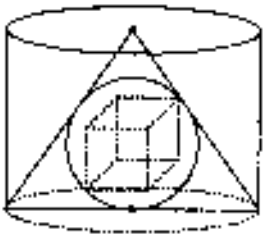


2. एक शंकु के आधार की त्रिज्या R है एवं उसकी ऊँचाई H है। एक सबसे बड़ा बेलन, जो कि शंकु के अंदर पूरी तरह फिट हो सकता हो, के वक्र सतह का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}\pi RH$ होगा।



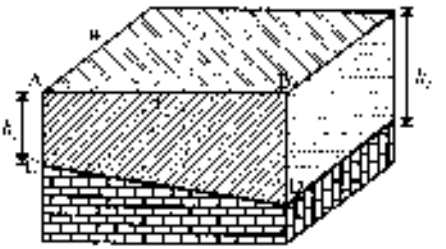
3. भुजा x का एक घन गोले के अंदर बिल्कुल फिट हो जाता है। वह गोला एक शंकु के अंदर पूरी तरह फिट हो जाता है। वह शंकु एक बेलन के अंदर पूरी तरह फिट हो जाता है। शंकु की ऊँचाई उसके आधार के व्यास के बराबर है। बेलन के वक्र सतह का क्षेत्रफल $= \left(\frac{\sqrt{5}+\sqrt{15}}{2}\right)^2 x^2$ होगा।

yoursmahboob



4. किसी भी सम ठोस (Regular Solid) के लिए, सतहों की संख्या − शीर्षों की संख्या (vertices) + किनारों (edges) की संख्या = 2

स्विमिंग पूल (Swimming Pool)



मान लिया कि एक स्विमिंग पूल में स्थित पानी का आयतन निकालना है। पानी के स्तर की ऊँचाई h_1 एवं h_2 है, l स्विमिंग पूल की लंबाई है एवं w स्विमिंग पूल की चौड़ाई है। सर्वप्रथम दिए हुए चित्र में हमें यह पता लगाना होगा कि कौन-सा अनुप्रस्थ काट का क्षेत्रफल (cross sectional area) हर जगह एक समान है।

उपर्युक्त चित्र में Face-vertical cross-sectional area अर्थात् ABCD हर जगह एक समान है। ABCD एक समलम्ब चतुर्भुज (trapezium) है।

∴ स्विमिंग पूल में पानी का आयतन

= अनुप्रस्थ काट ABCD का क्षेत्रफल × संगत ऊँचाई

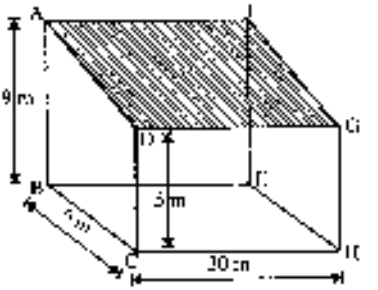
= समलंब चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल × w

$$= \left[\frac{1}{2}(h_1 + h_2) \times l\right] \times w$$

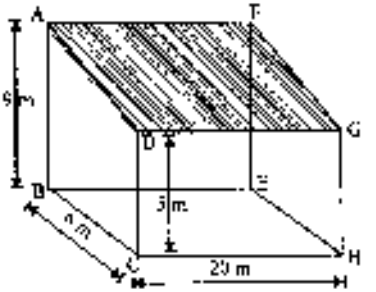
नोट: यहाँ पर स्विमिंग पूल की चौड़ाई w को ऊँचाई माना गया है।

उदा. 48: नीचे दिए गए चित्र, जिसमें एक छप्पर वाला घर दिखाया गया है, के आधार पर उसका आयतन ज्ञात करें।

yoursmahboob



हल: इस स्थिति में हम Side-vertical Cross-section लेते हैं। (उदा. 49 का नोट देखें)



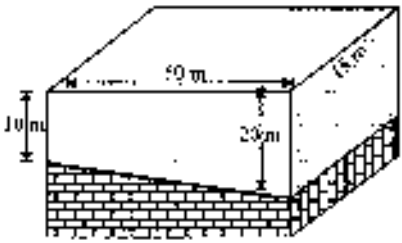
दिए हुए घर का आयतन $= \frac{1}{2} \times$ ABCD का क्षेत्रफल $\times$ घर की लंबाई (CH)

($\because$ Side-vertical Cross-section से हमें समलंब चतुर्भुज ABCD प्राप्त होता है जिसकी समानान्तर भुजाएँ AB एवं CD हैं तथा ऊँचाई BC है)

$$= \left[\frac{1}{2} \times (9+5) \times 6\right] \times 20 = 840 \text{ घन मीटर}$$

उदा. 49: किसी स्विमिंग पूल की लंबाई एवं चौड़ाई क्रमशः 50 मीटर एवं 15 मीटर है। यदि स्विमिंग पूल के एक ओर की गहराई 10 मीटर है तथा दूसरे ओर की गहराई 20 मीटर है तो स्विमिंग पूल में पानी का आयतन ज्ञात करें।

हल:



yourstrbhoob

यदि हम स्विमिंग पूल का face-vertical cross-section लेते हैं तो एक समलंब चतुर्भुज प्राप्त होता है जिसकी समान्तर भुजाएँ 10 मी. एवं 20 मी. है तथा ऊँचाई 50 मी. है (चित्र देखें)

∴ स्विमिंग पूल में पानी का आयतन = स्विमिंग पूल के ऊर्ध्वाधर अनुप्रस्थ काट (vertical cross-section) का क्षेत्रफल × स्विमिंग पूल की चौड़ाई $= \left[\frac{1}{2} \times (10 + 20) \times 50\right] \times 15$

∵ समलंब चतुर्भुज का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ × ऊँचाई × (समान्तर भुजाओं का योगफल)

= 11250 घन मीटर

नोट: हम लोगों के पास ऊर्ध्वाधर अनुप्रस्थ काट लेने के लिए दो विकल्प हैं (i) फेस-ऊर्ध्वाधर अनुप्रस्थ काट (ii) साइड-ऊर्ध्वाधर अनुप्रस्थ काट। हम उस ऊर्ध्वाधर अनुप्रस्थ काट को लेते हैं जिसमें प्रत्येक अनुप्रस्थ काट के लिए क्षेत्रफल एक समान रहता है। उदाहरण के लिए, यदि हम उपर्युक्त उदाहरण में साइड-ऊर्ध्वाधर अनुप्रस्थ काट लेते हैं तो क्षेत्रफल प्रत्येक अनुप्रस्थ काट के लिए धीरे-धीरे बढ़ता जाएगा। उदा.-48 को भी ध्यान पूर्वक देखें।

yoursmahboob

कैलेंडर

(Calendar)

आज "15 अगस्त 1995" है और आपसे पूछा जाता है कि "15 अगस्त 2001" कौन सा दिन होगा?

यदि आपको विधि का ज्ञान नहीं हो तो आप मुश्किल में पड़ जाएँगे। कभी कभार ऐसे प्रश्न भी प्रतियोगिता परीक्षाओं में पूछे जाते हैं। इसे पूरा करने के लिए विषम दिनों (odd days) की संख्या का पता लगाना होता है। इसलिए हमें विषम दिनों की संकल्पना से परिचित होना चाहिए।

किसी सुनिश्चित अवधि के अंतर्गत सप्ताहों की पूर्ण संख्या के अतिरिक्त जितने दिन बचते हैं, उन्हें 'विषम दिन' या odd days कहते हैं। उदाहरण के लिए,

1) एक *साधारण वर्ष* **(an ordinary year)** में अर्थात् 365 दिन में 52 पूर्ण सप्ताह और ***1 विषम दिन*** (odd day) होता है।

2) एक अधिवर्ष (leap year) (366 दिन) में 52 पूर्ण सप्ताह और ***2 विषम दिन*** होते हैं।

अधिवर्ष और साधारण वर्ष क्या है?

कोई भी वर्ष जो 4 से पूर्णतया विभाज्य हो, जैसे 1988, 1992, 1996 आदि, अधिवर्ष कहलाता है।

हर चौथी शताब्दी एक अधिवर्ष होती है। यद्यपि, दूसरी शताब्दियाँ जो 4 से विभाज्य होते हैं, पर यह जरूरी नहीं है कि वे अधिवर्ष हों ही। किसी शताब्दी के अधिवर्ष होने के लिए जरूरी है कि वे 400 से पूरी तरह विभाज्य हों। उदाहरण के लिए,

(1) 400, 800, 1200 अधिवर्ष हैं, क्योंकि ये 400 से पूरी तरह विभाज्य हैं।

(2) 700, 600, 500 आदि अधिवर्ष नहीं हैं, क्योंकि ये 400 से पूरी तरह विभाजित नहीं होते।

विषम दिनों की संख्या ज्ञात करने की विधि

किसी "साधारण वर्ष" में 365 दिन होते हैं। यदि 365 में 7 से भाग दे दिया जाए, तो भागफल 52 आता है और शेष 1 प्राप्त होता है। इस प्रकार यह कहा जा सकता है कि 365 दिनों का किसी साधारण वर्ष में 52 सप्ताह और 1 दिन होता है। चूँकि शेष बचा दिन अलग-थलग पड़ जाता है, इसलिए इसे विषम दिन या odd day कहते हैं।

इसलिए किसी 'साधारण वर्ष' में मात्र 1 विषम दिन होता है।

एक अधिवर्ष में 366 दिन अर्थात् 52 सप्ताह और 2 दिन होते हैं।

इसलिए अधिवर्ष में 2 विषम दिन होते हैं।

एक शताब्दी में 100 वर्ष होते हैं:

76 साधारण वर्ष एवं 24 अधिवर्ष

= [(76 × 52) सप्ताह + 76 दिन] + [(24 × 52) सप्ताह + 24 × 2 दिन]

= 5200 सप्ताह + 124 दिन

yoursmahboob

= 5200 सप्ताह + 17 सप्ताह + 5 दिन

= 5217 सप्ताह + 5 दिन

इसलिए 100 वर्ष की अवधि में 5 विषम दिन होते हैं।

इसी तरह ***(i) 200 वर्षों में 5 × 2 = 10 अर्थात् 3 विषम दिन***

(ii) 300 वर्षों में 5 × 3 = 15 अर्थात् 1 विषम दिन

(iii) 400 वर्षों में 5 × 4 + 1 = 21 अर्थात् कोई विषम दिन नहीं।

इसी तरह 800, 1200 वर्षों की अवधि में एक भी विषम दिन नहीं होता।

नोट: (i) 5 × 2 = 10 दिन = 1 सप्ताह + 3 दिन = 3 विषम दिन

(ii) 5 × 3 = 15 दिन = 2 सप्ताह + 1 दिन = 1 विषम दिन

(iii) 400वाँ वर्ष एक अधिवर्ष होता है इसलिए उसमें एक अतिरिक्त दिन जोड़ दिया जाता है।

किसी तारीख को कौन-सा दिन था, इसके निर्धारण में विषम दिन किस प्रकार सहायक होता है?

जब निर्देश-दिन (Reference-day) दिया गया हो:

एक प्रश्न लीजिए: 1 जनवरी 1992 बुधवार था। 1 जनवरी 1993 को कौन-सा दिन पड़ेगा? यदि आपको ध्यान हो तो, 1992 के 'अधिवर्ष' होने की वजह से इसमें विषम दिनों की संख्या 2 है; इसलिए अभीष्ट दिन बुधवार से दो दिन आगे अर्थात् शुक्रवार होगा।

जब निर्देश–दिन (Reference-day) का पता नहीं हो:

ऐसी स्थिति में, विषम दिनों की संख्या के अनुसार, दिन को गिनते की जाती है। विषम दिन की संख्या '0' हो तो रविवार, विषम दिनों की संख्या 1 हो तो सोमवार आदि।

मान लीजिए, कोई आपसे पूछता है कि 12 जनवरी 1979 को कौन-सा दिन था?

12 जनवरी 1979 का मतलब है 1978 वर्ष + 12 दिन

अब, 1600 वर्ष के लिए विषम दिनों की संख्या = 0

∴ 300 वर्ष में 5 × 3 = 15 अर्थात् 1 विषम दिन

78 वर्ष में 59 साधारण वर्ष + 19 अधिवर्ष

= 59 + 2 × 19 = 97 दिन

= 13 सप्ताह + 6 दिन = 6 विषम दिन

∴ विषम दिनों की कुल संख्या = 0 + 1 + 6 + 12 = 19 या 5 विषम दिन

∴ अभीष्ट दिन = शुक्रवार

हल किए गए उदाहरण

उदा. 1: 5 जनवरी 1991 का दिन शनिवार था। 3 मार्च 1992 को कौन-सा दिन रहा होगा?

हल: 1991 एक 'साधारण वर्ष' है। इसलिए, विषम दिन की संख्या = 1

∴ 5 जनवरी 1992 को शनिवार के एक दिन बाद अर्थात् रविवार था।

अब, जनवरी 1992 में, 26 दिन शेष हैं अर्थात् 5 'विषम दिन' है। फरवरी '1992 में' 29 दिन हैं अर्थात् 1 विषम दिन। 1 मार्च 1992 में 3 दिन हैं अर्थात् 3 विषम दिन।

yousmahboob

∴ जनवरी 5, 1992 के बाद विषम दिनों की कुल संख्या = 5+1+3=9 दिन अर्थात् 3 विषम दिन

∴ 3 मार्च, 1992 को रविवार के दो दिनों बाद अर्थात् बुधवार होगा।

दूसरी विधि

5 जनवरी 1991 एवं 3 मार्च, 1992 के बीच दिनों की कुल संख्या = 1991 का 360 दिन + 1992 में (31+29+3) दिन

= 3 विषम दिन

∴ 3 मार्च 1992 को शनिवार से तीन दिन बाद अर्थात् मंगलवार है।

उदा. 2: 4 अप्रैल 1988 का दिन सोमवार है। 13 नवंबर 1987 को कौन-सा दिन था ?

हल: 3 नवंबर 1987 एवं 4 अप्रैल 1988 के बीच दिनों की संख्या

= 27 (नवं.) + 31 (दिस.) + 31 (जन.) + 29 (फर.) + 31 (मार्च) + 4 (अप्रैल)

= 153 दिन = 21 सप्ताह + 6 दिन

= 6 विषम दिन

∴ 3 नवम्बर 1987, 4 अप्रैल 1988 से 7 − 6 = 1 दिन बाद था अर्थात् मंगलवार था।

नोट: 3 नवम्बर 1987, 4 अप्रैल 1988 से पहले है।

∴ अभीष्ट दिन सोमवार से 6 दिन पूर्व या 7−6=1 दिन सोमवार के पश्चात् होगा।

उदा. 3: आज 21 अगस्त है, दिन है सोमवार। यह एक अधिवर्ष है। 3 वर्षों बाद इसी तिथि को कौन सा दिन पड़ेगा ?

हल: चूँकि यह एक अधिवर्ष है, इसलिए अगले आने वाले 3 वर्षों में कोई भी अधिवर्ष नहीं होगा। इसलिए दी गई तारीख को सोमवार के तीन दिनों बाद अर्थात् बृहस्पतिवार होगा।

उदा. 4: 2 जनवरी 1993 को बृहस्पतिवार था। 15 मार्च 1993 को कौन-सा दिन होगा ?

हल: दिनों की कुल संख्या = 29 (जन.) + 28 (फर.) + 15 (मार्च)

= 72 दिन = 10 सप्ताह + 2 दिन

= 2 विषम दिन

इसलिए दी गई तिथि बृहस्पतिवार के दो दिनों बाद अर्थात् शनिवार होगा।

उदा. 5: भारत का पहला गणतंत्र दिवस 26 जनवरी 1950 को मनाया गया। इस तिथि को कौन-सा दिन था ?

हल: विषम दिनों की कुल संख्या = 1600 वर्ष में विषम दिनों की संख्या = 0

+ 400 वर्षों में 1 विषम दिन + 49 वर्ष (12 अधिवर्ष + 37 साधारण वर्ष) में 5 विषम दिन

+ जनवरी के 26 दिन में 5 विषम दिन

= 0 + 1 + 5 + 5 = 4 विषम दिन

∴ अभीष्ट दिन = बृहस्पतिवार

अभ्यास प्रश्न

1. 12 जनवरी 1980 का दिन शनिवार था। 12 जनवरी 1979 को कौन सा दिन पड़ेगा ?

   1) शनिवार 2) रविवार 3) बृहस्पतिवार

   4) शुक्रवार 5) सोमवार

yoursmahboob

2. 2 जुलाई 1985 का दिन बुधवार था। 2 जुलाई 1984 को कौन-सा दिन था?
   1) बुधवार 2) मंगलवार 3) सोमवार
   4) बृहस्पतिवार 5) रविवार
3. आज मंगलवार है। आज से ठीक 1 वर्ष 68 दिनों बाद कौन-सा दिन होगा ?
   1) शुक्रवार 2) बृहस्पतिवार 3) शनिवार
   4) सोमवार 5) इनमें से कोई नहीं
4. महात्मा गाँधी का जन्म 2 अक्टूबर 1869 को हुआ था। इस तिथि को सप्ताह का कौन-सा दिन था?
   1) शुक्रवार 2) बृहस्पतिवार 3) शनिवार
   4) सोमवार 5) इनमें से कोई नहीं
5. 1990 के बाद किस वर्ष का कैलेंडर ठीक 1990 की तरह होगा ?
   1) 1998 2) 2001 3) 2002 4) 2003 5) 2004
6. 15 अगस्त 1947 को भारत स्वतंत्र हुआ। इस तिथि को सप्ताह का कौन-सा दिन था?
   1) शुक्रवार 2) बृहस्पतिवार 3) मंगलवार
   4) सोमवार 5) इनमें से कोई नहीं

उत्तर

1. 4; 1979 एक साधारण वर्ष है और 12 जनवरी, 1980, फरवरी से पहले आता है। इसलिए पूरे वर्ष में विषम दिनों की संख्या = 1
इसलिए अभीष्ट दिन शनिवार से एक दिन पूर्व अर्थात् शुक्रवार है।
2. 2; 2 जुलाई 1984 एवं 2 जुलाई 1985 के बीच फरवरी का महीना 1985 में पड़ता है और 1985 अधिवर्ष नहीं है। इसलिए कुल अवधि के लिए विषम दिनों की संख्या = 1
अभीष्ट दिन बुधवार से एक दिन पूर्व अर्थात् मंगलवार है।
3. 4; यदि केवल 1 वर्ष का उल्लेख हो तो वर्ष को 365 दिन का मानकर प्रश्न को हल करना चाहिए। आप जानते हैं कि 1 वर्ष में विषम दिनों की संख्या 1, 68 दिनों में 5 विषम दिन होते हैं। इसलिए विषम दिनों की कुल संख्या = 6, अभीष्ट दिन मंगलवार से 6 दिन आगे या मंगलवार से एक दिन पीछे होगा अर्थात् अभीष्ट दिन = सोमवार
4. 3; 1600 वर्षों में विषम दिनों की संख्या = 0
200 वर्षों में 2 × 5 = 10 अर्थात् 3 विषम दिन।
68 वर्षों में 17 अधिवर्ष एवं 51 साधारण वर्ष हैं।
अर्थात् 17×2+51 = 85 दिन अर्थात् 1 विषम दिन
सन् 1869 में 2 अक्टूबर तक दिनों की कुल संख्या = 31 (जन.) + 28 (फर.) + 31 (मार्च) + 30 (अप्रैल) + 31 (मई) + 30 (जून) + 31 (जुलाई) + 31 (अगस्त) + 30 (सितम्बर) + 2 (अक्टूबर) = 275 दिन = 2 विषम दिन
∴ कुल विषम दिन = 0 + 3 + 1 + 2 = 6
∴ अभीष्ट दिन शनिवार था।

yoursmahboob

दूसरी विधि:

जब कभी सन् 1600 के बाद की किसी तिथि का दिन पूछा जाता हो, तो वर्ष को निम्नलिखित क्रम से विभाजित कीजिए: (इस प्रश्न में)

2 अक्टूबर 1869 = 1600 + 200 + 68 + 1 जनवरी से 2 अक्टूबर 1869 तक

= 1600 + 200 + 68 + 365 दिन + 2 अक्टूबर से 31 दिसम्बर 1869 तक

= 1600 + 200 + 68 + (365 − 90) दिन

∴ विषम दिनों की संख्या = 0 + 3 + 1 (37 अधिवर्ष एवं 51 साधारण वर्षों के लिए) + 2

= 6 विषम दिन

∴ अभीष्ट दिन = शनिवार

5. 4: हमलोग 1990 से शुरू करके विषम दिनों की संख्या गिनना शुरू करते हैं और तब तक गिनते हैं जब तक कि लोकल 7 से पूरी तरह विभाज्य नहीं हो जाए।

सन् 2002 तक ऐसे दिनों की संख्या 14 है। सन् 1990 का कैलेंडर 2001 में फिर से आ जाएगा।

नोट: विषम दिनों की संख्या = 1(1990) + 1(1991) + 2(1992) + 1(1993) + 1(1994) + 1(1995) + 2(1996) + 1(1997) + 1(1998) + 1(1999) + 0 (2000) + 1(2001) + 1(2002) = 14 विषम दिन

6. 1. 15 अगस्त 1947 = (1600 + 300 + 46) वर्ष + 1 जनवरी से 15 अगस्त 1947 तक

(1600 + 300 + 46) वर्ष = 365 × 16 दिन से 31 दिसम्बर 1947 तक

= (1600 + 300 + 46) वर्ष + (365 − 138) दिन

विषम दिनों की संख्या = 0 + 3 + 1 (11 अधिवर्ष और 35 साधारण वर्षों के लिए) + 1

= 5 विषम दिन

∴ अभीष्ट दिन = शुक्रवार

महीना	विषम दिन
जनवरी	3
फरवरी	0/1 साधारण वर्ष/अधिवर्ष
मार्च	3
अप्रैल	2
मई	3
जून	2
जुलाई	3
अगस्त	3
सितम्बर	2
अक्टूबर	3
नवम्बर	2
दिसम्बर	3

yoursmahboob

घड़ियाँ

(Clocks)

किसी घड़ी का डायल एक वृत्त होता है, जिसकी परिधि 12 हिस्सों में विभाजित रहती है, इसे घंटा अंतराल (Hour-space) कहते हैं। प्रत्येक घंटा–अंतराल 5 हिस्सों में विभाजित रहता है, इसे मिनट-अंतराल (Minute-space) कहते हैं। इस प्रकार पूरी परिधि 12 × 5 = 60 मिनट अंतरालों में विभक्त रहती है।

घड़ी की छोटी सूई (घंटा वाली सूई अर्थात् Hour-hand) को 1 घंटा अंतराल तय करने में जितना समय लगता है, उतने ही समय में बड़ी सूई (मिनट की सूई अर्थात् Minute-hand या longer-hand) परिधि की एक परिक्रमा पूरी कर लेती है। इस प्रकार यह निष्कर्ष निकाला जा सकता है कि ***60 मिनट की अवधि में मिनट की सूई घंटे की सूई से 55 मिनट आगे निकल जाती है।***

नोट: उपर्युक्त कथन (जो कि मोटे अक्षरों में है) इस अध्याय में दिए गए प्रश्नों को हल करने में बड़ा उपयोगी है। इसलिए इसे याद रखना चाहिए। उपर्युक्त कथन से तात्पर्य यह है कि:

'एक घंटे में, घंटे की सूई 5 मिनट अंतराल की दूरी तय करती है, जबकि उतने ही समय में मिनट की सूई 60 मिनट अंतराल की दूरी तय कर लेती है। इस प्रकार मिनट की सूई घंटे की सूई से 55 मिनट-अंतराल आगे रहती है।'

कुछ अन्य तथ्य

I. प्रत्येक घंटे में घड़ी की दोनों सूइयाँ आपस में एक बार मिलती हैं।

II. जब दोनों सूइयाँ एक दूसरे के साथ समकोण बना रही हों तो एक दूसरे से 15 मिनट अंतराल की दूरी पर होती है। प्रत्येक घंटे में ऐसा दो बार होता है।

III. जब दोनों सूइयाँ एक दूसरे के विपरीत दिशा में हों तो वे 30 मिनट-अंतराल अलग होते हैं। ऐसी स्थिति प्रत्येक घंटे में एक बार आती है।

IV. दोनों सूइयाँ एक सरल रेखा में होती हैं, जब एक दूसरे को ढँक ले या एक दूसरे की विपरीत दिशा में हों।

तेज एवं धीमी घड़ियाँ (Too Fast and Too Slow)

यदि किसी घड़ी में 9.20 बजे हैं और सही समय 9.10 हो तो कहा जाता है कि घड़ी 10 मिनट तेज है और यदि 9.00 हो बजे हों, जबकि सही समय 9.10 हो, तो कहा जाता है कि घड़ी 10 मिनट धीमी है।

कुछ हल किए गए उदाहरण

उदा. 1: 4 और 5 बजे के बीच, कितने बजे घड़ी की सूइयाँ एक दूसरे को ढँक लेंगी?

हल: 4 बजे, छोटी सूई 4 पर होगी और बड़ी सूई 12 पर अर्थात् वे एक दूसरे से 20 मिनट–अंतराल की दूरी पर होंगे। साथ होने के लिए जरूरी है कि मिनट की सूई घंटे की सूई की तुलना में 20 मिनट ज्यादा चले। हम जानते हैं कि 60 मिनट में मिनट की सूई घंटे की सूई को

yoursmahboob

तुलना में 55 मिनट ज्यादा चलती है।

$\therefore$ 20 मिनट–अंतराल तय करने में लगा समय - $\frac{60}{55} \times 20 = \frac{240}{11} = 21\frac{9}{11}$ मिनट

इसलिए मिनट की सुई 4 बजकर $21\frac{9}{11}$ मिनट पर घंटे की सुई को ढँक लेगी

द्रुत विधि (Quicker Method):

x एवं $(x+1)$ बजे के बीच दोनों सुइयाँ x बजकर $5 \times x \times \frac{12}{11}$ मिनट पर एक साथ होंगी

इस स्थिति में;

$$5 \times 4 \times \left(\frac{12}{11}\right) = 4 \text{ बजकर } 21\frac{9}{11} \text{ मिनट पर}$$

नोट: सूत्र में कुछ भी खास नहीं है, बल्कि इस विधि को कम से कम समय में लिखने का तरीका यह है। यदि आप इसे समझ लेंगे तो बहुत कम शीघ्रता से पहुँच सकेंगे

उदा. 2: 4 और 5 बजे के बीच किस समय घंटा एवं मिनट की सुई आपस में समकोण बनाएँगी?

हल: 4 बजे, घंटा एवं मिनट की सुई के बीच 20 मिनट-अंतराल है एवं दूसरे के साथ समकोण बनाने के लिए, उनके बीच 15 मिनट-अंतराल की दूरी होनी चाहिए, इसलिए, यहाँ दो स्थितियाँ हैं;

स्थिति I. जब मिनट की सुई घंटा की सुई से 15 मिनट-अंतराल पीछे है: इस स्थिति में पहुँचने के लिए मिनट की सुई को 20 – 15 = 5 मिनट अंतराल की दूरी तय करनी होगी।
हम जानते हैं कि 60 मिनट में मिनट की सुई घंटे की सुई की तुलना में 55 मिनट ज्यादा चलती है।

$\therefore$ 5 मिनट अंतराल की दूरी $\frac{60}{55} \times 5 = 5\frac{5}{11}$ मिनट में तय की जाएगी।

अर्थात दोनों सुइयाँ 4 बजकर $5\frac{5}{11}$ मिनट पर आपस में समकोण बनाएँगी।

स्थिति II. जब मिनट की सुई, घंटे की सुई से 15 मिनट-अंतराल आगे है: इस स्थिति में पहुँचने के लिए मिनट की सुई को 20 – 15 = 35 मिनट-अंतराल की दूरी तय करनी होगी।
हम जानते हैं कि 60 मिनट में मिनट की सुई घंटे की सुई की तुलना में 55 मिनट ज्यादा चलती है।

$\therefore$ 35 मिनट अंतराल की दूरी $\frac{60}{55} \times 35 = 38\frac{2}{11}$ मिनट में तय की जाएगी

$\therefore$ इन दोनों सुइयों के बीच 4 बजकर $38\frac{2}{11}$ मिनट पर समकोण का स्थिति होगा।

yoursmakboob

द्रुत विधि (Quicker Method):

x एवं $(x+1)$ बजे के बीच दोनों सूइयाँ आपस में समकोण बनाएँगी x बजकर

$(5x \pm 15) \times \frac{12}{11}$ मिनट पर

इस स्थिति में, ये सूइयाँ निम्नलिखित समय पर आपस में समकोण बनाएँगी

i) 4 बजकर $(5 \times 4 - 15) \times \frac{12}{11}$ मिनट = 4 बजकर $5\frac{5}{11}$ मि.

ii) 4 बजकर $(5 \times 4 + 15) \times \frac{12}{11}$ मिनट = 4 बजकर $38\frac{2}{11}$ मि.

उदा. 3: 7 एवं 8 बजे के बीच किस समय घड़ी की दोनों सूइयाँ एक सरल रेखा में होंगी ?

हल: यहाँ दो स्थितियाँ संभव हैं:

पहली स्थिति: जब ये दोनों सूइयाँ विपरीत दिशा में हों अर्थात् इनके बीच 30 मिनट-अंतराल की दूरी हो।

8 बजे, इनके बीच 40 मिनट अंतराल की दूरी है, इसलिए परस्पर विपरीत दिशा में होने के लिए मिनट की सूई को घंटा की सूई की तुलना में 10 मिनट-अंतराल की दूरी तय करनी होगी।

10 समय-अंतराल की दूरी तय करने में लगा समय = $\frac{60}{55} \times 10 = 10\frac{10}{11}$ मिनट

∴ घड़ी की दोनों सूइयाँ 8 बजकर $10\frac{10}{11}$ मिनट पर विपरीत दिशा में होंगी।

दूसरी स्थिति: जब ये दोनों सूइयाँ एक-दूसरे को ढँक लेती हैं अर्थात् जब उनके बीच 0° मिनट-अंतराल की दूरी होती है।

(उदा. 1 देखें)

द्रुत विधि (Quicker Method): *पहली स्थिति:*

x एवं $(x+1)$ बजे के बीच घड़ी की सूइयाँ एक-दूसरे की विपरीत दिशा में होती हैं,

x बजकर $(5x - 30) \times \frac{12}{11}$ मिनट पर।

दूसरी स्थिति: उदा. 1 की तरह

उदा. 4: 4 एवं 5 बजे के बीच किस समय घड़ी की दोनों सूइयों के बीच 3 मिनट का अंतराल होता है ?

हल: 4 बजे, दोनों सूइयों में 20 मिनट अंतराल का फासला होता है

पहली स्थिति: जब मिनट की सूई, घंटा की सूई से 2 मिनट पीछे है: ऐसी स्थिति में मिनट की सूई को (20 − 2) = 18 मिनट-अंतराल की दूरी तय करनी होगी। हम जानते हैं कि

18 मिनट-अंतराल तय करने में लगा समय = $\frac{60}{55} \times 18 = \frac{216}{11} = 19\frac{7}{11}$ मिनट

yoursmanbob

इसलिए 4 बजकर $19\frac{7}{11}$ मिनट पर ये सूइयाँ एक दूसरे से दो मिनट–अंतराल अलग होंगी।

दूसरी स्थिति: जब मिनट की सुई घंटा की सुई से 2 मिनट–अंतराल आगे है: इस स्थिति में मिनट की सुई को (20 + 2) = 22 मिनट अंतराल की दूरी तय करनी पड़ेगी।

22 मिनट अंतराल की दूरी तय करने में लगा समय = $\frac{60}{55} \times 22 = 24$ मिनट

अर्थात् 4 बजकर 24 मिनट पर घड़ी की दोनों सूइयाँ 2 मिनट की दूरी पर होंगी।

***द्रुत विधि* (Quicker Method):**

x एवं $(x-1)$ बजे के बीच घड़ी की दोनों सूइयाँ 2 मिनट की दूरी पर होंगी, x बजकर

$(5x+1)\times\frac{12}{11}$ मिनट पर:

उपर्युक्त प्रश्न के संदर्भ में,

$$(5\times x+2)\times\frac{12}{11}=\frac{18\times 12}{11}$$

या $\frac{22\times 12}{11} = 19\frac{7}{11}$ या 24 मिनट

अर्थात् घड़ी की दोनों सूइयाँ 4 बजकर $19\frac{7}{11}$ मिनट पर या 4 बजकर 24 मिनट पर एक दूसरे से 2 मिनट की दूरी पर होंगी।

उदा. 5: 4 बजे प्रातः किसी घड़ी का समय मिलाया जाता है। यह घड़ी 24 घंटे में 20 मिनट धीमी हो जाती है। चौथे दिन, यदि इस घड़ी में सुबह के 3 बज रहे होंगे तो सही समय क्या होगा?

हल: 4 बजे प्रातः से तीसरे दिन 3 बजे प्रातः तक कुल मिलाकर $(24\times 3 - 1) = 71$ घंटे

अब, दी गई घड़ी का 23 घंटे 40 मिनट = सही घड़ी के 24 घंटे

या, $23\frac{2}{3} = \frac{71}{3}$ घंटे इस घड़ी के = सही घड़ी के 24 घंटे

$\therefore$ इस घड़ी के 71 घंटे $\frac{24\times 3\times 71}{71}$ सही घड़ी के 72 घंटे

$\therefore$ सही समय = 3 बजे प्रातः + (72 − 71) = 4 बजे प्रातः

उदा. 6: किसी घड़ी में प्रातः के 8.0 बजे समय मिलाया जाता है। यह घड़ी 24 घंटे में 10 मिनट तेज हो जाती है। अगले दिन, जब इस घड़ी में अपराह्न के 1 बजता है तो सही समय क्या होगा?

हल: आज के प्रातः 8 बजे से कल के अपराह्न 1 बजे तक का समय = 29 घंटे

इस घड़ी के 24 घंटे 10 मिनट = सही घड़ी के 24 घंटे

yoursmahboob

या, इस घड़ी के $\frac{145}{6}$ घंटे = सही घड़ी के 24 घंटे

$\therefore$ इस घड़ी के 29 घंटे = $\frac{24 \times 6 \times 29}{145}$ घंटे सही घड़ी के

= सही घड़ी के 24 घंटे 48 मिनट

$\therefore$ सही समय = 1 बजे अपराह्न से 29 − 28 घंटा 48 मिनट पहले

= 1 बजे अपराह्न से 12 मिनट पूर्व

= 12 बजकर 48 मिनट

नोट: उपर्युक्त दोनों उदाहरणों के लिए भी सूत्र हैं, पर वे जटिल एवं भ्रामक (Complicated and Confusing) हैं इसलिए आपको सुझाव दिया जाता है कि विस्तृत विधि को अच्छी तरह समझ लें एवं शीघ्र के चरणों को छोड़कर आगे बढ़ने की कोशिश करें।

उदा. 7: घड़ी की बड़ी सूई छोटी सूई को सही समय के अनुसार 63 मिनट में पार कर जाती है। घड़ी 24 घंटे में कितनी तेज या धीमी हो जाती है ?

हल: किसी सही घड़ी में, मिनट की सूई 60 मिनट में घंटे की सूई की अपेक्षा 55 मिनट अंतराल आगे बढ़ जाती है। फिर से साथ होने के लिए, मिनट की सूई को घंटे की सूई की अपेक्षा 60 मिनट अंतराल की ज्यादा दूरी तय करनी पड़ेगी।

60 मिनट-अंतराल पूरा करने में लगा समय = $\frac{60}{55} \times 60 = 65\frac{5}{11}$ मिनट

पर, ये सुइयाँ 63 मिनट बाद पुनः साथ हो लेती हैं।

$\therefore$ 63 मिनट में तय किया गया समय अंतराल = $65\frac{5}{11} - 63 = 2\frac{5}{11} = \frac{27}{11}$ मिनट

$\therefore$ 24 घंटे में तय किया गया समय अंतराल = $\frac{27 \times 60 \times 24}{11 \times 63} = 56\frac{8}{77}$ मिनट

द्रुत विधि (Quicker Method):

24 घंटे में घड़ी का तेज या धीमी होना

$$= \left[\frac{720}{11} - \text{मिनट में दिया गया अंतराल}\right] \times \frac{60 \times 24}{\text{मिनट में दिया गया अंतराल}}$$

(चिह्न के धनात्मक या ऋणात्मक होने के अनुसार) दिए गए प्रश्न के संदर्भ में,

$$\left[\frac{720}{11} - 63\right] \times \frac{60 \times 24}{63} \text{ मिनट} = \frac{27}{11} \times \frac{60 \times 24}{63} \text{ मिनट} = 56\frac{8}{77} \text{ मिनट}$$

चूँकि चिह्न धनात्मक है, इसलिए घड़ी 24 घंटे के दौरान $56\frac{8}{77}$ मिनट तेज हो जाती है।

yourshaboob

उदा. 8: कोई घड़ी धीरे-धीरे एक समान रफ्तार से लेट होती है। देखा गया कि वही रविवार की रात 12 बजे 5 मिनट धीमी चल रही थी। शुक्रवार की शाम 6 बजे यह घड़ी 5 मिनट 48 सेकेंड लेट पाई गई। इस घड़ी में सही समय कितने बजे था ?

हल: रविवार की रात 12 बजे से शुक्रवार की शाम 6 बजे तक का समय = 90 घंटे

इतने समय में घड़ी $\left[5+5\frac{4}{5}\right]-\frac{54}{5}$ मिनट का अतिरिक्त समयांतराल तय करती है।

∴ घड़ी के कुल 5 मिनट की अतिरिक्त दूरी तय करने में लगा वक्त = $\frac{90\times5\times5}{54}=\frac{125}{3}$ घंटा

$= 41\frac{2}{3}$ घंटा = 41 घंटे 40 मिनट = 1 दिन 17 घंटे 40 मिनट

इसलिए घड़ी रविवार को प्रातः 5:40 बजे सही समय बता रही थी।

उदा. 9: 5 बजकर 25 मिनट पर घड़ी की दोनों सुइयों के बीच कितने डिग्री का कोण होता है ?

हल: 5 बजकर 25 मिनट पर, मिनट की सुई ठीक 5 पर होती है और घंटे की सुई 5 से थोड़ा आगे। घंटे की सुई 60 मिनट में 30° के कोण से घूम जाती है।

∴ 60 मि. की सुई 25 मिनट में $\frac{30}{60}\times25=12\frac{1}{2}$ डिग्री के कोण से घूमेगी।

∴ दोनों सुइयों के बीच का कोण = 12.5°

∴ **विधि (Quicker Method):**

60 सुइयों के बीच का कोण = $\left|30\times5-\frac{11\times25}{5}\text{ का अंतर}\right|=\frac{25}{2}$

दिए गए प्रश्न में,

$$30\times\left|5\text{ और }\frac{25}{5}\text{ का अंतर}\right|=\frac{25}{2}\Rightarrow30\times0-12.5=12.5^\circ$$

उदा. 10: 5 बजकर 15 मिनट पर घड़ी की दोनों सुइयों के बीच कितने डिग्री का कोण होगा ?

हल: **द्रुत विधि (Quicker Method):**

$$\text{कोण}=30\left[5\text{ और }\frac{15}{5}\text{ का अंतर}\right]+\frac{15}{2}=30\times2-\frac{15}{2}=67.5^\circ$$

उदा. 11: 8 बजकर 55 मिनट पर घड़ी की दोनों सुइयों के बीच कितने डिग्री का कोण होगा ?

हल: उपर्युक्त सूत्र से,

$$\text{कोण}=30\left[8\text{ और }\frac{55}{5}\text{ का अंतर}\right]+\frac{55}{2}=117.5^\circ$$

पर यह सही नहीं है। यदि हम सावधानीपूर्वक देखें तो पाएँगे कि कोण 90° से कम होना चाहिए। दिए गए प्रश्न में, सूत्र में अंतर 3 आता है और यह गलत है।

yoursmahboob

कोण $= 30\left[8 \text{ और } \frac{55}{5} \text{ का अंतर}\right] - \frac{55}{2} = 30(3) - 27.5 = 62.5°$

नोट: दोनों प्रकार के सूत्र, दो विभिन्न स्थितियों में काम करता है।

(1) जब घंटे की सुई मिनट की सुई से आगे हो (अर्थात् यदि मिनट की सुई 4 पर हो और घंटे की सुई के बीच हो अर्थात् 4–5, 5–6, 6–7, ... आदि के बीच हो) तो हम निम्नलिखित सूत्र का प्रयोग करते हैं:

$$\text{कोण} = 30\left[\text{घंटा एवं } \frac{\text{मिनट}}{5} \text{ का अंतर}\right] + \frac{\text{मिनट}}{2}$$

(2) जब घंटे की सुई मिनट की सुई के पीछे हो,

$$\text{तो कोण} = 30\left[\text{घंटा एवं } \frac{\text{मिनट}}{5} \text{ का अंतर}\right] - \frac{\text{मिनट}}{2}$$

अभ्यास प्रश्न

1. 3 एवं 4 बजे के बीच किस समय दोनों सुइयाँ एक दूसरे को ढँक लेंगी ?
2. 5 एवं 6 बजे के बीच कितने बजे दोनों सूइयों के बीच की दूरी 3 मिनट होगी ?
3. 4 एवं 5 बजे के बीच किस समय घड़ी की सुइयाँ आपस में समकोण बनाएँगी ?
4. मिनट की सुई 65 मिनट में घंटे की सुई को पार कर लेती है। घड़ी एक दिन में कितनी तेज या कितनी धीमी हो जाती है?
5. एक घड़ी सामान्य रफ्तार से तेज होती है। रविवार की सुबह 8 बजे यह घड़ी 5 मिनट धीमी है और अगले रविवार की शाम 8 बजे तक यही घड़ी 5 मिनट 45 सेकेंड तेज हो जाती है। किस समय यह घड़ी सही समय दिखा रही थी ?
6. 4 एवं 5 बजे के बीच किस समय घड़ी की दोनों सुइयाँ परस्पर विपरीत दिशा में होंगी?
7. 9 एवं 10 बजे के बीच किस समय घड़ी की दोनों सुइयाँ एक दूसरे को ढँक लेंगी?
8. कोई घड़ी प्रतिदिन कितनी तेज या धीमी हो जाती है यदि इसकी दोनों सूइयाँ 64 मिनट में एक बार एक दूसरे को ढँक लेती हों?
9. 5 बजकर 15 मिनट पर घड़ी की दोनों सुइयों के बीच कितने डिग्री का कोण होगा ?
10. 12 घंटे में कितनी बार घड़ी की दोनों सुइयाँ एक दूसरे की विपरीत दिशा में एकरेखीय हो जाती हैं?
11. एक दिन में कितनी बार घड़ी की दोनों सुइयों के बीच समकोण की स्थिति होती है ?
12. एक दिन में कितनी बार घड़ी की दोनों सुइयाँ एक सरल रेखा में हो जाती हैं ?

उत्तर

1. **द्रुत विधि से (By Quicker Method):**

3 बजकर $5 \times 3\left[\frac{12}{11}\right]$ मिनट = 3 बजकर $16\frac{4}{11}$ मिनट

yoursmabboob

2. **द्रुत विधि से (By Quicker Method):**

5 बजकर $(5\times5+3)\frac{12}{11}$ मिनट = 5 बजकर 24 मिनट एवं 5 बजकर $30\frac{6}{11}$ मिनट

3. उदा. 2 देखें

4. **द्रुत विधि से (By Quicker Method):**

$$\left[\frac{720}{11}-65\right]\frac{60\times24}{65}=10\frac{10}{143}\text{ मिनट}$$

5. दिए गए अंतराल के बीच का समय = 180 घंटे

चूंकि, 180 घंटे में $5+5\frac{4}{5}=\frac{54}{5}$ मिनट भरपाई करती है।

$\therefore$ 5 मिनट भरपाई करने में लगा समय = $\frac{180\times5}{54}\times5=83$ घंटा 20 मिनट

= 3 दिन 11 घंटा 20 मिनट

$\therefore$ घड़ी बुधवार को शाम 7 बजकर 20 मिनट पर सही समय बता रही थी।

6. **द्रुत विधि से (By Quicker Method):**

4 बजकर $(5\times4+30)\frac{12}{11}$ मिनट = 4 बजकर $54\frac{12}{11}$ मिनट

नोट: हल किए गए उदाहरणों में सूत्र का जिस रूप में इस्तेमाल किया गया है, हमने उस रूप में इस्तेमाल नहीं किया। उस स्थिति में,

$(5\times4-30)\frac{12}{11}$ से ऋणात्मक मान प्राप्त होता है। ऋणात्मक मान से हम निरर्थक नतीजे तक पहुँचते हैं।

7. उत्तर: 9 बजकर $49\frac{1}{11}$ मिनट (हल किया गया उदा.–1 देखें)

8. उत्तर: $32\frac{8}{11}$ मिनट (हल किया गया उदा. 2 देखें)

9. उत्तर: 67.5° (हल किया गया उदा.–10 देखें)

10. किसी घड़ी की दोनों सूइयाँ 12 घंटे के दौरान 11 बार एक दूसरे की विपरीत दिशा में हो जाती हैं। (क्योंकि 5 एवं 7 के बीच, केवल 6 बजे एक दूसरे के विपरीत दिशा में होती हैं)

11. 12 घंटे के दौरान घड़ी की दोनों सूइयाँ 22 बार समकोण बनाती हैं (क्योंकि दो स्थितियाँ 3 बजे एवं 9 बजे उपलब्ध हैं)। इसलिए दिन भर में 44 बार ये सूइयाँ आपस में समकोण बनाती हैं।

12. घड़ी की सूइयाँ दिन भर में 44 बार (22 + 22) एक दूसरे को ढँक लेती हैं या एक दूसरे की विपरीत दिशा में हो जाती हैं।

yoursmahboob

लघुगणक
(Logarithm)

परिचय: हमलोग सामान्य घातांक तादात्म्य (exponential identity) $a^x = b$ से परिचित हैं। यहाँ 'a' को आधार (base) कहा जाता है, x को घात (exponent) एवं b को परिणाम (result) कहा जाता है।

अब, जैसे $\sqrt{4} = 2$, जो कि $2 \times 2 = 4$ लिखने का दूसरा तरीका है, उसी तरह हम कह सकते हैं

$$\log_a b = x$$

यह $a^x = b$ लिखने का दूसरा तरीका है,

इस प्रकार log, logarithm या लघुगणक घातांक तादात्म्य को व्यक्त करने का दूसरा तरीका है तथा निम्नलिखित दो व्यंजक पूरी तरह समतुल्य माने जाते हैं।

$$a^x = b \Leftrightarrow \log_a b = x$$

$\log_a b$ को प्रायः a आधार पर b का लघुगणक (log of b to the base a) कहा जाता है।

आमतौर से लघुगणक का आधार 10 लिया जाता है और यह आधार इतना लोकप्रिय है कि प्रायः इसे लिखने की भी जरूरत नहीं समझी जाती।

इस प्रकार log b से तात्पर्य है $\log_{10} b$। अर्थात् यदि कोई आधार नहीं दिया गया हो तो इसे 10 मान लिया जाता है।

लघुगणक के आधारभूत नियम

I. $\log(xy) = \log(x) + \log(y)$

II. $\log\left(\frac{x}{y}\right) = \log(x) - \log(y)$

III. $\log\left(x^a\right) = a\log(x)$

नीचे कुछ उदाहरण प्रस्तुत किए जा रहे हैं ताकि आप घातांक और उसके समतुल्य तादात्म्य के बीच के संबंध को अच्छी तरह समझ सकें।

घातांक तादात्म्य	*लघुगणक तादात्म्य*
$a^x = b$	$\log_a b = x$
$2^3 = 8$	$\log_2 8 = 3$
$2^{-2} = \frac{1}{4}$	$\log_2\left(\frac{1}{4}\right) = -2$

yoursmahboob

$3^4 = 81$	$\log_3(81) = 4$
$5^{-3} = 0.008$	$\log_5(0.008) = -3$
$5^{-3} = \frac{1}{125}$	$\log_5\left(\frac{1}{125}\right) = -3$
$8^{1/3} = 2$	$\log_8(2) = \frac{1}{3}$
$4^{1/2} = 2$	$\log_4(2) = \frac{1}{2}$
$16^{1/4} = 2$	$\log_{16}(2) = \frac{1}{4}$
$10^4 = 10000$	$\log_{10}(10000) = 4$
$10^{-3} = \frac{1}{1000}$	$\log_{10}\left(\frac{1}{1000}\right) = -3$
$10^{-2} = 0.01$	$\log_{10}(0.01) = -2$

नीचे कुछ उदाहरण दिए जा रहे हैं, जिनकी सहायता लघुगणक की क्रियाओं को सुगमता पूर्वक समझा जा सकता है :

1. $\log(6) = \log(2 \times 3) = \log(2) + \log(3)$
2. $\log(72) = \log(2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3) = \log\left(2^3 \times 3^2\right) = \log 2^3 + \log 3^2$
   $= 3\log 2 + 2\log 3$
3. $\log(30) = \log(2 \times 3 \times 5) = \log 2 + \log 3 + \log 5$
4. $\log(7) = \log(14 \div 2) = \log 14 - \log 2$
5. $\log 10 = 1$
6. $\log 100 = \log(10)^2 = 2\log 10 = 2$
7. $\log(20) = \log\left(\frac{100}{5}\right)$

   या, $\log(20) = \log 100 - \log 5 = \log 10^2 - \log 5 = 2\log 10 - \log 5$
8. $\log\left(\frac{1}{8}\right) = \log(2)^{-3} = -3\log 2$
9. $\log\left(\frac{1}{27}\right) = \log(3)^{-3} = -3\log 3$

yourmahboob

10. $\log(280) = \log(2\times2\times2\times5\times7) = \log(2^3\times5\times7) = 3\log2 + \log5 + \log7$

या, $\log(280) = \log(10\times7\times4) = \log10 + \log4 + \log7$

$= 1 + \log4 + \log7$

11. $\log(50) = \log\left(\frac{100}{2}\right) = \log100 - \log2 = 2\log10 - \log2 = 2 - \log2$

12. $\log(75) = \log\left(\frac{225}{3}\right) = \log(225) - \log3 = \log(15)^2 - \log3 = 2\log15 - \log3$

या, $\log(75) = \log(5^2\times3) = 2\log5 - \log3$

13. $\log(300) = \log\left(\frac{6^2\times5^2}{3}\right) = \log6^2 + \log5^2 - \log3$

$= 2\log6 + 2\log5 - \log3$

$= 2\log(2\times3) + 2\log5 - \log3$

$= 2\log2 + 2\log3 + 2\log5 - \log3$

$= 2\log2 + \log3 + 2\log5$

14. $\log\left(\frac{1}{32}\right) = \log(2^{-5}) = -5\log2$

या, $\log\left(\frac{1}{32}\right) = \log1 - \log32 = \log1 - \log(2^5) = 0 - 5\log2$

$= -5\log2$ (As $\log1 = 0$)

लघुगणक की कुछ अन्य विशेषताएँ

1. चूँकि $a^1 = a$ को $\log_a a = 1$ लिखा जाता है

तथा $b^1 = b$ को $\log_b b = 1$ लिखा जाता है

$\therefore \log_a a = \log_b b = 1$

उदा. निम्नलिखित में से कौन $\log_7 7$ के बराबर है ?

1) $\log_7(7^0)$ 2) $\log_7(8)$ 3) $\log7$ 4) $\log_{10}(13)$ 5) इनमें से कोई नहीं

हल: 4) $\log_{10}(13)$

अन्य राशियों के मान हैं

$\log_7(7^0) = \log_7 1 = 0$

$\log_7(8) = \log_7(2^3) = 3\log_7 2$

$\log7 = \log_{10}7$ (चूँकि आधार को लिखा नहीं गया है)

2. चूँकि $a^0 = 1$ को $\log_a 1 = 0$ लिखा जाता है

तथा $b^0 = 1$ को $\log_b 1 = 0$ लिखा जाता है

$\therefore \log_a 1 = \log_b 1$

yoursmahboob

3. $\log_b a = \dfrac{1}{\log_a b}$

प्रमाण: मान लिया कि $\log_b a = x \Rightarrow b^x = a \Rightarrow b = a^{\frac{1}{x}}$ अब $b = a^{\frac{1}{x}}$ को लघुगणक के रूप में व्यक्त करने पर,

$$\log_a b = \frac{1}{x} = \frac{1}{\log_b a}$$

या, $\log_b a = \dfrac{1}{\log_a (b)}$

उदा. $\log_3 5 = \dfrac{1}{\log_5 3}$

4. $a^{\log_a n} = n$

प्रमाण: मान लिया कि $x = a^{\log_a n}$

उपर्युक्त घातांक तादात्म्य को लघुगणक के रूप में व्यक्त करने पर,

$\log_a(x) = \log_a(n)$

$\therefore x = n$

या, $a^{\log_a n} = n$

5. $\log_{n^y}(n^x) = \dfrac{x}{y}$

प्रमाण: मान लिया कि $\log_{n^y}(n^x) = z$

$\Rightarrow (n^y)^z = n^x$

$\Rightarrow n^{yz} = n^x \Rightarrow yz = x$

$\therefore z = \dfrac{x}{y}$

$\therefore \log_{n^y}(n^x) = \dfrac{x}{y}$

कुछ हल किए गए उदाहरण

उदा. 1: यदि $\log_3 a = 4$ तो a का मान निकालें।

हल: $\log_3 a = 4 \Rightarrow 3^4 = a$

$\therefore a = 81$

उदा. 2: $2^{\log_2 5}$ का मान निकालें

yoursmahboob

हल: मान लिया कि $2^{\log_2 5} = x$

$\therefore \log_2(x) = \log_2 5$

$\Rightarrow x = 5$

$\therefore 2\log_2 5 = 5$

नोट: यदि कोष्ठक गुण राशि (4) बाद में तो सीधे उत्तर तक भी पहुँचा जा सकता है।

उदा. 3: $3^{2-\log_3 5}$ का मान ज्ञात करें।

हल: $3^{2-\log_3 5} = 3^2 \times 5^{-1}$ (गुण संख्या (4) से) $= \frac{9}{5}$

उदा. 4: $\log_{25} 125 \cdot \log_8 4$ का मान निकालें।

हल: $\log_{25} 125 \quad \log_8 4$

$\log_{5^2} 2(5^3) \cdot \log_{2^3} 3(2^3) = \frac{3}{2} \quad \frac{2}{3}$ (गुण संख्या 5 से) $= \frac{5}{6}$

उदा. 5: यदि $\log x = \log 5 + 2\log 3 - \frac{1}{2}\log 25$ तो x का मान निकालें।

हल: $\log x = \log 5 + 2\log 3 - \frac{1}{2}\log 25$

$= \log 5 + \log 3^2 - \log(25)^{1/2}$

$= \log 5 + \log 9 - \log 5 - \log 9$

$\therefore x = 9$

उदा. 6: यदि $\log_3[\log_4(\log_2 x)] = 0$ तो x का मान बताएँ।

हल: $\log_3[\log_4(\log_2 x)] = \log_3 1$ (As, $\log_3 1 = 0$)

या, $\log_4(\log_2 x) = 1$

या, $4^1 = \log_2 x$

या, $\log_2 x = 4$

या, $2^4 = x \quad \therefore x = 16$

उदा. 7: यदि $\log_{10} m = b - \log_{10} n$ तो m का मान निकालें।

हल: यहाँ, $\log_{10} m = b \quad \log_{10} n$

$\Rightarrow \log_{10} m + \log_{10} n = b$

$\Rightarrow \log_{10}(m \times n) = b$

$\Rightarrow 10^b = mn$

$\therefore m = \frac{10^b}{n}$

yoursmahboob

उदा. 8: यदि $\log 8 = 0.9031$ एवं $\log 9 = 0.9542$ तो $\log 6$ का मान निकालें।

हल: $\log 8 = \log(2)^3 = 3\log 2$

$\therefore 3\log 2 = 0.9031$

$\therefore \log 2 = \frac{0.9031}{3} = 0.3010$

अब, $\log 9 = \log(3)^2 = 2\log 3$

$\therefore 2\log 3 = 0.9542$

$\therefore \log 3 = 0.4771$

फिर, $\log 6 = \log(2 \times 3) = \log 2 + \log 3 = 0.3010 + 0.4771 = 0.7781$

उदा. 9: प्रमाणित करें कि $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$

हल: मान लिया कि $\frac{\log_b x}{\log_b a} = y$

या, $\log_b x = y\log_b a$

या, $\log_b x = \log_b(a^y)$

$x = a^y$

$\log_a(x) = \log_a(a^y) = y = \frac{\log_b x}{\log_b a}$

नोट: उपर्युक्त तादात्म्य को लघुगणक की एक महत्वपूर्ण विशेषता के रूप में स्वीकार किया जाता है। इसलिए इसे याद रखें।

उदा. 10: यदि $\log 2 = 0.3010$ एवं $\log 3 = 0.4771$ तो x का कौन सा मान समीकरण $3^{x+3} = 135$ (लगभग) को संतुष्ट करता है।

हल: दिया गया है कि $3^{x+3} = 135$

या, $3^x \times 3^3 = 135$

$\therefore 3^x = \frac{135}{27} = 5$

$\Rightarrow \log_3 5 = x$

$\rightarrow \frac{\log_{10} 5}{\log_{10} 3} = x$ (उदा.-9 में दी गई विशेषता के आधार पर)

$\Rightarrow \frac{\log_{10}(10 \div 2)}{\log_{10} 3} = x$

$\rightarrow \frac{\log 10 - \log_{10} 2}{\log_{10} 3} = x \quad \Rightarrow \frac{1 - 0.3010}{0.4771} = x \quad \therefore x \approx 1.5$ (लगभग)

yoursmahboob

अभ्यास प्रश्न

1. $16^{\log_4 5} = ?$

1) 5 2) 16 3) 25 4) 30 5) इनमें से कोई नहीं

2. $\log_{10}(.0001) = ?$

1) 2 2) 1 3) 0 4) −4 5) इनमें से कोई नहीं

3. $\log_5 5\{\log_5 25 + \log_5 125\} = ?$

1) 2 2) 1 3) 5 4) 4 5) इनमें से कोई नहीं

4. $\log_a a \log_c b \log_b b = ?$

1) 0 2) log(abc) 3) 1 4) 10 5) इनमें से कोई नहीं

5. यदि $a^x = b$, $b^y = c$ एवं $c^z = a$ तो xyz का मान है

1) 0 2) 1 3) 2 4) 3 5) इनमें से कोई नहीं

6. समीकरण $\log_a x + \log_a(1 + x) = 0$ को लिखा जा सकता है

1) $x^2 + x - 1 = 0$ 2) $x^2 + x + 1 = 0$ 3) $x^2 + x - a = 0$

4) $x^2 + x + a = 0$ 5) इनमें से कोई नहीं

7. $\log_2 7$ कैसी संख्या है?

1) पूर्णांक 2) परिमेय 3) अपरिमेय 4) रूढ़ 5) इनमें से कोई नहीं

8. $\log 8 + \log_8 \frac{8}{8}$ का मान बताएँ।

1) 0 2) 1 3) 2 4) log64 5) इनमें से कोई नहीं

9. $[\log_{10}(5\log_{10} 100)]^2$ का मान बताएँ।

1) 0 2) 1 3) 2 4) 4 5) 10

10. $\log\left(\frac{a^2}{bc}\right) + \log\left(\frac{b^2}{ac}\right) + \log\left(\frac{c^2}{ab}\right)$ का मान है

1) 1 2) 0 3) abc 4) $a^2b^2c^2$ 5) इनमें से कोई नहीं

11. $\log\frac{9}{8} - \log\frac{27}{32} + \log\frac{3}{4}$ का मान है

1) 0 2) 1 3) 2 4) 3 5) 4

12. $\log_2 3 \times \log_3 2 \times \log_4 4 \times \log_4 3$ का मान है

1) 1 2) 2 3) 3 4) 4 5) इनमें से कोई नहीं

13. $2^{2+\log_2 5}$ का मान है

1) 2 2) 4 3) 10 4) 20 5) इनमें से कोई नहीं

14. यदि $\log_8 x + \log_4 x + \log_2 x = 11$ तो x का मान है

1) 2 2) 4 3) 8 4) 64 5) इनमें से कोई नहीं

yoursmanboob

15. यदि $\log_5[\log_3(\log_3 x)]=0$ तो x का मान है

1) 30 2) 9 3) 21 4) 1 5) इनमें से कोई नहीं

16. $\log_4 8 \times \log_8 4$ का मान है

1) 0 2) 1 3) 4 4) 8 5) इनमें से कोई नहीं

17. $\frac{\log_a x}{\log_{ab} x}$ $\log_a b$ का मान है

1) 0 2) 1 3) a 4) ab 5) इनमें से कोई नहीं

18. आधार $2\sqrt{3}$ पर 2828 का लघुगणक है

1) 2 2) 4 3) 6 4) 8 5) इनमें से कोई नहीं

19. $\log_a \sqrt{3} = \frac{1}{6}$ तो a का मान निकालें।

1) 9 2) 27 3) 18 4) 3 5) 1

20. $3^{2+\log_3 5}$ का मान है

1) 20 2) 30 3) 45 4) 50 5) इनमें से कोई नहीं

उत्तर

1. 3; $16^{\log_4 5}=x$

या, $4^{2\log_4 5}=x$

या, $4^{\log_4 25}=x$

या, $\log_4(x)=\log_4(25)$

$\therefore x=25$

2. 4, $\log_{10}(0.0001)=\log_{10}(10^{-4})=-4\log_{10}10=-4\times 1=-4$

3. 1; $\log_5 5\{\log_5 25\times 125\}=\log_5 5\{5\log_5 5\}=\log_5 5^2=2\log_5 5=2$

4. 1; $\log_b a\times\log_c b\times\log_a c$

$$=\frac{\log_c a}{\log_c b}\times\log_c b\times\log_a c\left[\text{चूँकि, } \log_z y=\frac{\log_x y}{\log_x z}\right]$$

$$=\log_c a\times\log_a c=1\left[\text{चूँकि, } \log_c a=\frac{1}{\log_a c}\right]$$

5. 2; $a^x=b\Rightarrow\log_a b=x$

$b^y=c\Rightarrow\log_b c=y$

$c^z=a\Rightarrow\log_c a=z$

yoursmahboob

$\therefore x \times y \times z = \log_a b \times \log_b c \times \log_c a = 1$ (प्रश्न-4 से)

6. 4; $\log_a x + \log_a(1+x) = 0$

$\Rightarrow \log_a x(1+x) = \log_a 1$ (चूँकि $\log 1 = 0$)

$\Rightarrow x(1+x) = 1$

$\Rightarrow x^2 + x - 1 = 0$

7. 3; यदि संभव है तो मान लिया जाए कि $\log_2 7$ एक परिमेय संख्या है। मान लिया कि $\log_2 7 = \frac{p}{q}$ जहाँ p एवं q पूर्णांक हैं तथा परस्पर रूढ़ है।

तब, $p/q = \log_2 7 \Rightarrow 7 = 2^{p/q} \Rightarrow 2^p = 7^q$, जो कि गलत है क्योंकि बाएँ पक्ष (LHS) सम संख्या है और दाएँ पक्ष (RHS) एक विषम संख्या है.

$\log_2 7$ पूर्णांक संख्या नहीं है, इसलिए इसे रूढ़ संख्या भी नहीं कहा जा सकता है।

8. 1; $\log 8 + \log\left(\frac{1}{8}\right) = \log\left(8 \times \frac{1}{8}\right) = \log 1 = 0$

9. 2; $[\log_{10}(5\log_{10} 10^2)]^2 - [\log_{10}(10)]^2 = (1)^2 = 0$

10. 2; प्रदत्त व्यंजक = $\log\left(\frac{a^2b^2c^2}{a^2b^2c^2}\right) = \log 1 = 0$

11. 1; प्रदत्त व्यंजक = $\log\left(\frac{9}{8} + \frac{27}{32} \times \frac{3}{4}\right) = \log\left(\frac{9}{8} \times \frac{3}{4} \times \frac{32}{27}\right) = \log 1 = 0$

12. 1; प्रदत्त व्यंजक = $\log_2 3 \times \frac{1}{\log_2 3} \times \log_3 4 \times \frac{1}{\log_4 3} = 1 \times 1 = 1$

13. 4; मान लिया कि $2^{2-\log_2 5} = x$

$\Rightarrow \log_2 x = 2 - \log_2 5$

$\Rightarrow \log_2 x = 2\log_2 2 + \log_2 5$

$\Rightarrow \log_2 x = \log_2 4 + \log_2 5$

$\Rightarrow \log_2 x = \log_2(4 \times 5) = \log_2 20$

$\therefore x = 20$

14. 5; दिया गया है कि $\log_3 3x - \log_2 2x + \log_2 x = 11$

$\Rightarrow \frac{1}{3}\log_3 x + \frac{1}{2}\log_2 x + \log_2 x = 11$

yoursmahboob

$\Rightarrow \frac{11}{6}\log_2 x = 11$

$\Rightarrow \log_2 x = 11 \times \frac{6}{11} = 6$

$\therefore 2^6 = x = 128$

15. $\log_5[\log_2(\log_3 x)] = 0$

$\Rightarrow \log_2(\log_3 x) = 1 = \log_2 2$

$\therefore \log_3 x = 2$

$\therefore x = 3^2$

या, $x = 9$

16. 2; प्रदत्त व्यंजक = $\log_4 8 \times \frac{1}{\log_1 8} = 1$

17. 2; दिया गया है कि $\log_a x = \frac{\log_{ab} x}{\log_{ab} a}$

$\therefore$ प्रदत्त व्यंजक $= \frac{1}{\log_{ab} a} = \log_a b$

$= \log_a ab - \log_a b = \log_a \frac{ab}{b} = \log_a a = 1$

18. 2; $144 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times \sqrt{3} \times \sqrt{3} \times \sqrt{3} \times \sqrt{3}$

$= (2)^4 (\sqrt{3})^4 = (2\sqrt{3})^4$

अब, $\log_{2\sqrt{3}} 144 = 4$

19. 2; $\log_a \sqrt{3} = \frac{1}{6}$

$\Rightarrow a^{1/6} = \sqrt{3}$

$\therefore a = (\sqrt{3})^6 = 3^3 = 27$

20. 3; $3^{2+\log_3 5}$ या, $3^2 \times 3^{\log_3 5} = 9 \times 5 = 45$

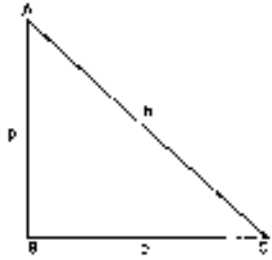
yoursmahboob

त्रिकोणमिति

(Trigonometry)

पाइथागोरस सिद्धांत (Pythagoras Theorem):

एक समकोण त्रिभुज में कर्ण (hypotenuse) का वर्ग, आधार (base) एवं लंब (perpendicular) के वर्गों के योगफल के बराबर होता है

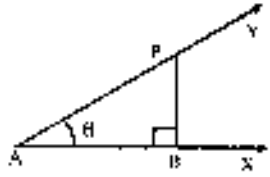


$$h^2 = p^2 + b^2$$

त्रिकोणमितीय अनुपात (Trigonometric Ratios)

एक समकोण त्रिभुज के कोणों के संबंध में भुजाओं का अनुपात त्रिकोणमितीय अनुपात कहलाता है। चित्र में एक न्यूनकोण (acute angle) $\angle YAX$ दिया गया है। जिसका मान θ है। हम AY पर एक बिन्दु P ले सकते हैं तथा AX पर एक लंब (perpendicular) PB डाल सकते हैं। हमें एक समकोण त्रिभुज APAB प्राप्त होता है

जिसका $\angle PAB = \theta$ तो अनुपात $\frac{PB}{AP}$ कोण θ का sine कहलाता है। तथा छोटे रूप में इसे $\sin\theta$ लिखा जाता है।



इस प्रकार, $\sin\theta = \frac{\text{कोण } \theta \text{ के सम्मुख भुजा}}{\text{कर्ण}}$ परंतु आप एक प्रश्न पूछ सकते हैं कि क्या होता है जब हम P को AY पर कहीं और चुनते हैं? यदि हम P को विभिन्न स्थानों पर रखते हैं तो PB एवं AP की लंबाई में परिवर्तन होगा परंतु अनुपात $\frac{PB}{AP}$ हमेशा पूर्ववत ही रहेगा और उसे समरूप त्रिभुजों (similar triangles) की सहायता से साबित किया जा सकता है। हमें इस परिणाम को सत्य मानते हुए याद रखना चाहिए।

yousmahboob

अब हम पुनः समकोण त्रिभुज ΔPBA पर विचार करते हैं जिसमें कोण $PAB = \theta$, हल करते और त्रिकोणमितीय अनुपातों को निम्नलिखित रूप में परिभाषित करते हैं:

$$\cos\theta = \frac{AB}{AP} \text{ एवं } \tan\theta = \frac{PB}{AB}$$

$$\cos\theta = \frac{\text{कोण } \theta \text{ की आसन्न (adjacent) भुजा}}{\text{कर्ण}} \text{ एवं}$$

$$\tan\theta = \frac{\text{कोण } \theta \text{ की सम्मुख भुजा}}{\text{कोण } \theta \text{ की आसन्न भुजा}}$$

कोण θ के तीन और त्रिकोणमितीय अनुपात हैं: *cosecant, secant* एवं *cotangent* जिसे हम निम्नलिखित रूप में परिभाषित करते हैं;

किसी भी न्यूनकोण (acute angle) के लिए,

$$\operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta},\ \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \text{ एवं } \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

यह स्पष्ट है कि किसी कोण θ के 6 त्रिकोणमितीय अनुपातों में से कोई एक भी दिया हुआ हो तो बाकि सभी की गणना की जा सकती है।

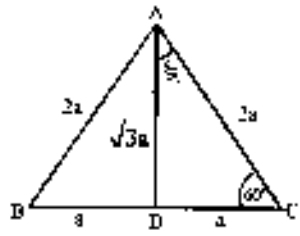
खास कोण का त्रिकोणमितीय अनुपात

हमने किसी न्यूनकोण (acute angle) θ के लिए $\sin\theta$, $\cos\theta$ इत्यादि को परिभाषित किया है परंतु अभी तक हमलोगों ने किसी खास कोण के लिए $\sin\theta$, $\cos\theta$ इत्यादि का मान प्राप्त नहीं किया है। हम कुछ कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपातों का मान निकालने के लिए ज्यामिति का सहारा ले सकते हैं।

30° का त्रिकोणमितीय अनुपात

हम जानते हैं कि समबाहु त्रिभुज (equilateral triangle) का प्रत्येक कोण $60°$ होता है इस प्रकार के त्रिभुज के एक कोण का विभाजक (bisector) दोनों ओर 30° का कोण बनता है।

मान लिया कि ΔABC एक समबाहु त्रिभुज है जिसकी भुजाएँ $2a$ एवं प्रत्येक कोण $60°$ है तथा AD, BC पर एक लंब है।



youtomahboob

चूँकि त्रिभुज एक समबाहु त्रिभुज (equilateral triangle) है, AD कोण A का विभाजक (bisector) है तथा D, BC का मध्य बिन्दु (mid-point) है। अब, $BC = 2a$

इसलिए, $DC = a$ एवं $\angle CAD = 30°$

ΔADC में, $\angle D$ एक समकोण है,

कर्ण $AC = 2a$ एवं $DC = a$

इसलिए, पाइथागोरस सिद्धांत से,

$$AD^2 = AC^2 - DC^2 = (2a)^2 - (a)^2 = 3a^2$$

$$\therefore AD = \sqrt{3}a$$

अब, समकोण त्रिभुज ADC में, $\angle DAC = 30°$

$$\therefore \sin 30° = \frac{\text{सम्मुख भुजा}}{\text{कर्ण}} = \frac{DC}{AC} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2},$$

$$\cos 30° = \frac{\text{आसन्न भुजा}}{\text{कर्ण}} = \frac{AD}{AC} = \frac{\sqrt{3}a}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 30° = \frac{\text{सम्मुख भुजा}}{\text{आसन्न भुजा}} = \frac{CD}{AD} = \frac{a}{\sqrt{3}a} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\operatorname{cosec} 30° = \frac{1}{\sin 30°} = 2, \sec 30° = \frac{1}{\cos 30°} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\cot 30° = \frac{1}{\tan 30°} = \sqrt{3}$$

नोट: यदि एक समकोण त्रिभुज में एक कोण 30° है तो इस कोण की सम्मुख भुजा विकर्ण की आधी होती है।

60° के त्रिकोणमितीय अनुपात

पुनः ΔADC को देखें,

$\angle DAC = 30°$ एवं $\angle ADC = 90°$

$\therefore \angle ACD = 60°$

$\therefore$ समकोण त्रिभुज ADC में, $\angle ACD = 60°$

$$\therefore \sin 60° = \frac{\text{सम्मुख भुजा}}{\text{कर्ण}} = \frac{AD}{AC} = \frac{\sqrt{3}a}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

yoursmahboob

$$\therefore \cos 60^\circ = \frac{\text{आसन्न भुजा}}{\text{कर्ण}} = \frac{DC}{AC} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \tan 60^\circ = \frac{\text{सम्मुख भुजा}}{\text{आसन्न भुजा}} = \frac{AD}{DC} = \frac{\sqrt{3}a}{a} = \sqrt{3}$$

$$\therefore \operatorname{cosec} 60^\circ = \frac{1}{\sin 60^\circ} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore \sec 60^\circ = \frac{1}{\cos 60^\circ} = 2$$

$$\therefore \cot 60^\circ = \frac{1}{\tan 60^\circ} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

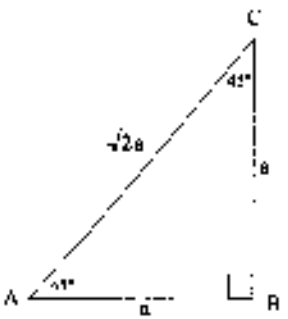
45° का त्रिकोणमितीय अनुपात

यदि एक समकोण त्रिभुज ABC जिसका समकोण $\angle C$ है में, $\angle A = 45^\circ$, तो स्पष्टतः

$\angle A = 45^\circ$

इसलिए $\angle A = \angle B$, फलतः $BC = AC$

माना कि $BC = AC = a$



तो पाइथागोरस सिद्धांत से,

$AB^2 = BC^2 + AC^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$ एवं

इसलिए $AB = \sqrt{2}a$

ΔABC में, $\angle A = 45^\circ$

yoursmahboob

$$\therefore \sin 45^\circ = \frac{\text{सम्मुख भुजा}}{\text{कर्ण}} = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{\sqrt{2}a} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos 45^\circ = \frac{\text{आसन्न भुजा}}{\text{कर्ण}} = \frac{AC}{AB} = \frac{a}{\sqrt{2}a} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\tan 45^\circ = \frac{\text{सम्मुख भुजा}}{\text{आसन्न भुजा}} = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{a} = 1$$

इसलिए, $\operatorname{cosec} 45^\circ = \sqrt{2}$, $\sec 45^\circ = \sqrt{2}$

विभिन्न कोणों का त्रिकोणमितीय अनुपात

θ	sin	cos	tan	cosec	sec	cot
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	2	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	2	$\frac{1}{\sqrt{3}}$

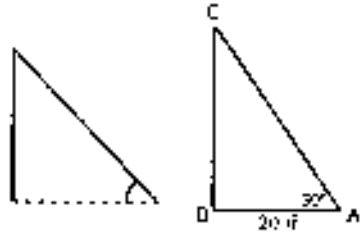
ऊँचाई एवं दूरी (Height and Distance)

अब हमलोग समकोण त्रिभुज पर आधारित प्रश्नों को हल करने के लिए तैयार हैं।

उन्नयन एवं अवनमन कोण (Angle of Elevation and Depression)

मान लिया कि एक पेड़ पर बिना चढ़े हमें उसकी ऊँचाई ज्ञात करनी है। हम जमीन पर पेड़ की जड़ B से कुछ दूरी पर एक बिन्दु पर खड़े हो सकते हैं।

माना कि हम $\angle BAC$ को मान सकते हैं तथा उसका मान 30° प्राप्त होता है।



yoursmahboob

तो हम पेड़ की ऊँचाई BC ज्ञात कर सकते हैं।

$$BC = \frac{20}{\sqrt{3}} = 11.5 \text{ मी. (लगभग)}$$

मान लिया कि हम एक वस्तु को देख रहे हैं वस्तु की दृष्टि रेखा (Line of sight या Line of vision) वह सरल रेखा है जो हमारी आँख से वस्तु को जिसे हम देख रहे हैं, जोड़ती है।

यदि वस्तु आँख की क्षैतिज रेखा से ऊपर हो (अर्थात् वस्तु आँख के स्तर से ऊपर हो) तो हमें वस्तु को देखने के लिए अपने सिर को ऊपर उठाना होगा। इस प्रक्रिया में हमारी आँख एक निश्चित कोण से घूम जाती है। अपनी आँखों द्वारा वस्तु पर ऐसे बनाए गए कोण को वस्तु का उन्नयन कोण (Angle of Elevation) कहते हैं।

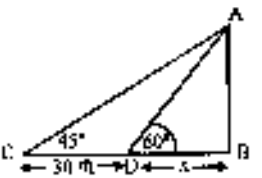
यदि कोई वस्तु आँख की क्षैतिज रेखा से नीचे हो (अर्थात् वस्तु आँख के स्तर से नीचे हो) तो हमें वस्तु को देखने के लिए अपने सिर को नीचे की ओर झुकाना होगा। इस प्रक्रिया में हमारी आँख एक कोण से घूम जाती है। यह कोण अवनमन कोण (Angle of Depression) कहलाता है।

उदा. 1: एक व्यक्ति क्षैतिज समतल पर खड़े ध्वज दण्ड (flag-post) की ऊँचाई जानना चाहता है; समतल पर स्थित किसी बिन्दु से वह ध्वज-दंड के ऊपरी सिरे का उन्नयन कोण (angle of elevation) 45° पाता है। ध्वज-दंड की तरफ 30 मीटर आने पर वह पाता है कि संगत (corresponding) उन्नयन कोण 60° है। ध्वज-दंड की ऊँचाई ज्ञात करें।

1) 62 मी. 2) 82 मी. 3) 71 मी.

4) $30\sqrt{3}$ मी. 5) इनमें से कोई नहीं

हल:



AB = ध्वजदंड की ऊँचाई = x मी.

ΔABD में $\tan 60° = \frac{AB}{BD}$

$\therefore BD = \frac{x}{\sqrt{3}}$ .....(i)

$\tan 45° = \frac{AB}{BD + DC}$

yoursmahboob

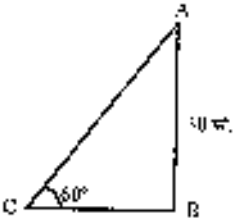
$\therefore \frac{x}{\sqrt{3}} + 30 = x \quad \therefore \frac{x(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{3}} = 30 \quad \therefore x = \frac{30\sqrt{3}}{0.732} \approx 71$ मी.

उदा. 2: एक छोटा लड़का एक ध्वज-दंड (flag-post) से कुछ दूरी पर खड़ा है। जब वह झंडे को देखता है तो उन्नयन कोण (angle of elevation) 60° होता है। यदि ध्वज-दंड की ऊँचाई 30 फीट हो तो बच्चे एवं ध्वज-दंड के बीच की दूरी ज्ञात करें।

1) $15\sqrt{3}$ फीट 2) $10\sqrt{3}$ फीट 3) $\frac{20}{\sqrt{3}}$ फीट

4) $20\sqrt{3}$ फीट 5) इनमें से कोई नहीं

हल:



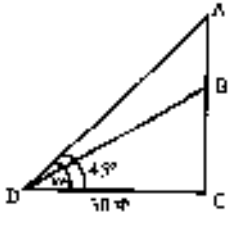
$\frac{AB}{BC} = \tan 60°$ या, $\frac{30}{BC} = \sqrt{3}$ या, $BC = \frac{\sqrt{3} \times \sqrt{3} \times 10}{\sqrt{3}} = 10\sqrt{3}$ फीट

उदा. 3: एक ध्वज-दंड के एक झंडे की ऊपरी सिरा (top) एवं निचली सिरा (bottom) का उन्नयन कोण (angle of elevation) 30 मीटर की दूरी से क्रमशः 45° एवं 30° है। झंडे की ऊँचाई ज्ञात करें।

1) 17.32 मी. 2) 14.32 मी. 3) 12.68 मी.

4) $12\sqrt{3}$ मी. 5) इनमें से कोई नहीं

हल:



$\tan 45° = \frac{AC}{30}$

या, $AC = 30$ मी.

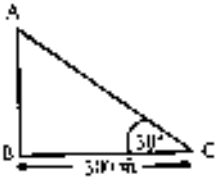
yoursmahboob

$\tan 30^\circ = \frac{BC}{30}$ या, $BC = \frac{30}{\sqrt{3}}$

झंडे की ऊँचाई $AB = 30 - \frac{30}{\sqrt{3}} = 30 - 10\sqrt{3} = 30 - 17.32 = 12.68$ मी.

उदा. 4: 300 मी. की दूरी से क्षैतिज तल पर स्थित किसी शिखर की चोटी का उन्नयन कोण (angle of elevation) 30° है। शिखर की ऊँचाई ज्ञात करें।

हल: मान लिया कि शिखर की ऊँचाई AB = x मी. है



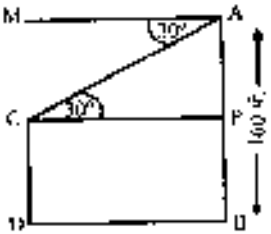
Δ ABC में

$\tan 30^\circ = \frac{AB}{BC} = \frac{x}{300}$ $\therefore x = \frac{300}{\sqrt{3}} = 100\sqrt{3} = 173.20$ मी

उदा. 5: दो मीनारों (towers) के बीच की क्षैतिज (horizontal) दूरी $50\sqrt{3}$ मी. है। दूसरी मीनार की चोटी से पहली मीनार की चोटी का अवनमन कोण (angle of depression) 30° है। यदि दूसरी मीनार की ऊँचाई 160 मी. है तो पहली मीनार की ऊँचाई ज्ञात करें।

हल: माना कि मीनार AB 160 मी. ऊँची है।

तथा मान लिया कि CD दूसरी मीनार है जिसकी ऊँचाई x मी. है।



चूँकि AM | PD

$\therefore \angle MAC = \angle ACP = 30^\circ$

yoursmahboob

$\therefore$ ΔAPC में

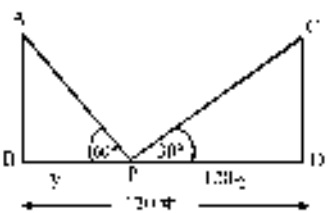
$$\tan 30^\circ = \frac{AP}{PC} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{AP}{50\sqrt{3}} \quad \therefore AP = 50 \text{ मी.}$$

$\therefore$ दूसरी मीनार की ऊँचाई $= AB - AP = 160 - 50 = 110$ मी.

उदा. 6: 120 मी. चौड़ी सड़क के दोनों किनारों पर दो बराबर ऊँचाई के खंभे अपने अपने स्थित हैं। सड़क के बीच किसी बिन्दु से खंभों की ऊपरी सिरों के उन्नयन कोण 60° एवं 30° हैं। बिंदु की स्थिति और खंभों की ऊँचाइयाँ ज्ञात करें।

हल: माना कि AB एवं CD दो खंभे हैं तथा उनकी ऊँचाई = x मी. है एवं P सड़क पर एक बिन्दु है।

माना कि $BP = y$ मी., तो $PD = (120-y)$ मी.



ΔABP में

$$\tan 60^\circ = \frac{AB}{BP} = \frac{x}{y} \Rightarrow x = y\sqrt{3} \text{ .....(i)}$$

ΔCDP में

$$\tan 30^\circ = \frac{CD}{DP} = \frac{x}{120-y} \Rightarrow x\sqrt{3} = 120 - y \text{ .....(ii)}$$

(i) एवं (ii) से $y\sqrt{3}\sqrt{3} = 120 - y \Rightarrow 3y = 120 - y \Rightarrow y = 30$ मी.

(i) से $x = y\sqrt{3} = 30\sqrt{3} \approx 52$ मी.

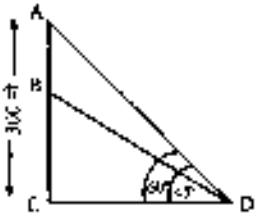
उदा. 7: 3000 मी. की ऊँचाई पर उड़ते हुए जहाज के ठीक नीचे जिस क्षण दूसरा जहाज आता है, उसी क्षण भूमि पर किसी बिन्दु से उन जहाजों के उन्नयन कोण क्रमशः 60° और 45° हैं। उस क्षण दोनों जहाजों के बीच की ऊर्ध्वाधर दूरी ज्ञात करें।

हल: माना कि A एवं B दो जहाज हैं, A,C से 3000 मी. की ऊँचाई पर है तथा B,A से y मी. नीचे है। माना कि D प्रेक्षण बिन्दु है, तो $\angle ADC = 60^\circ$ एवं $\angle BDC = 45^\circ$

yoursmahboob

माना कि $DC = x$ मी.

ΔACD में,



$$\tan 60^\circ = \frac{AC}{CD} = \frac{3,000}{x} \quad \therefore \; x = \frac{3,000}{\sqrt{3}} \; .....(i)$$

पुनः ΔBCD में, $\tan 45^\circ = \frac{BC}{CD} \Rightarrow \frac{3000 - y}{x} = 1 \quad \therefore x = 3000 - y \; .....(ii)$

(i) एवं (ii) से, $\frac{3,000}{\sqrt{3}} = 3,000 - y$

$$\Rightarrow y = 3,000\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{3,000 \times 0.732}{1.732} = 1268 \text{ मी.}$$

उदा. 8: एक पतंग एवं भूमि पर एक बिन्दु के जोड़ के धागे की लम्बाई 102 मी. है। यदि धागा समतल भूमि के साथ कोण α इस प्रकार से बनाता है कि $\tan\alpha = \frac{15}{8}$, तो पतंग की ऊँचाई ज्ञात करें।

हल: C भूमि पर एक बिन्दु है तथा धागे की लम्बाई CA = 102 मी. एवं $\tan\alpha = \frac{15}{8}$, इसलिए

$\sin\alpha = \frac{15}{17}$

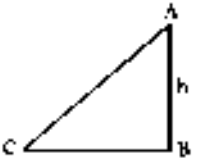
yoursmahboob

ΔABC में,

$$\sin\alpha = \frac{AB}{AC} \rightarrow AB = AC \times \frac{15}{17} = 102 \times \frac{15}{17} = 90 \text{ मी.}$$

उदा. 9: एक ऊर्ध्वाधर खंभे की छाया उसकी ऊँचाई का $\sqrt{3}$ है। उन्नयन कोण (angle of elevation) ज्ञात करें।

हल: माना कि ऊर्ध्वाधर खंभे की ऊँचाई $AB = h$ मी. है। इसलिए, छाया BC की लंबाई $= h\sqrt{3}$ मी. एवं $\angle ACB = \theta$



ΔABC में, $\tan\theta = \frac{AB}{BC} = \frac{h}{h\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\tan\theta = \tan 30^\circ \quad \therefore \theta = 30^\circ$

उदा. 10: एक प्रकाश-स्तंभ (light-house) की चोटी से दो जहाजों को अवनमन कोण (angle of depression) 45° एवं 30° है। यदि दोनों जहाजों के बीच की दूरी 100 मी. हो तो प्रकाश-स्तंभ की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

हल: माना कि AB, प्रकाश स्तंभ की ऊँचाई $= x$ मी.

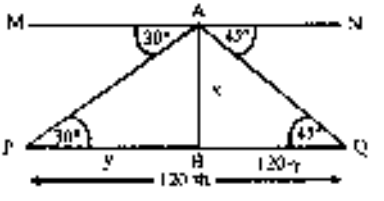
चूँकि $MN \parallel PQ$

$\therefore \angle MAP = \angle APB = 30^\circ$ एवं

$\therefore \angle NAQ = \angle AQB = 45^\circ$

माना कि P एवं B के बीच की दूरी y मी. है

इसलिए, B एवं Q के बीच की दूरी $= (120 - y)$ मी.



yoursmahboob

Δ ABP में, $\tan 30^\circ = \frac{AB}{BP} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{x}{y} \Rightarrow y = x\sqrt{3}$ ..... (i)

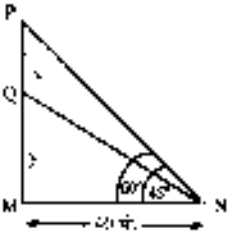
पुनः Δ AHQ में $\tan 45^\circ = \frac{AB}{BQ} \Rightarrow 1 = \frac{x}{120-y} \Rightarrow x = 120 - y$ .....(ii)

(i) एवं (ii) से, $x = 120 - x\sqrt{3}$ या, $x(1+\sqrt{3}) = 120$

$\therefore x = \frac{120}{1+\sqrt{3}} = 44$ मी.

उदा. 11: दीवार में स्थित एक ध्वज दंड के लिए एवं जड़ का 40 मी. चौड़ी सड़क की दूसरी ओर खड़ा एक व्यक्ति द्वारा बनाया गया उन्नयन कोण (angles of elevation) क्रमशः 60° एवं 45° है। ध्वज-दंड की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

हल: माना कि PQ, ध्वज-दंड की ऊँचाई $= x$ मी. एवं QM, दीवार की ऊँचाई $= y$ मी.



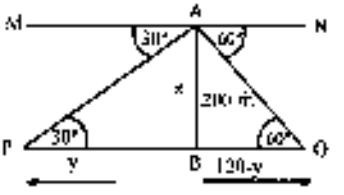
Δ QMN में, $\tan 45^\circ = \frac{QM}{MN} \Rightarrow 1 = \frac{y}{40} \therefore y = 40$ .....(i)

पुनः Δ PMN में, $\tan 60^\circ = \frac{PQ + QM}{MN} \Rightarrow \frac{x+y}{40}$

$\therefore 40\sqrt{3} = x + 40 \quad \therefore x = 40(\sqrt{3} - 1) = 29.28$ मी.

उदा. 12: 200 मी. ऊँचे एक शिखर की चोटी से प्रेक्षक (observer) के दक्षिण में स्थित दो नावों का अवनमन कोण 60° एवं 30° है। दोनों नावों के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।

हल: माना कि AB, शिखर की ऊँचाई = 200 मी.



yoursmahboob

ΔABP में, $\tan 30^\circ = \frac{AB}{BP} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{200}{BP}$ $\therefore BP = 200\sqrt{3}$ मी. ....(i)

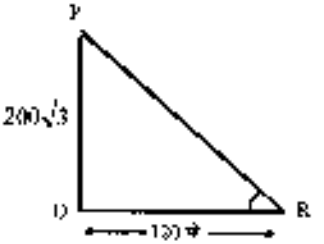
पुनः ΔABQ में, $\tan 60^\circ = \frac{AB}{BQ} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{200}{BQ}$ $\therefore BQ = \frac{200}{\sqrt{3}}$ मी. ....(ii)

$\therefore$ दोनों नावों के बीच की दूरी $= PB + BQ = 200\sqrt{3} + \frac{200}{\sqrt{3}} \approx 460$ मी.

उदा. 13: एक मीनार $200\sqrt{3}$ मी. ऊँची है। मीनार की जड़ से 200 मी. दूर किसी बिन्दु से मीनार की चोटी का उन्नयन कोण (angle of elevation) ज्ञात कीजिए।

हल: माना कि उन्नयन कोण $= \theta$ एवं

PQ, मीनार की ऊँचाई $= 200\sqrt{3}$ मी.

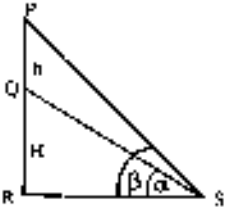


ΔPQR में, $\tan\theta = \frac{PQ}{QR} = \frac{200\sqrt{3}}{200} = \sqrt{3}$

$\tan\theta = \tan 60^\circ$ $\therefore \theta = 60^\circ$

उदा. 14: क्षैतिज तल पर स्थित एक मीनार ऊर्ध्वाधर खड़ी है तथा उसके शिखर पर h मी. ऊँचाई का एक ध्वजदंड लगा है। तल पर स्थित किसी बिन्दु से ध्वजदंड का आधार तथा ऊपरी सिरे के उन्नयन कोण क्रमशः α एवं β हैं। मीनार की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

हल: माना कि QR, मीनार की ऊँचाई $= H$ एवं PQ, ध्वजदण्ड की ऊँचाई $= h$



yoursmahboob

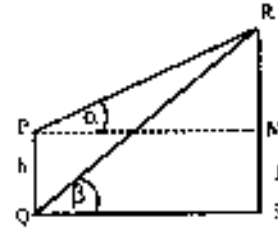
ΔQRS में, $\tan\alpha = \frac{QR}{RS} = \frac{H}{RS}$ $\therefore RS = \frac{H}{\tan\alpha}$ .....(i)

पुनः ΔPRS में, $\tan\beta = \frac{PQ+QR}{RS} = \frac{(h+H)\tan\alpha}{H}$ .....[(i) से]

या, $H\tan\beta = h\tan\alpha + H\tan\alpha$ $\therefore H = \frac{h\tan\alpha}{\tan\beta - \tan\alpha}$

उदा. 15: *h* ऊँचाई वाले एक मकान की ऊपरी सिरे एवं आधार से एक मीनार की चोटी का उन्नयन कोण क्रमशः α एवं β है। मीनार की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

हल: माना कि PQ, मकान की ऊँचाई = h एवं RS, मीनार की ऊँचाई = H



ΔRMP में, $\tan\alpha = \frac{RM}{PM} = \frac{H-h}{PM}$ $\therefore PM = \frac{H-h}{\tan\alpha}$ .....(i)

पुनः ΔRSQ में $\tan\beta = \frac{RS}{SQ} = \frac{H\tan\alpha}{H-h}$ [(i) से]

हल करने पर, $H = \frac{h\tan\beta}{\tan\beta - \tan\alpha}$

अभ्यास प्रश्न

1. एक मीनार 30 मी. ऊँची है। मीनार की चोटी से एक प्रेक्षक (observer) एक मकान के आधार पर अवनमन कोण (angle of depression) 60° बनाता है एवं मकान के सिरे पर अवनमन कोण 45° बनाता है। मकान की ऊँचाई ज्ञात करें।

   1) 18 मी. 2) $12\sqrt{2}$ मी. 3) $10\sqrt{3}$ मी.
   4) 15 मी. 5) इनमें से कोई नहीं

2. दो क्षैतिज बिन्दुओं से एक मीनार की चोटी का उन्नयन कोण क्रमशः α एवं $(90° - \alpha)$ है। मीनार से दोनों बिन्दुओं की दूरी क्रमशः a एवं b है। मीनार की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

   1) $\sqrt{\frac{a}{b}}$ 2) $\sqrt{ab}$ 3) ab
   4) $\sqrt{\frac{b}{a}}$ 5) इनमें से कोई नहीं

yousufmahboob

3. शहर B, शहर A से 14 कि. मी. दक्षिण एवं 16 कि. मी. पश्चिम है। A से B की दूरी ज्ञात करें।

1) 15.6 कि. मी. 2) 18.8 कि. मी. 3) 21.2 कि. मी.
4) 24.4 कि. मी. 5) 25.8 कि. मी.

4. एक प्रकाश-स्तंभ का उन्नयन कोण 30° से 60° हो जाता है जब एक व्यक्ति 20 मी. प्रकाश स्तंभ की ओर चलता है। प्रकाश-स्तंभ की ऊँचाई ज्ञात करें

1) 8.66 मी. 2) 10 मी. 3) 17.32 मी.
4) 20 मी. 5) इनमें से कोई नहीं

5. 60 मी. ऊँचे एक शिखर की चोटी से एक मीनार की ऊपरी सिरा तथा आधार का अवनमन कोण क्रमशः 30° एवं 60° है। मीनार की ऊँचाई ज्ञात करें।

1) 40 मी. 2) 50 मी. 3) 30 मी.
4) 35 मी. 5) इनमें से कोई नहीं

6. एक अपूर्ण मीनार के आधार से 120 मी. दूर एक बिन्दु से उसकी चोटी का उन्नयन कोण 45° है। मीनार को और कितना ऊँचा कर दिया जाए ताकि उसी बिन्दु से मीनार की चोटी का उन्नयन कोण 60° हो जाए?

1) 90 मी. 2) 92 मी. 3) 97 मी.
4) 87.84 मी. 5) इनमें से कोई नहीं

7. एक खंभे की छाया की लंबाई खंभे की लंबाई की $\sqrt{3}$ गुनी है। सूर्य का उन्नयन कोण ज्ञात करें।

1) 60° 2) 30° 3) 45°
4) 90° 5) इनमें से कोई नहीं

8. 100 मी. चौड़ी सड़क के दोनों किनारों पर दो बराबर ऊँचाई के खंभे आमने सामने स्थित हैं। सड़क के बीच में किसी बिन्दु से खंभों के ऊपरी सिरों के उन्नयन कोण 60° एवं 30° हैं। खंभों की ऊँचाइयाँ ज्ञात कीजिए।

1) $20\sqrt{3}$ 2) $26\sqrt{3}$ 3) $30\sqrt{3}$
4) $22\sqrt{3}$ 5) इनमें से कोई नहीं।

9. एक बिन्दु A पर एक मीनार का उन्नयन कोण इस प्रकार है कि इसके tan का मान $\frac{5}{12}$ है। 240 मी. मीनार की ओर चलने पर उन्नयन कोण के tan का मान $\frac{3}{4}$ हो जाता है। मीनार की ऊँचाई क्या है?

1) 220 मी. 2) 200 मी. 3) 225 मी.
4) 240 मी. 5) इनमें से कोई नहीं

10. एक मीनार समतल भूमि पर खड़ी है। सूर्य के उन्नतांश (सूर्य का उन्नयन कोण) 30° पर मीनार की छाया सूर्य के उन्नतांश 45° पर मीनार की छाया से 60 मी. अधिक है। मीनार की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

yoursmahboob

1) $60(\sqrt{3}+1)$ 2) $30(\sqrt{3}+1)$ 3) $\frac{60}{\sqrt{3}-1}$

4) $30\sqrt{3}-1$ 5) इनमें से कोई नहीं

11. समुद्र तल से 200 मी. ऊँची एक शिखर की चोटी से दो जहाजों का अवनमन कोण क्रमशः 45° एवं 30° है। दोनों जहाजों के बीच की दूरी ज्ञात करें यदि दोनों को जोड़ने वाली रेखा को शिखर के आधार तक बढ़ाया जा सकता हो।

1) 140 मी. 2) 150 मी. 3) 156 मी.

4) 146.6 मी. 5) इनमें से कोई नहीं।

12. आँधी चलने से दो भागों में टूटे हुए एक वृक्ष का ऊपरी भाग भूमि से 30° का कोण बनाता है। वृक्ष का ऊपरी सिरा जिस स्थान पर भूमि को छूता है वह स्थान वृक्ष के आधार बिन्दु से 10 मी. की दूरी पर है। वृक्ष की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

1) 20 मी. 2) 40 मी. 3) 50 मी.

4) 60 मी. 5) इनमें से कोई नहीं

13. एक सीधी क्षैतिज सड़क के ऊर्ध्वाधर एक हवाई जहाज से दो लगातार मील-पत्थरों, जो कि हवाई जहाज के विपरीत ओर स्थित हैं, का अवनमन कोण 30° एवं 60° है। तो सड़क के ठीक ऊपर हवाई जहाज की ऊँचाई (मील में) ज्ञात करें।

1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 2) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ 3) $\frac{\sqrt{3}}{8}$

4) $\frac{2\sqrt{3}}{12}$ 5) इनमें से कोई नहीं

14. 125 मी. ऊँची एक मीनार से कार का अवनमन कोण (angle of depression) 45° है। तो कार मीनार से कितनी दूरी पर है?

1) 60 मी. 2) 75 मी. 3) 80 मी.

4) 95 मी. 5) इनमें से कोई नहीं

15. एक घर की दीवार पर लगी एक सीढ़ी का उन्नयन कोण 60° है तथा सीढ़ी का निचला सिरा दीवार से 6.5 मी. दूर है। सीढ़ी की लम्बाई ज्ञात करें।

1) 3.25 मी. 2) $\frac{13}{\sqrt{3}}$ मी. 3) 13 मी

4) 15 मी. 5) इनमें से कोई नहीं

16. 125 मी. ऊँची एक मीनार की चोटी से दो जहाजों, जो कि मीनार के आधार के साथ एक क्षैतिज रेखा में है, का अवनमन कोण 45° एवं 30° है। यदि जहाजों मीनार के एक ही ओर हों तो उनके बीच की दूरी ज्ञात करें।

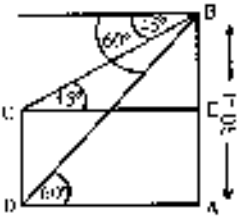
yoursmartboob

1) $125\sqrt{3}$ मी. 2) $\frac{125}{\sqrt{3}}$ मी. 3) $125(\sqrt{3}-1)$ मी.

4) $\frac{125}{(\sqrt{3}-1)}$ मी. 5) इनमें से कोई नहीं

उत्तर

1. 5; ΔABD में, $AD = \frac{AB}{\tan 60^\circ} = \frac{30 \text{ मी.}}{\sqrt{3}}$



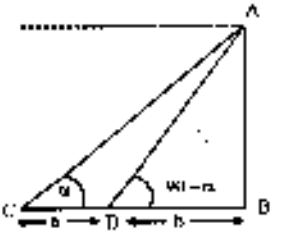
ΔBCE में, $BE = CE$

$\tan 45^\circ = CE = \frac{30 \text{ मी.}}{\sqrt{3}}$

$\therefore CD = AE = AB - BE$

$30\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{30(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{3}} = 10\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)$

2. 2;



समकोण त्रिभुज ABC में, $\tan\alpha = \frac{AB}{BC} = \frac{AB}{a}$

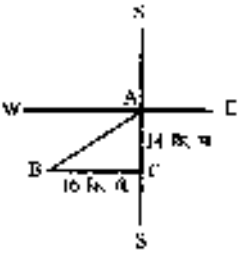
समकोण त्रिभुज ABD में, $\tan(90^\circ - \alpha) = \frac{AB}{BD} = \frac{AB}{b}$

yoursmahboob

$$\Rightarrow \cot\alpha = \frac{AB}{b}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{AB} = \frac{AB}{b} \Rightarrow AB = \sqrt{ab}$$

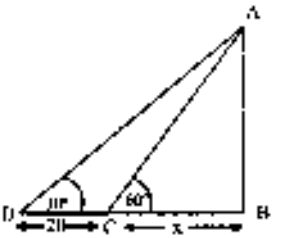
3. 3;



$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2}$$

$$\sqrt{(14)^2 + (16)^2} = \sqrt{196 + 256} = \sqrt{452} = 21.2 \text{ कि. मी.}$$

4. 3;



Δ ABC से, $\tan 60^\circ = \frac{AB}{x} \Rightarrow AB = \sqrt{3}x$ .....(i)

Δ ABD से, $\tan 30^\circ = \frac{AB}{20+x} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{AB}{20+x}$ .....(ii)

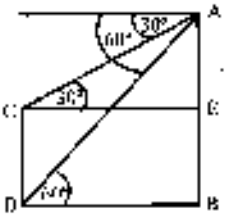
(i) & (ii) से, $\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}AB}{20\sqrt{3}+AB} \Rightarrow 20\sqrt{3} + AB = 3AB$

$\Rightarrow AB = 10\sqrt{3} = 17.32$ मी.

yoursmahboob

5. 1: माना कि AB = शिखर = 60 मी.

CD = मीनार = ?



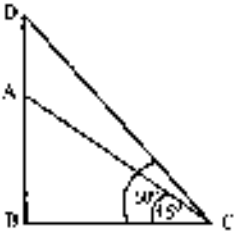
Δ ABD में, $\tan 60^\circ = \frac{AB}{BD}$ $\therefore BD = \frac{60}{\sqrt{3}}$ मी. ..... (i)

Δ AEC में, $\tan 30^\circ = \frac{AE}{BC}$ $\therefore AE = \frac{60}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{\sqrt{3}}$

AE = 20 मी.

$\therefore$ CD = AB - AE = 60 - 20 = 40 मी.

6. 4;



AB = अपूर्ण मीनार

BC = 120 मी.

Δ ABC में, $\tan 45^\circ = \frac{AB}{BC}$

$\therefore$ AB = BC = 120 मी.

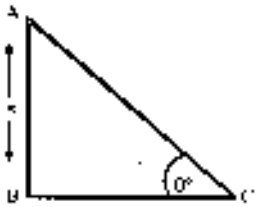
Δ DBC में, $\tan 60^\circ = \frac{DA + AB}{BC}$

$120\sqrt{3} = DA + 120$

$\therefore DA = 120(\sqrt{3} - 1) = 120 \times 0.732 = 87.84$ मी.

yoursmahboob

7. 2;



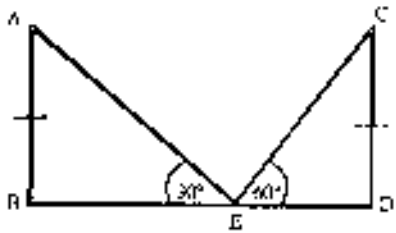
मान कि $AB = x$ मी.

तब $BC = x\sqrt{3}$ मी.

ΔABC में, $\tan\theta = \frac{AB}{BC} = \frac{x}{x\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\therefore \tan\theta = \tan 30^\circ \Rightarrow \theta = 30^\circ$

8. 5;



$AB = CD =$ मीनार $= x$

$BD =$ सड़क $= 100$ मी.

ΔABE में, $\tan 30^\circ = \frac{ab}{BE} = \frac{x}{BE}$

$\therefore BE = x\sqrt{3}$ .....(i)

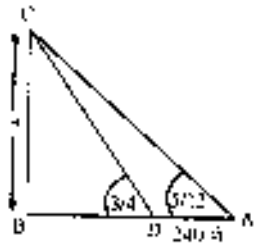
ΔCDE में, $\tan 60^\circ = \frac{CD}{DE} = \frac{x}{100 - x\sqrt{3}}$

$\therefore \sqrt{3} = \frac{x}{100 - x\sqrt{3}}$; $\therefore 100\sqrt{3} - 3x = x$

$\therefore x = \frac{100\sqrt{3}}{4} = 25\sqrt{3} = 43.3$ मी.

yoursmahboob

9. 3,



मीनार की लंबाई = BC = x मी.

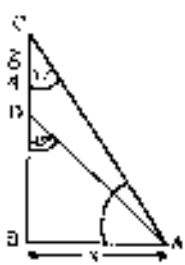
ΔABD में, $\tan(\angle CDB) = \frac{BC}{BD}$

$\frac{3}{4} = \frac{x}{BD}$ $\therefore BD = \frac{4}{3}x$ .....(i)

ΔABC में, $\tan(\angle CAB) = \frac{BC}{BA} = \frac{x}{x + 240}$

$= \frac{5}{12} = \frac{3x}{4x + 720}$ $\therefore x = 225$ मी.

10. 2;



मीनार की ऊँचाई = AB = x मी.

ΔABD में,

$\tan 45^\circ = \frac{AB}{BD}$

$\therefore x = BD$

ΔABC में, $\tan 30^\circ = \frac{AB}{BD + DC} = \frac{x}{x + 60}$ $\frac{1}{\sqrt{3}}$

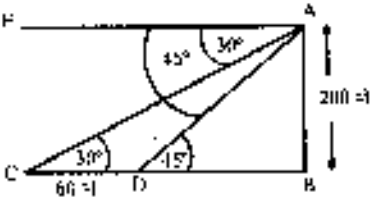
yoursmahboob

$\therefore\ x\sqrt{3} = x + 60$

$\therefore\ x = \dfrac{60}{\sqrt{3}-1} \times \dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1}$

$\therefore\ x = 30(\sqrt{3}+1)$

11. 4;



शिखर AB = 200 मी.

Δ ABD में, $\tan 45° = \dfrac{AB}{BD}$

$\therefore$ BD = 200 मी.

Δ ABC में,

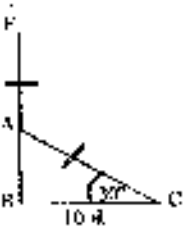
$\tan 30° = \dfrac{AB}{BD + DC}$

या, $\dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{200}{200 + DC}$

$\therefore\ 200 + DC = 200\sqrt{3}$

$\therefore\ DC = 200(\sqrt{3} - 1) = 200 \times 0.732 = 146.4$ मी.

12. 5;



yoursmahboob

ΔABC में, $\tan 30^\circ = \frac{AB}{BC}$

$\therefore AB = \frac{10}{\sqrt{3}}$ .....(i)

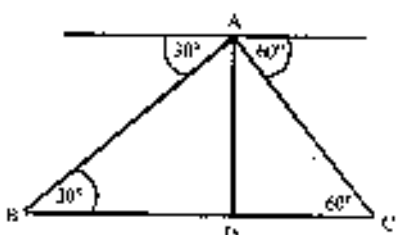
पुनः ΔABC में, $\cos 30^\circ = \frac{BC}{AC}$

$\therefore AC = \frac{2}{\sqrt{3}} \times 10$

या $AC = \frac{20}{\sqrt{3}}$;

$\therefore$ वृक्ष की ऊँचाई $= AB - AC = \frac{10}{\sqrt{3}} + \frac{20}{\sqrt{3}} = \frac{30}{\sqrt{3}} = 10\sqrt{3} = 17.32$ मी.

(3. 2)



$BD + DC = 1$ ..... (i) (दिया हुआ है)

$AD = ?$

ΔABD में, $\tan 30^\circ = \frac{AD}{BD}$

$\therefore BD = \sqrt{3}AD$ और

ΔADC में,

$\tan 60^\circ = \frac{AD}{DC}$ $\therefore DC = \frac{AD}{\sqrt{3}}$

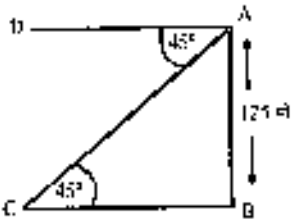
(i) से $BD + DC = 1$

$\sqrt{3}\,AD + \frac{AD}{\sqrt{3}} = 1 \Rightarrow AD(3+1) = \sqrt{3}$

$\therefore AD = \frac{\sqrt{3}}{4}$

yoursmahboob

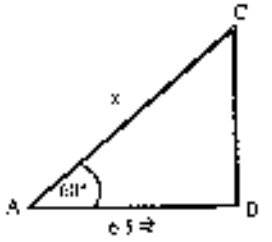
14. 5;



Δ ABC में, $\tan 45^\circ = \frac{AB}{BC}$

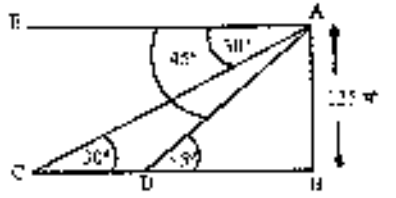
$\therefore$ $BC = \frac{125}{1} = 125$ मी.

15. 3;



$\cos 60^\circ = \frac{6.5}{x} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{6.5}{x} \Rightarrow x = 13$ मी.

16. 3;



$\tan 45^\circ = \frac{AB}{DB}$

$DB = \frac{125}{\tan 45^\circ} = 125$ मी एवं $\tan 30^\circ = \frac{AB}{CB}$

$\Rightarrow CB = \frac{AB}{\tan 30^\circ} = 125\sqrt{3}$ मी.

$\therefore$ $CD = CB - DB = 125(\sqrt{3} - 1)$ मी.

yoursmahboob

सन्निकट मान

(Approximate Value)

सन्निकट मान पर आधारित प्रश्न छात्रों के गणना कौशल को परखने के लिए पूछे जाते हैं। परीक्षार्थियों से सन्निकट मान को गणना करने के लिए कहा जाता है न कि सटीक मान को गणना के लिए। कभी-कभी विकल्पों के बीच बहुत कम का अंतर होता है और हम अपने परिणाम को लेकर भ्रम-ग्रस्त होते हैं। जब विकल्पों के बीच बहुत का अंतर होता है तो बिना किसी असमंजस के हमें नतीजे का पता चल जाता है। नीचे दिए गए उदाहरणों से सन्निकट मान की संकल्पना और अधिक स्पष्ट हो जाएगी।

इस खंड के तहत प्रायः केवल पाँच तरह की गणनाएँ पूछी जाती हैं। ये गणनाएँ हैं: योगफल, गुणा, भाग, वर्गमूल एवं प्रतिशत। हर स्थिति के लिए हम गणना के भिन्न-भिन्न नियमों का इस्तेमाल करेंगे।

योगफल (जोड़ एवं घटाव)

निम्नलिखित नियमों का अनुपालन करें:

(1) बड़ी संख्याओं को ऐसी संख्याओं से बदल दें, जिनके अंत में अधिकतम शून्य हों।

उदाहरण के लिए,

(i) 110869 के लिए 110000 का इस्तेमाल करें (यदि विकल्प हजार के रूप में हो)

(ii) 5628 के लिए 5600 का इस्तेमाल करें (यदि विकल्प सौ के रूप में हो और 5630 का इस्तेमाल करें (यदि विकल्प दस के रूप में हो)

(2) यदि दो बड़ी संख्याओं को जोड़ना हो तो एक को कम करने एवं दूसरे को बढ़ाने का प्रयास कीजिए।

उदाहरण के लिए,

i) 568945 – 698219 = ?

पहली स्थिति: यदि विकल्प दस के संदर्भ में हो तो सन्निकट मान होंगे,

568940 + 698220

यहाँ पहले मान को कम कर दिया गया है तथा दूसरे मान को बढ़ा दिया गया है। इस प्रकार विचलन (deviation) कम हो जाता है। यदि हमने पहले मान के लिए 568950 तथा दूसरे मान के लिए भी इसी प्रकार का बड़ा हुआ मान इस्तेमाल किया होता तो विचलन 5+1=6 होता। पर, वर्तमान स्थिति में विचलन 5–1=4.

दूसरी स्थिति: यदि विकल्प सौ के संदर्भ में हो तो सन्निकट मान के रूप में निम्नलिखित राशि का इस्तेमाल किया जाना चाहिए,

569000 + 698200

आमतौर से, लोग सन्निकट संख्या के रूप में निम्नलिखित राशि का इस्तेमाल करेंगे,

568900 + 698200

yourmahboob

इस स्थिति में विचलन = (−45) + (−19) = −64 है। पर, जिस मान का हमलोगों ने उपयोग किया है, उसके लिए विचलन = 55−(−19) = 36

नोट: इस प्रकार विचलन का मान हमलोगों द्वारा अपनाई गई विधि में कम है।

तीसरी स्थिति: यदि विकल्प हजार के संदर्भ में हो तो सन्निकट मान के लिए निम्नलिखित राशि का इस्तेमाल करना चाहिए,

569000−698000

पहला मान बढ़ाया गया है तथा दूसरे मान को घटाया गया है।

(3) यदि एक बड़ी संख्या में से दूसरे बड़ी संख्या घटानी हो तो दोनों संख्याओं को एक साथ बढ़ा या घटा देना चाहिए।

उदाहरण के लिए, 56824−7857 = ?

पहली स्थिति: यदि विकल्प 10 के संदर्भ में हो तो, निम्नलिखित सन्निकट मान का इस्तेमाल करना उपयुक्त होगा

56830 − 7860

दोनों मान एक साथ बढ़ा दिए गए हैं।

विचलन (deviation) = 6−(−3) = 6−3 = 3

आमतौर से लोग निम्नलिखित मान का प्रयोग करते हैं,

56820−7860

क्योंकि 24, 30 की तुलना में 20 के अधिक करीब है।

इस स्थिति में विचलन = −4−(+3) = −4 + 3 = −7 इस प्रकार यह स्पष्ट हो गया कि उपर्युक्त नियम के अनुपालन से प्राप्त परिणाम शुद्ध मान के अपेक्षाकृत अधिक करीब होगा।

दूसरी स्थिति: यदि विकल्प सौ के संदर्भ में हो तो निम्नलिखित सन्निकट मान का प्रयोग किया जाना चाहिए,

56800 − 7800

दोनों मान घटाए जाते हैं। इस स्थिति में विचलन = −24 − (−57) = −24+57 = +33 पर यदि हम 56800 − 7900 का इस्तेमाल करें तो (यहाँ पहला मान घटा दिया गया है तथा दूसरा मान बढ़ा दिया गया है) विचलन = −24−(+43) = −67 इस प्रकार हम देखते हैं कि पहली स्थिति में, जहाँ दोनों मान घटा दिए जाते हैं, विचलन कम है।

नोट: यदि दोनों मान बढ़ा दिए जाते हैं तब भी उत्तर को विचलन प्राप्त होता है, जितना कि दोनों मानों को घटा देने पर। यह एक महत्वपूर्ण तथ्य है। इस तथ्य से आपको यह स्वतंत्रता रहती है कि बड़ी संख्या को अपनी सुविधा अनुसार या तो बढ़ा दें या घटा दें। उदाहरण के लिए दूसरी स्थिति में यदि दोनों मानों को बढ़ा दिया जाए तो विचलन

= −(100−24)−(100−57)

= −100 + 24 + 100 + 57

= −24 + 57 = +33

और यह मान ठीक उतना ही है, जितना घटने की स्थिति में प्राप्त मान है।

पहली स्थिति में: जब दोनों मान घटा दिए जाते हैं तो विचलन = +6−(−3) = +3, जो कि ठीक उतना ही, जितना बढ़ाने के बाद प्राप्त विचलन है।

yoursmahboob

उदा. 1: 23015 + 13595 + 3738 = ?

1) 40,000 2) 41,000 3) 42,000 4) 46,000 5) 50,000

हल: चूँकि उत्तर यहाँ हजार के संदर्भ में है, इसलिए यहाँ हजार के स्थान तक सन्निकट मान लेना उचित रहेगा। इसलिए,

23015 + 13595 + 3738

= 23,000 + 13,000 + 4,000 = 40,000

पहले दो मानों को घटा दिया गया है, तथा इसकी भरपाई के लिए आखिरी मान को बढ़ा दिया गया है। ऐसा करने से विचलन कम हो जाता है

उदा. 2: 73528 + 16796 + 9043 = ?

1) 99200 2) 99300 3) 99400 4) 99500 5) 99600

हल: चूँकि विकल्प यहाँ सौ के स्थान के संदर्भ में हैं साथ ही, विकल्पों के बीच अंतर भी बहुत कम है। इसलिए, विचलन को कम करने के लिए, हम लोग निम्नलिखित मान लेते हैं,

73500 + 16800 + 9100 = 99400

नोट: 1) उपर्युक्त उदाहरण में पहला मान घटा दिया जाता है जबकि दूसरा एवं तीसरा मान सौ के स्थान तक बढ़ा दिया जाता है। चूँकि 16796, 16800 के बहुत अधिक करीब है, इसलिए इसे बढ़ाने में हिचकिचाहट नहीं होनी चाहिए, पहला मान भी अपने से नीचे के सौ के मान के करीब है इसलिए तीसरा मान बढ़ा दिया जाना चाहिए यदि हम तीसरे मान को भी घटा दें तो परिणाम के रूप में 99300 मिलता है, जो उत्तर के उतना करीब नहीं है, जितना कि पिछला उत्तर।

2) हम दोनों स्थितियों में विचलन देख सकते हैं:

पिछली स्थिति में, विचलन = (−28) + (+4) + (157) = −33

दूसरी स्थिति में, विचलन = (−28) + (−4) + (−43) = −67

3) पहले मान को घटाने एवं दूसरे मान को बढ़ाने के बदले हम पहले मान को बढ़ा एवं दूसरे मान को घटा सकते हैं। इससे भी समान विचलन के साथ समान परिणाम प्राप्त होगा। आप इसे स्वयं जाँच कर देख लीजिए।

4) जब कभी आपको उत्तर तय करने में परेशानी हो, आप विचलन का सहारा ले सकते हैं; विचलन के प्रयोग से, हमें सटीक मान (exact value) की प्राप्ति होती है; उपर्युक्त स्थिति में,

सन्निकट मान = 99,400

विचलन = −33

इसका मतलब है कि सन्निकट मान, सटीक मान से 33 बड़ा हुआ है।

∴ सटीक मान = 99400 − 33 = 99367

उदा. 3: 85770 + 201997 + 2738 − 75492 = ?

1) 212000 2) 215000 3) 218000 4) 220000 5) 225000

हल: प्रदत्त संख्याओं को उनके निकटतम हजार के स्थान तक लिखें।

86000 + 202000 + 3000 − 76000 = 215000

पहले, दूसरे एवं तीसरे मानों को बढ़ाकर उन्हें निकटतम हजार तक पहुँचाया जाता है।

yourmahdob

इसलिए नियम (3) के अनुसार, ऋणात्मक मान को भी बढ़ाया जाना चाहिए। इससे विचलन कम हो जाता है।

नोट: (1) उपर्युक्त स्थिति में विचलन (−22) है। यदि हम अंतिम मान को घटाकर 75000 कर दें (जैसा कि आप में से अधिकांश चाहेंगे) तो विचलन = (+978)। यद्यपि उपर्युक्त स्थिति में इस विचलन से कोई फर्क नहीं आएगा, पर यह हानिकारक तो सिद्ध हो ही सकता है। इसलिए सन्निकट मान लेते वक्त इस बात का ख्याल रखें।

(2) ***एक महत्वपूर्ण सुझाव:*** यदि उत्तर निकटतम हजार के स्थान तक माँगा गया हो, तो कभी भी संख्या के अंत में शून्य नहीं छोड़ें। इससे आपके समय की बचत होगी। उदाहरण के लिए, उपर्युक्त स्थिति में लिखें

86·2021 3–76 = 215 हजार – 215000

उदा. 4: 1649 + 376 − 2009 + 8076 − ?

1) 7900 2) 7950 3) 8000 4) 8050 5) 9000

हल: विकल्प एक दूसरे से काफी निकट हैं, इसलिए विचलन को कम करने के ख्याल से, हमलोग सन्निकट मान कुछ इस तरह का लेंगे,

1650 − 380 − 2010 + 8070 − 8090 = 9000

चूँकि पहले दो मानों को बढ़ा दिया जाता है, इसलिए अन्तिम मान को घटा दिया जाता है। ऋणात्मक मान निकटतम दर के काफी करीब है, इसलिए यह उत्तर पर नाम मात्र का ही प्रभाव डालता है। उपर्युक्त गणना में विचलन का मान है,

(+1) + (−4) − (+1) − (−6) = 2

नोट: गणना के दौरान आसानी से इस बात का पता चल जाता है कि पहले दो मानों का योगफल नीचे मान के निरस्त (cancel) कर डालता है। इस प्रकार केवल अंतिम मान बचता है। पर इससे विकल्प स्पष्ट नहीं हो पाता। इसलिए हम वापस लौटते हैं और पाते हैं कि निरस्तीकरण की प्रक्रिया में शेष = 20 बच गए थे। इस प्रकार हमारा सन्निकट मान है,

8070 + 20 = 8090

उदा. 5: ? + 786.09 − 900.13 − 6.22

1) 119 2) 120 3) 121 4) 122 5) 123

हल: ? − 6.22 + 900.13 − 786.09

− 6 + 900 − 786 = 120

नियम (3) के अनुसार, चूँकि पहले दो धनात्मक मान घटा दिए जाते हैं, इसलिए, ऋणात्मक मान को भी घटाना चाहिए। इससे विचलन कम हो जाता है। इस स्थिति में विचलन है,

−0.22 + (−0.13) − (−0.09) = 0.34.

यदि आप नियमों का पालन नहीं करेंगे, तो गणना कुछ इस तरह की होगी।

6 + 900 − 787 = 119

एवं विचलन = 0.22 + (−0.13) − (−0.31) = −0.66

उदा. 6: 2876.28 − 1215.38 + ? − 5432.45

1) 1340 2) 1240 3) 1140 4) 2100 5) 1440

हल: यहाँ विकल्प एक-दूसरे के उतने करीब नहीं हैं, इसलिए यहाँ सन्निकट मान को 10 के संदर्भ में लिया जा सकता है। इस प्रकार दिए गए प्रश्न निम्नलिखित हो जाता है,

yoursmahboob

$2880 + 1210 + ? = 5430$

$\therefore ? = 10[543 - 409] = 1340$

नोट: चूँकि पहले मान में वृद्धि होती है और दूसरे मान में ह्रास होता है, अंतिम मान में किया गया थोड़ा-सा परिवर्तन कोई मायने नहीं रखता क्योंकि इसे बहुत ही छोटे मान से परिवर्तित किया गया है।

गुणा

गुणा के दौरान सन्निकटन (approximation) एक संवेदनशील मामला है। गुणक या गुण्य (multiplier or multiplicand) में किया गया थोड़ा-सा परिवर्तन गुणनफल के विचलन को बढ़ा देता है। यदि प्रदत्त विकल्पों के बीच बहुत अधिक अंतर है, तब तो आप सही विकल्प तक पहुँच सकते हैं। अन्यथा ***एक को बढ़ाने एवं दूसरे को घटाने*** की लोकप्रिय विधि को छोड़ देना ही उचित है। निम्नलिखित उदाहरण देखिए,

उदा. 384 × 299 का सन्निकट मान प्राप्त करें।

हल: लोकप्रिय विधि के अनुसार,

$$384 \times 299 \approx 380 \times 300 = 1,14,000$$

पर वास्तविक मान है 1,14,816. इस तरह स्पष्ट है कि इस गणना से विचलित परिणाम प्राप्त होते हैं। यदि दिए गए विकल्पों के बीच बहुत अधिक अंतर नहीं हो तो परिणाम तक पहुँचने में कठिनाई होती है। उदाहरण के लिए, यदि विकल्प निम्न प्रकार हो तो,

1) 1,14,000 2) 1,15,000 3) 1,16,000

इस विचलन से निजात पाने के लिए गणित के सामान्य नियमों का सहारा लिया जाता है। परिणाम तक शीघ्रता से पहुँचने के लिए इसे और भी सरलीकृत किया जा सकता है।

$384 \times 299 = (380 + 4)(300 - 1)$

$= 380 \times 300 + 4 \times 300 - 1 \times 380 - 4 \times 1$ [4×1 को नजरअंदाज करें]

$\approx 380 \times 300 + 4 \times 300 - 1 \times 380$

$\approx 1,14,000 + 800$ [$380 \approx 400$]

$= 1,14,800 \approx 1,15,000$

तेज गति से गणना करने के लिए (*) का अनुसरण कीजिए।

$380 \times 300 = 114000$

$+4 \quad -1 \quad = \quad 4(300) + (-1)(380) = 800$

उत्तर $= 114800 = 115000$

नोट: (1) (*) 384 = 380+4 को $\begin{pmatrix} 380 \\ +4 \end{pmatrix}$ लिखा गया है।

तथा 299 = 300 − 1 को $\begin{pmatrix} 300 \\ -1 \end{pmatrix}$ लिखा गया है।

पहली पंक्ति में 380 × 300 = 1,14,000 है, जो कि पहले प्राप्त परिणाम के अनुरूप है। दूसरी पंक्ति में परिवर्तन का उल्लेख है। इन पंक्तियों की गणना परिशुद्धतापूर्वक (accurately) नहीं की जानी चाहिए। इस पर कतई दृष्टिपात मत कीजिए। इस गणना की पहली पंक्ति

yourshahbob

पर दृष्टिपात करने से पता चलता है कि 4 × 100 – 1200; 1200 – 380 = 800, इसलिए 800 को पहली पंक्ति में जोड़ देने पर, अंतिम परिणाम 1,14,800 प्राप्त होता है।

(2) इस विधि का आधारभूत सिद्धांत है: *दस के निकटतम अपवर्तकों के करीब पहुँचना।* उदाहरण के लिए, 384 को जगह 380 कर दिया जाता है एवं 299 की जगह 300, जिससे गणना में आसानी होती है। पर इसे और अधिक सरल बनाने के लिए 384 की जगह 400 भी लिखा जा सकता है। तब गणना कुछ इस प्रकार की होगी,

400	× 300	=	1,20,000	
–16	–1	=	–5200	
		=	1,14,800	[=–16 × 300 – 1 × 400]

आपको सुझाव दिया जाता है कि 10 के गुणन घात की ओर बढ़ें।

(3) अन्य उदाहरणों की ओर बढ़ने से पूर्व अपने भ्रम (doubts) का निवारण कर लें।

जब केवल एक मान में परिवर्तन की जरूरत हो

उदा. 1: 2006 × 400 = ?

1) 8,80,000 2) 8,81,000 3) 8,82,000 4) 8,83,000

हल:

2000	–	440	–	8,80,000
+6		0	–	2,640 (=6×440+0×2000 = 2640)
			=	8,82,640 ≈ 8,83,000

पहले की तरह यहाँ दूसरी पंक्ति की गणना करने की आवश्यकता नहीं है। मोटे तौर पर अंदाज लगाया जा सकता है कि यह 1,00 2,500 से अधिक होना चाहिए। इसलिए, हमारा उत्तर है: 8,83,000

जब दोनों मानों में परिवर्तन की जरूरत हो

उदा. 2: 628 × 149 = ?

1) 92,500 2) 93,500 3) 94,500 4) 94,000

हल:

630	×	150	=	94,500
2		–1	=	–300 630 ≈ 900
			=	93,600 ≈ 93,500

नोट: 600 × 200 या 600 × 100 का प्रयोग नहीं करें यह आपकी गणना को जटिल कर देगा।

उदा. 3: 632 × 253 = ?

1) 1,60,000 2) 1,58,000 3) 1,55,000 4) 1,50,000

हल:

630	×	250	=	1,57,500
+2		+3	≈	+2,400 – 1,59,900 ≈ 1,60,000

उदा. 4: 628 × 143 = ?

1) 92,000 2) 91,000 3) 90,000 4) 89,000

हल:

630	×	140	=	88,200
–2		+3	≈	1,600 (=1,900 – 300)
			=	89,800 ≈ 90,000

yoursmahboob

बहुल गुणा (Multiple Multiplication)

उदा.: 5. 904 × 14 × 0.04 = ?

1) 840 2) 490 3) 505 4) 515 5) 520

हल: सर्वप्रथम, हम दो छोटे मानों के लिए गणना करेंगे,

14 × 0.04 = 0.56

अब, ? = 904 × 0.56 = 90.4 × 5.6

नियम के अनुसार,

90	×	5	=	450	
+0.4		0.6	=	56	(=2+54)
			=	506 ≈ 505	

उदा.: 6. 216 × 48 × 9 = ?

1) 90,000 2) 92,000 3) 95,000 4) 98,000 5) 99,000

हल: सर्वप्रथम, दो छोटे मानों की गणना की जाती है,

48 × 9 = 48(10−1) = 480 − 48 = 432,

अब, ? = 216 × 432

नियम के अनुसार,

220	×	430	=	94,600	
−4		+2	≈	−1,300	
			=	93,300 ≈ 92,000	

उदा.: 7. 27 × 384 × 12 = ?

1) 1,20,000 2) 1,24,000 3) 1,28,000 4) 1,30,000

हल: 27 × 12 = 324

∴ ? = 384 × 324

अब, नियम के अनुसार,

380	×	320	=	1,21,600	
+4		14	=	2,800	(−4 × 700)
			=	1,24,400 ≈ 1,24,000	

उदा.: 8. 0.009 × 13.076 × 12.84 = ?

1) 1 2) 1.5 3) 1.9 4) 2.1 5) 2.5

हल: उपर्युक्त नियम इस स्थिति के लिए उपयोगी सिद्ध नहीं होता अतएव, दशमलव मानों के लिए हम निकटतम पूर्ण संख्या का इस्तेमाल करेंगे।

उदाहरण के लिए,

0.009 × 13.076 × 12.84 ≈ 0.009 × 13 × 13 ≈ 0.009 × 170 ≈ 1.5

भाग (Division)

नियम: भाज्य एवं भाजक दोनों को उनके 10 के निकटतम अपवर्त्य तक ले जाया जाता है। इस प्रक्रिया में या तो दोनों को बढ़ा दिया जाना चाहिए, या घटा दिया जाना चाहिए। इससे विचलन कम हो जाता है।

yousmahboob

निम्नलिखित उदाहरणों से, भाग के संदर्भ में सन्निकटन की आवश्यकता बिल्कुल स्पष्ट हो जाएगी।

उदा. 1: 810 ÷ 3.9 = ?

1) 200 2) 206 3) 210 4) 212 5) 220

हल: प्रश्न पर एक नजर भर डालकर, हम लोग यह तय कर लेते हैं कि भाजक का मान बढ़ा दिया जाए तथा भाज्य के मान में कोई परिवर्तन नहीं किया जाए। ऐसी स्थिति में,

810 ÷ 4 = 202.5

पर इस परिणाम से हमें उत्तर की प्राप्ति नहीं होती। अब आप यह अनुमान लगा सकते हैं कि चूँकि भाजक में थोड़ी वृद्धि कर दी गई थी, इसलिए भागफल भी 202.5 से कुछ अधिक होगा। इसलिए हमारा उत्तर है: 206.

इस प्रकार का भ्रम दूर हो सकता है यदि हम हमारे नियम का अनुपालन करें। चूँकि भाजक के मान में वृद्धि की गई थी, इसलिए भाज्य के मान में भी वृद्धि होनी चाहिए। पर हमें यह ज्ञात नहीं है कि, इसे बढ़ाया कितना जाए। इस राशि का पता लगाने के लिए, निम्नलिखित विधि का अनुसरण कीजिए,

भाज्य में बढ़त का मान

= भाजक में वृद्धि × भागफल का सन्निकट मान = 0.1 × 200 = 20

इस प्रकार 810 ÷ 3.9 = (810 + 20) ÷ (3.9 + 0.1) = 830 ÷ 4 = 207.5

नोट: भागफल का सन्निकट मान विकल्पों को ध्यान में रखकर तय किया जाता है। सभी विकल्प 200 के करीब हैं, इसलिए हमने भागफल का सन्निकट मान 200 रखा।

उदा. 2: 12675 ÷ 42 = ?

1) 301 2) 290 3) 280 4) 305 5) 309

भाजक में से 2 घटाना है, इसलिए भाज्य के मान में भी कमी करनी पड़ेगी: इस कमी का मान = 2 × 300 = 600 (भागफल का सन्निकट मान = 300)

∴ 12675 ÷ 42 = 12000 ÷ 40 = 300

नोट: उपर्युक्त विधि से लगाया वास्तविक मान की प्राप्ति होती है। उदा.–2 में, हमलोगों ने 600 की जगह 675 घटाया। इस प्रकार, हमारा वास्तविक मान 300 से थोड़ा अधिक है और अधिक विशुद्ध मान की प्राप्ति की जा सकती है।

300 + 75 ÷ 40 = 302.

उदा. 3: 43976 ÷ 120 = ?

1) 350 2) 360 3) 365 4) 378 5) 385

हल: यहाँ भाजक 10 का एक आवर्त्य है, जिसमें किसी भी प्रकार के परिवर्तन की कोई जरूरत नहीं है। हमलोग भाज्य का मान बढ़ाकर 44000 कर देते हैं। इस प्रकार वास्तविक मान प्राप्त मान से थोड़ा कम होना चाहिए। इस प्रकार, वास्तविक मान = $\frac{44000}{120} = 366$

इस प्रकार हमारा उत्तर है: 365

उदा. 4: 562895 ÷ 298 = ?

1) 1800 2) 1850 3) 1900 4) 1950 5) 2000

yourmahboob

हल: भाजक में 2 की वृद्धि करनी है। इसलिए, भाज्य में $2 \times 1900 = 3800$ की वृद्धि की जानी चाहिए।

तब, $562895 + 298 \approx (562900 + 3800) \div 300$

$= 566700 \div 300 \approx 1888 \approx 1900$

प्रतिशत (Percentage)

प्रतिशत मान के भिन्न भिन्न प्रकार के लिए, हम निम्न भिन्न मानों का प्रयोग करेंगे।

I. जब प्रतिशत मान 100 के निकट है (अर्थात् प्रसार या range 90% से 110% के बीच)

इस स्थिति में निम्नलिखित नियम का पालन किया जाता है: A का $(100 + x)\%$

$$= A \text{ का } 100\% \pm A \text{ का } x\% = A \pm \frac{Ax}{100}$$

उदा. 1: 369 का 150% = ?

1) 380 2) 390 3) 400 4) 405 5) 410

हल: 369 का 501% $= 369 - 5 \times 3.69$

$\approx 369 + 5 \times 3.7 \approx 369 + 18 = 387 \approx 390$

उदा. 2: 551 का 93%

1) 498 2) 505 3) 510 4) 520 5) 522

हल: 551 का 93% = 551 − 551 का 7%

$\approx 551 - 7 \times 5.5 \approx 551 - 38.5 = 512.5 \approx 510$

II. जब प्रतिशत मान को 100 के करीब लाया जा सकता हो

उदा. 3: 560 का 24% = ?

1) 129 2) 131 3) 135 4) 140 5) 147

हल: 560 का 24% = $\frac{560}{4}$ का 96% = 140 का 96%

अब, आप इसे हल कर सकते हैं।

उदा. 4: 669 का 212% = ?

1) 1400 2) 1415 3) 1425 4) 1450 5) 1360

हल: 669 का 212% = 669×2 का 106% = 1338 का 106%

अब, आप इसे स्वयं हल करें।

III. जब प्रतिशत मान 50 के करीब हो या 50 के करीब लाया जा सकता हो

उदा. 5: 234 का 47% = ?

1) 100 2) 110 3) 117 4) 120 5) 125

हल: 234 का 47% = 234 का 50% − 234 का 3% = 234 का $\frac{1}{2}$ − 3×2.34

$\approx 117 - 7 = 110$

उदा. 6: 47 का 234% = ?

हल: 47 का 234% = 234 का 47% उदा. 5 देखें।

yoursmahboob

उदा. 7: 165 का 153% = ?

1) 225 2) 240 3) 250 4) 260 5) 265

हल: 165 का 153% = 495 का 51% = 495 का 50% + 495 का 1%

= 247.5 + 4.95 ≈ 252 ≈ 250

IV. जब प्रश्न x का x% के रूप में हो

उदा. 8: 71 का 71% = ?

1) 49 2) 50 3) 50.5 4) 51 5) 51.4

हल: निम्नलिखित विधि का इस्तेमाल करें

(70 + 1) का (70 + 1)% = 70 का 70% + 70 का 1% + 1 का 70% + 1 का 1%

= 70 का 70% + 1 का 70% + 1 का 70%

(∵ 1 का 1% नजरंदाज किया जा सकता है। साथ ही, 70 का 1% = 1 का 70%)

= 70 का 70% + 2 × (1 का 70%) ..... (*)

= 49 + 2 × 0.7 = 50.4 ≈ 50.5

नोट: अन्तिम (*) वाला चरण याद रखना होगा। आरंभिक चरणों को दुहराए बिना इसी चरण से आरंभ करें।

उदा. 9: 86 का 86% = ?

1) 70 2) 74 3) 79 4) 82 5) 85

हल: 80 का 80% + 2 × 6 का 80%

64 + 2 × 6 × 0.8 = 64 + 9.6 = 73.6 ≈ 74

उदा. 10: 128 का 128% = ?

1) 155 2) 160 3) 165 4) 170 5) 172

हल: 130 का 130% − 2 × 2 का 130% = 169 − 4 × 1.3 = 169 − 5.2 = 163.8 ≈ 165

V. जब प्रश्न x का x% के रूप में हो तथा इकाई अंक 5 हो

उदा. 11: 85 का 85% = ?

1) 70 2) 72 3) 74 4) 76 5) 80

हल: जब इकाई के स्थान पर 5 हो तो संख्या का वर्ग निकालने की विशिष्ट विधि से हम वाकिफ हैं। 85 × 85 = 7225

∴ 85 का 85% = 72.25 ≈ 72

नोट: आप किसी भी प्रतिशत मान के लिए हल कर सकते हैं, शर्त केवल इतनी है कि हमें 10 के अपवर्त्य के करीब ले आएँ।

उदाहरण के लिए,

(1) 6897 का 12% ≈ 6900 का 10% + 6900 का 2% = 690 + 138 = 828

(2) 5699 का 28% ≈ 5700 का 30% − 5700 का 2% = 1710 − 114 = 1596 ≈ 1600

(3) 6680 का 81% = 6680 का 80% + 6680 का 1% = 5344 + 66.8 ≈ 5277

yoursmahboob

क्रमचय एवं संचय

(Permutation and Combination)

क्रमचय एवं संचय को समझने के लिए हम दो उदाहरण लेते हैं:

उदा. 1: एक समतल में दिए हुए चार बिन्दुओं A, B, C एवं D से कितने त्रिभुज बन सकते हैं? यह दिया हुआ है कि 3 बिन्दु एकरेखस्थ (collinear) नहीं हैं। तीन बिन्दुओं A, B एवं C से केवल एक ही त्रिभुज बन सकता है। किस बिन्दु से आरम्भ किया जाता है यह महत्वपूर्ण नहीं है। यद्यपि कि बिन्दुओं का क्रम अलग अलग हो सकता है। भिन्न-भिन्न क्रम निम्नलिखित प्रकार के हो सकते हैं : ABC, ACB, BAC, BCA, CAB एवं CBA, लेकिन इन सभी स्थितियों में जितने त्रिभुज (जैसे ΔABC, ΔACB, ΔBAC, ΔBCA, ΔCAB एवं ΔCBA) बनते हैं वे सभी एक ही हैं। चार बिन्दुओं A, B, C एवं D से अधिकतम चार त्रिभुज बन सकते हैं। वे निम्नलिखित हैं: ΔABC, ΔABD, ΔACD एवं ΔBCD।

उदा. 2: चार अंक 1, 2, 3 एवं 4 से 3 अंकों के कितना 'नम्बर प्लेट' बन सकता है?

यहाँ अंकों का क्रम महत्वपूर्ण है। अंक 1, 2 एवं 3 के लिए विभिन्न व्यवस्थाएँ (arrangements) निम्नलिखित हैं: 123, 132, 213, 231, 312 एवं 321।

यहाँ कुल नंबर प्लेट (123, 132, 213, 231, 312 एवं 321) 6 विभिन्न गाड़ियों के हैं। जबकि उदा. 1 में सभी 6 त्रिभुज एक ही थे।

3 अंकों वाली नम्बर प्लेटों की कुल संख्या $= 4 \times 3 \times 2 = 24$

(3 अंकों वाले नम्बर प्लेटों पर निम्नलिखित नम्बर लिखे होंगे : 123, 132, 124, 142, 134, 143, 213, 231, 214, 241, 234, 243, 312, 321, 314, 341, 324, 342, 412, 421, 413, 431, 423, एवं 432)

नोट: उदा. 1 एक संचय (Combination) का उदाहरण है जबकि उदा. 2 क्रमचय (Permutation) का उदाहरण है

उदा. 1 से त्रिभुजों की कुल संख्या $= {}^4C_3 = \dfrac{4!}{3!(4-3)} = 4$

Factorial Notation: 1 से प्रारम्भ होने वाले 'n' लगातार धनात्मक पूर्णांकों के गुणनफल को n! या $\underline{|n}$ से निरूपित किया जाता है और इसे 'factorial n' पढ़ा जाता है। (5! या $\underline{|5}$ को 'factorial' पढ़ें एवं 13! को 'factorial 13' पढ़ा जाता है)

$$\therefore\ n! = 1 \times 2 \times \ldots\ldots\ldots \times (n-2) \times (n-1) \times n$$

$$= n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots\ldots \times 2 \times 1$$

yoursmahboob

उदाहरण के लिए, $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$
$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$
$3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$
$2! = 2 \times 1 = 2$

$$\frac{9!}{4!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{4 \times 3 \times 2 \times 1}$$

$$= \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4!}{4!} = 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 = 15120$$

$$\frac{3!}{7!} = \frac{3!}{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3!} = \frac{1}{7 \times 6 \times 5 \times 3} = \frac{1}{840}$$

यदि r एवं n दो धनात्मक पूर्णांक हों तथा $r > n$, तो

$$\frac{n!}{r!} = \frac{n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots\ldots \times 2 \times 1}{r \times (r-1) \times \ldots\ldots \times 2 \times 1}$$

$$= n \times (n-1) \times \ldots\ldots \times (r+1)$$

इसी प्रकार, $\frac{n!}{(n-r)!} = n \times (n-1) \times \ldots\ldots \times (n-r+1)$

व्यवस्था (arrangement): मान लिया कि हमारे पास चार विभिन्न वस्तुएँ A, B, C एवं D हैं। इन चार वस्तुओं से दो दो वस्तुओं का एक समूह बनाना है।

दूसरे शब्दों में, दिए हुए 4 वस्तुओं के समूह में से 2 वस्तुओं को एक साथ लेकर हमें एक समूह बनाना है।

स्पष्टतः हमारे पास इस प्रकार 6 समूह होंगे। (i) A एवं B (ii) A एवं C (iii) A एवं D (iv) B एवं C (v) B एवं D (vi) C एवं D

सांकेतिक निरूपण (notational representation) से इस प्रकार के समूहों की कुल संख्या

$$= {}^4C_2 = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{4!}{2! \times 2!} = 6$$

अब, प्रत्येक समूह के दो वस्तुओं को दो भिन्न भिन्न तरीके से सजाया (arranged) जा सकता है:

(i) A एवं B तथा B एवं A (ii) A एवं C तथा C एवं A और इसी तरह से आगे भी।

इसलिए, इस प्रकार की कुल 12 व्यवस्थाएँ (arrangements) हैं।

व्यवस्थाओं की कुल संख्या (total no. of arrangements) = समूहों की संख्या (total no. of groups) $\times r!$ जहाँ, r प्रत्येक समूह में वस्तुओं की संख्या है। उपर्युक्त उदाहरण में व्यवस्थाओं (arrangements) की कुल संख्या $= 6 \times 2! = 6 \times (2 \times 1) = 12$

yoursmartbook

क्रमचय की परिभाषा (Definition of Permutation)

दिए हुए वस्तुओं में से कुछ या सभी वस्तुओं को एक साथ लेकर बनाए जा सकने वाले विभिन्न व्यवस्थाओं को क्रमचय या Permutation कहा जाता है। दिए हुए n विभिन्न वस्तुओं में से r वस्तुओं को एक साथ लेकर बनाए जाने वाले व्यवस्थाओं की संख्या को ^nP_r से निरूपित किया जाता है। यहाँ अक्षर 'P' Permutation के लिए प्रयुक्त हुआ है।

$$\therefore {}^nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

इस प्रकार $^9P_4$ निरूपित करता है : 9 विभिन्न वस्तुओं में से 4 वस्तुओं को एक साथ लेकर बनाए जाने वाले क्रमचयों (permutations) या व्यवस्थाओं (arrangements) की संख्या को एवं

$$^9P_4 = \frac{9!}{(9-4)!} = \frac{9!}{5!}$$

$$= 9 \times (9-1) \times (9-2) \times (9-3) = 9 \times 8 \times 7 \times 6 = 3024$$

संचय की परिभाषा (Definition of Combination)

दिए हुए वस्तुओं में से कुछ या सभी वस्तुओं को एक साथ लेकर बनाए जाने वाले विभिन्न चयनों (selections) या समूहों (groups) को संचय (combination) कहा जाता है।

n विभिन्न वस्तुओं में से r वस्तुओं को एक साथ लेकर बनाए जाने वाले विभिन्न संचयों (Combinations) को चिह्न ^nC_r से निरूपित किया जाता है। अक्षर 'C' Combination के लिए प्रयुक्त हुआ है।

$$\therefore {}^nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

इस प्रकार, चिह्न $^9C_4$ निरूपित करता है : 9 विभिन्न वस्तुओं के समूह में से 4 वस्तुओं को एक साथ लेकर बनाए जाने वाले चयनों (selections) या समूहों (groups) को। एवं

$$^9C_4 = \frac{9!}{4!(9-4)!} = \frac{9!}{4!5!} = \frac{9\times8\times7\times6\times5!}{4\times3\times2\times1\times5!} = 126$$

नोट: Arrangement में, व्यवस्थाओं (arrangements) की कुल संख्या = समूहों या चयनों की कुल संख्या $\times r!$

जहाँ, r = प्रत्येक समूह (group) या चयन (selection) में वस्तुओं की संख्या,

$\therefore {}^nP_r = {}^nC_r \times r!$

उदाहरण के लिए $^9P_4 = 4! \times {}^9C_4$

गिनती के कुछ मूलभूत सिद्धांत (Some Fundamental Principles of Counting)

1. गुणा का नियम (Multiplication Rule):

मान लिया कि एक व्यक्ति अपनी यात्रा स्थान X से प्रारंभ करता है तथा उसे एक भिन्न जगह Y से होकर जगह Z तक जाना है। X से Y के लिए आवागमन के तीन साधन उपलब्ध हैं;

yourshalbooo

बस, रेलगाड़ी तथा हवाई जहाज। Y से Z के लिए हवाई जहाज की सेवा उपलब्ध नहीं है।

वह Y से Z तक केवल या तो बस से जा सकता है या रेलगाड़ी से। तथा X से Z के लिए, सीधा न कोई बस सेवा है न ही कोई रेल सेवा। हमें X से Z तक की अधिकतम संभव रास्ते की संख्या ज्ञात करना है जिससे होकर वह X से Z तक पहुँच सकता है।

X से Y तक जाने के लिए प्रत्येक आवागमन के साधन के लिए, Y से Z तक जाने के लिए दो आवागमन के साधन हैं। इस प्रकार Y से होकर X से Z तक जाने के लिए कुल तरीकों की संख्या (no. of ways)

= 2 (पहला, बस से Y तक तथा पुनः Y से Z तक बस से; दूसरा: बस से Y तक तथा उसके बाद रेलगाड़ी से Z तक।)

+ 2 (पहला, रेलगाड़ी से Y तक तथा उसके बाद बस से Z तक, दूसरा रेलगाड़ी से Y तक उसके बाद रेलगाड़ी से Z तक।)

+ 2 (पहला, हवाई जहाज से Y तक तथा उसके बाद बस से Z तक; दूसरा हवाई जहाज से Y तक तथा उसके बाद रेलगाड़ी से Z तक।)

$= 3 \times 2 = 6$ होगा

निष्कर्ष:

यदि एक काम A को m तरीकों से किया जा सकता है तथा एक दूसरा काम B जिसको n तरीकों से किया जा सकता है तथा अंतिम काम C को तभी किया जा सकता है जब काम A एवं B दोनों किया जा चुका हो तो अंतिम काम C को करने के तरीकों की संख्या $= m \times n$.

उपर्युक्त उदाहरण में, मान लिया कि X से Y तक पहुँचने का काम = काम $A \rightarrow m$ अर्थात् 3 तरीकों से। Y से Z तक पहुँचने का काम = काम $B \rightarrow n$ अर्थात् 2 तरीकों से। तो X से Z तक पहुँचने का अंतिम काम = अंतिम काम $C \rightarrow m \times n$ अर्थात् $3 \times 2 = 6$ तरीकों से।

II. जोड़ का नियम (Addition Rule):

मान लिया कि एक पार्टी में 42 आदमी तथा 16 औरतें हैं। प्रत्येक आदमी केवल सभी आदमियों से ही हाथ मिलाता है तथा प्रत्येक औरत केवल सभी औरतों से ही अपना हाथ मिलाती है। हमें पार्टी में कुल हस्तमिलापों (handshakes) की अधिकतम संख्या ज्ञात करनी है।

प्रत्येक समूह से दो व्यक्तियों के बीच एक हस्तमिलाप होता है।

स्थिति I: 42 आदमियों के समूह में कुल हस्तमिलापों की संख्या

$$= {}^{42}C_2 = \frac{42!}{2!(42-2)!} = \frac{42!}{2!40!} = \frac{42 \times 41 \times 40!}{2 \times 1 \times 40!} = 21 \times 41 = 861$$

स्थिति II: 16 औरतों के समूह में कुल हस्तमिलापों की संख्या

$$= {}^{16}C_2 = \frac{16!}{2!(16-2)!} = \frac{16 \times 15 \times 14!}{2 \times 1 \times 14!} = 8 \times 15 = 120$$

$\therefore$ हस्तमिलापों की कुल संख्या $= 861 + 120 = 981$

yourmahboob

प्रदत्त n विभिन्न वस्तुओं में से r वस्तुओं को एक साथ लेकर बनाए गए व्यवस्थाओं (permutations or arrangements) की कुल संख्या ज्ञात करना:

मान लिया कि एक विद्यार्थी के पास 3 किताबें B_1, B_2 तथा B_3 हैं। तथा उसके किताब की रैक में केवल 3 शेल्फ हैं। उसे इन शेल्फों में किताबों को व्यवस्थित करना है।

स्थिति I: वह प्रत्येक शेल्फ में एक किताब रखता है।

वह पहले शेल्फ में तीनों किताबों में से किसी एक को रखता है। अब उसके पास 2 किताबें शेष हैं और वह दूसरे शेल्फ में इन दो किताबों में से किसी एक को 2 तरीके से रख सकता है। अब उसके पास मात्र एक किताब बच जाती है जिसको वह तीसरे शेल्फ में 1 तरीका से रख सकता है।

कुल तरीकों की संख्या जिसमें वह किताबों को शेल्फ में रख सकता है

$= 3 \times 2 \times 1 = 3! = 6$

स्थिति II: वह दो किताबों को एक साथ एक शेल्फ में रखता है तथा शेष 1 किताब को दूसरे शेल्फ में।

वह 3 विभिन्न किताबों में से दो किताबों को एक साथ एक शेल्फ में $^3P_2$ तरीके से रख सकता है। शेष एक किताब को बचे हुए दो शेल्फों में से किसी एक शेल्फ में 1 तरीका से रख सकता है।

$\therefore$ किताबों को रखने के कुल तरीकों की संख्या

$$= {}^3P_2 \times 1 = {}^3P_2 = \frac{3!}{(3-2)!} = \frac{3!}{1!} = 3! = 6$$

स्थिति III: वह तीनों किताबों को एक साथ किसी एक शेल्फ में रखता है।

वह तीन किताबों को किसी एक शेल्फ में निम्नलिखित में से किसी एक क्रम में रख सकता है:

जब किताब B_1 सबसे ऊपर रखी जाती है तो B_2 एवं B_3 को 2 तरीकों से रखी जा सकती है: B_2 बीच में एवं B_3 सबसे नीचे तथा B_3 बीच में एवं B_2 सबसे नीचे। इसलिए हम देखते हैं कि यदि किताब B_1 सबसे ऊपर किसी एक शेल्फ में रखी जाती है तो कुल दो तरीकों की व्यवस्थाएँ (arrangements) हैं।

उसी प्रकार जब B_2 को सबसे ऊपर रखा जाता है तो 2 तरीके की व्यवस्थाएँ हैं तथा जब B_3 को सबसे ऊपर रखा जाता है तो 2 तरह की व्यवस्थाएँ हैं।

$\therefore$ किताबों को रखने के तरीकों की कुल संख्या $= 2 + 2 + 2 = 3 \times 2 (= 3!) = 6$

हम देखते हैं कि उपर्युक्त सभी स्थितियों में तीनों किताबों को रखने के तरीकों की कुल संख्या $= 3!$ है।

yourmanboob

इस प्रकार, हम इस निष्कर्ष पर पहुँचते हैं कि प्रत्त n विभिन्न वस्तुओं में से सभी वस्तुओं (n वस्तुएँ) को एक साथ लेकर बनाए गए व्यवस्थाओं (arrangements) की कुल संख्या $= {}^nP_n = n!$ .....(i)

अब, हम जानते हैं कि

$$ {}^nP_r = \frac{n!}{(n-r)!} $$

$$ \therefore {}^nP_r = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} \quad .....(ii) $$

$\therefore$ (i) एवं (ii) से,

$$ n! = \frac{n!}{0!} \text{ या } 0! = \frac{n!}{n!} = 1 $$

इस प्रकार हमें $0! = 1$ प्राप्त होता है।

n विभिन्न वस्तुओं में से r वस्तुओं को एक साथ लेकर, जहाँ प्रत्येक वस्तु की पुनरावृत्ति (repetition) कितनी बार भी हो सकती है, बनाए गए व्यवस्थाओं (permutations या arrangements) की कुल संख्या ज्ञात करना:

नोट: ${}^nP_r$ (n विभिन्न वस्तुओं में से r वस्तुओं को एक साथ लेकर बनाए गए व्यवस्थाओं की संख्या $= \frac{n!}{(n-r)!}$, जबकि पुनरावृत्ति की अनुमति नहीं है।

अब, मान लिया कि एक पेंटर जो किसी गाड़ी के नंबर प्लेटों पर लिखे चार अंकों की संख्या को रंगता है। इन चार अंकों की संख्याओं को अंक 1, 2, 3, ..., 9 का प्रयोग कर बनाना है तथा अंकों की पुनरावृत्ति की अनुमति है (अर्थात् वह 1111, 1112, 1211, 1121, 1221, 2121 इत्यादि संख्याओं को रंग सकता है)

हजार स्थान	सैकड़ा स्थान	दहाई स्थान	इकाई स्थान
9 अंकों 1, 2, 3, ... 9 में से कोई एक अंक 9 तरीकों से			

वह नम्बर प्लेट पर 9 अंकों 1, 2, 3, 4, ..., 9 में से कोई एक अंक हजार स्थान पर 9 तरीकों (ways) से लिख सकता है।

हजार स्थान पर एक अंक लिखने के बाद उसके पास पुनः 9 अंक 1, 2, 3, 4, ..., 9 रह जाते हैं क्योंकि पुनरावृत्ति (repetition) की अनुमति है इसलिए वह सैकड़ा स्थान पर भी 9 तरीकों से लिख सकता है। उसी प्रकार वह दहाई एवं इकाई स्थान पर भी 9 तरीकों से लिख सकता है। इस प्रकार वह कुल $9 \times 9 \times 9 \times 9$ ($= 9 \times 9$..... 4 बार $= 9^4$) $= 6561$ नंबर प्लेट लिख सकता है।

yousmahboob

अब, हम इस निष्कर्ष पर पहुँचते हैं कि n विभिन्न वस्तुओं में से r वस्तुओं को एक साथ लेकर जहाँ पुनरावृत्ति की अनुमति है (repetition is allowed) बनाए गए व्यवस्थाओं (permutations या arrangements) की कुल संख्या $= n^r$

अब, मान लिया कि चेंबर को नंबर प्लेटों पर सभी 10 अंकों (0, 1, 2, ... 9) का प्रयोग करते हुए बनाए गए 4 अंकों की संख्याओं के लिए है तथा अंकों की पुनरावृत्ति की भी अनुमति है।

हजार स्थान	सैकड़ा स्थान	दहाई स्थान	इकाई स्थान
9 अंकों 1, 2, 3, ..., 9 में से कोई एक अंक 9 तरीकों से	10 अंकों 0, 1, 2, 3, ..., 9 में से कोई एक अंक 10 तरीकों से	उसी प्रकार 10 तरीकों से	उसी प्रकार 10 तरीकों से

नोट: यदि वह हजार स्थान पर 0 रखता है तो 4 अंकों की संख्या, 3 अंकों की संख्या में बदल जाएगी। इसलिए वह ऐसा नहीं कर सकता है।

$\therefore$ अभीष्ट कुल संख्या $9 \times 10 \times 10 \times 10 = 9000$

परीक्षा की दृष्टि से निम्नलिखित कुछ परिणाम काफी उपयोगी हैं

(i) यदि $^nC_x = {}^nC_y$ हो तो $x = y$ या $x + y = n$

(ii) n वस्तुओं को, जिनमें p वस्तुएँ एक समान हैं एवं एक प्रकार के हैं, q वस्तुएँ एक समान हैं एवं दूसरे प्रकार के हैं तथा शेष सभी भिन्न भिन्न प्रकार के हैं, व्यवस्थाओं (permutations) की कुल संख्या $= \dfrac{n!}{p!q!}$

(iii) n एकरूप (identical) वस्तुओं में से r वस्तुओं के $(r \le n)$ कुल चयनों (selections) की संख्या $= 1$

(iv) n एकरूप (identical) चीजों में से शून्य या उससे अधिक चीजों के चयनों (selections) की कुल संख्या $= n + 1$

(v) n भिन्न भिन्न (different) वस्तुओं में से शून्य या उससे अधिक वस्तुओं के चयनों (selections) की कुल संख्या $= {}^nC_0 + {}^nC_1 + {}^nC_2 + \dots + {}^nC_n = 2^n$

(vi) n एकरूप (identical) वस्तुओं को r व्यक्तियों के बीच बाँटने (distribute या divide), जहाँ कोई भी व्यक्ति कितनी भी संख्या में वस्तु प्राप्त कर सकता है, के तरीकों की कुल संख्या $= {}^{r+n-1}C_{r-1}$

हल किए हुए प्रश्न:

उदा. 1: यदि $^nP_3 = 210$ तो n ज्ञात करें।

हल: $\dfrac{n!}{(n-3)!} = 210$ या, $n \times (n-1) \times (n-2) = 7 \times 6 \times 5$ $\therefore$ $n = 7$

yoursmahboob

उदा. 2: यदि $^7P_r = 210$ तो r ज्ञात करें

हल: $\frac{7!}{(7-r)!} = 210$

या, $7 \times 6 \times \ldots\ldots \times (7-r+1) = 7 \times 6 \times 5$

$\Rightarrow 7-r+1 = 5$ या, $8-r = 5$ $\therefore r = 8-5 = 3$

उदा. 3: यदि $^{m+n}P_4 = 3024$ एवं $^{m-n}P_4 = 120$, तो m और n ज्ञात करें ।

हल: $^{m+n}P_4 = \frac{(m+n)!}{(m+n-4)!}$

$= (m+n) \times (m+n-1) \times (m+n-2) \times (m+n-3)$

$= 3024 = 9 \times 8 \times 7 \times 6$

$\therefore m+n = 9 \ldots\ldots (i)$

पुनः $^{m-n}P_4 = (m-n) \times (m-n-1) \times (m-n-2) \times (m-n-3)$

$= 120 = 5 \times 4 \times 3 \times 2$

$\Rightarrow m-n = 5 \ldots\ldots (ii)$

(i) एवं (ii) से $m = 7$ एवं $n = 2$

उदा. 4: यदि $^nC_2 = {}^nC_5$ है n ज्ञात करें ।

हल: $\frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n!}{5!(n-5)!}$

या, $5!(n-5)! = 2!(n-2)!$

या, $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times (n-5)! = 2 \times (n-2) \times (n-3) \times (n-4) \times (n-5)!$

या, $5 \times 4 \times 3 = (n-2) \times (n-3) \times (n-4)$

$\therefore n-2 = 5$ या, $n = 7$

नोट: जब कभी $^nC_x = {}^nC_y$ एवं $x \neq y$ तो n को x + y के अवश्य ही बराबर होना चाहिए। यहाँ, $2 \neq 5 \therefore n = 2+5 = 7$

उदा. 5: किसी अष्टभुज (Octagon) के शिर्षों को मिलाकर कितने समान्तर चतुर्भुज (quadrilaterals) बनाए जा सकते हैं?

हल: एक समान्तर चतुर्भुज की चार भुजाएँ या 4 शिर्ष होते हैं जबकि एक अष्टभुज की 8 भुजाएँ या 8 शिर्ष होते हैं।

$\therefore$ अभीष्ट समानांतर चतुर्भुजों की संख्या $= {}^8C_4 = \frac{8!}{4!(8-4)!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5}{24} = 70$

उदा. 6: अंक 1, 3, 5, 7 एवं 9 से पाँच अंकों की कितनी संख्याएँ बनायी जा सकती हैं। (किसी भी अंक की पुनरावृत्ति नहीं होनी चाहिए)

yoursmahboob

हल: प्रदत्त अंकों की संख्या = 5 ∴ अभीष्ट संख्या $= {}^5P_5 = 5! = 120$

नोट: यदि अंकों की पुनरावृत्ति की अनुमति हो तो अभीष्ट संख्या $= 5^5 = 3125$

उदा. 7: अंक 0, 2, 4, 6 एवं 7 से पाँच अंकों की कितनी संख्याएँ बनायी जा सकती हैं?

हल:

दस हजार स्थान	हजार स्थान	सैकड़ा स्थान	दहाई स्थान	इकाई स्थान
${}^4P_1$ अर्थात् 4 तरीके से (2, 4, 6, 8 में से कोई भी एक)	दस हजार स्थान को भरने के बाद हमारे पास चार अंक (0 को शामिल करके) बच जाते हैं तथा खाली स्थानों की संख्या भी 4 है ∴ ${}^4P_1 = 4! = 24$ तरीके से			

∴ अभीष्ट संख्या $= 4 \times 24 = 96$

नोट: 1. यदि अंकों की पुनरावृत्ति की अनुमति हो तो अभीष्ट संख्या $= 4 \times 5^4 = 2500$

2. दस हजार स्थान के लिए हम अंक 0 नहीं रख सकते हैं।

उदा. 8: अंक 0, 1, 2, 3, 4, 6 एवं 8 से 5 अंकों की कितनी संख्याएँ बनायी जा सकती हैं?

हल: यहाँ अंकों की पुनरावृत्ति (repetition) के बारे में कुछ भी नहीं कहा गया है इसका तात्पर्य है कि अंकों की पुनरावृत्ति की अनुमति नहीं है

दस हजार स्थान	हजार स्थान	सैकड़ा स्थान	दहाई स्थान	इकाई स्थान
${}^6P_1 = 6$ तरीके से 0 को शामिल नहीं करने के	दस हजार स्थान को भरने के बाद हमारे पास 6 अंक (0 को शामिल करके) रह जाते हैं तथा खाली स्थान 4 हैं। इसलिए ${}^6P_2 = 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360$ तरीकों से			

∴ अभीष्ट कुल संख्या $6 \times 360 = 2160$

उदा. 9: अंक 0, 1, 2, 3, 4, 5 एवं 6 से 3 अंकों की कितनी संख्याएँ बनायी जा सकती हैं?

हल: ***स्थिति I:*** इकाई स्थान पर जब 0 आता है।

सैकड़ा स्थान	दहाई स्थान	इकाई स्थान
${}^6P_2 = 6 \times 5 = 30$ तरीकों से		केवल 0 अर्थात् 1 तरीका से

∴ इस प्रकार की कुल संख्याएँ $= 30 \times 1 = 30$

स्थिति II: जब इकाई स्थान पर 0 नहीं आता है

सैकड़ा स्थान	दहाई स्थान	इकाई स्थान
इकाई स्थान को भरने के बाद हमारे पास 6 अंक बच जाते हैं लेकिन 0 सैकड़ा स्थान पर नहीं आ सकता है। अतः हमारे पास 5 अंक बच जाते हैं, इसलिए ${}^5P_1 = 5$ तरीकों से	इकाई स्थान एवं सैकड़ा स्थान को भरने के बाद हमारे पास 6 अंक बच जाते हैं। (0 को शामिल करके) इसलिए 5 तरीकों से	2, 4 एवं 6 में से कोई भी 3 तरीके से

yoursmabbooo

इस प्रकार की कुल संख्या $= 5 \times 5 \times 3 = 75$

$\therefore$ अभीष्ट संख्या $= 30 + 75 = 105$

उदा. 10: अंक 0, 1, 2, 4, 5, 8, 9 से वैसी संख्याएँ जो 800 से बड़ी तथा 4000 से छोटी हों कितनी बन सकती हैं? किसी भी संख्या में कोई भी अंक एक बार से ज्यादा प्रयुक्त नहीं हुआ हो।

हल: ***स्थिति I:*** 3 अंकों की संख्या :

सैकड़ा स्थान	दहाई स्थान	इकाई स्थान
8 या 9 अर्थात् 2 तरीके से	$^7P_2 = 7 \times 6 = 42$ तरीके से	

$\therefore$ कुल संख्या $= 2 \times 42 = 84$

स्थिति II: 4 अंकों की संख्या:

हजार स्थान	सैकड़ा स्थान	दहाई स्थान	इकाई स्थान
1 या 2 अर्थात् 2 तरीके से	$^7P_3 = 7 \times 6 \times 5 = 210$ तरीके से		

$\therefore$ कुल संख्या $= 2 \times 210 = 420$

$\therefore$ अभीष्ट संख्या $= 84 + 420 = 504$

उदा. 11: 'DELHI' शब्द में प्रयुक्त अक्षरों से बनाए जाने वाले वैसे शब्दों की संख्या ज्ञात करें

(i) जो D से शुरू होता है।

(ii) जिसके अंत में I हो।

(iii) जिसका अक्षर L हमेशा बीच में हो एवं

(iv) जो D से शुरू होता है तथा I से अंत होता है।

हल: 'DELHI' शब्द में 5 अक्षर हैं।

स्थिति (i):

D				
1 तरीका	$^4P_4 = 24$ तरीके			

$\therefore$ अभीष्ट संख्या $= 1 \times 24 = 24$

स्थिति (ii):

				I
$^4P_4 = 24$ तरीके				1 तरीका

$\therefore$ अभीष्ट संख्या $= 1 \times 24 = 24$

स्थिति (iii):

		L		
		1 तरीका		

शेष 4 स्थानों को $^4P_4 = 24$ तरीकों से भर सकते।

$\therefore$ अभीष्ट संख्या $= 1 \times 24 = 24$

स्थिति (iv):

D				I
1 तरीका	$^3P_3 = 6$ तरीके			1 तरीका

yoursmahboob

∴ अभीष्ट संख्या $= 6 \times 1 \times 1 = 6$

उदा. 12: 'EQUATION' शब्द के अक्षरों से कितने शब्द बनाए जा सकते हैं?

हल: ∵ विभिन्न वस्तुओं में से सभी को एक साथ लेकर बनाए गए व्यवस्थाओं (permutations या arrangements) की संख्या $^nP_n = n!$

यहाँ, शब्द 'EQUATION' में 8 अक्षर हैं

∴ अभीष्ट शब्दों की संख्या $= 8! = 40320$

उदा. 13: 'EQUATION' के अक्षरों से कितने ऐसे शब्द बनाए जा सकते हैं जिनके शुरू के अक्षर स्वर (vowel) हों?

हल: 'EQUATION' शब्द में 5 अक्षर हैं।

A E I O U							
5 तरीकों से	$^7P_7 = 7! = 5040$ तरीकों से						

∴ अभीष्ट संख्या $= 5 \times 5040 = 25200$

उदा. 14: शब्द 'INTERNATIONAL' के अक्षरों से कितने शब्द बनाए जा सकते हैं?

हल: शब्द 'INTERNATIONAL' में 13 अक्षर हैं, जिसमें N तीन बार आता है, I, T एवं A में से प्रत्येक 2 बार आता है। शेष भिन्न-भिन्न हैं

$$\therefore \text{ अभीष्ट संख्या } = \frac{13!}{3!\,2!\,2!\,2!}$$

$$= \frac{13 \times 12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2}{6 \times 2 \times 2 \times 2}$$

$$= 13 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 3 \times 2 = 129729600$$

उदा. 15: एक कतार (row) में 4 लड़कों एवं 5 लड़कियों को बारी-बारी से कितने तरीकों से बैठाया जा सकता है?

हल:

G	B	G	B	G	B	G	B	G

∵ एक चित्र लड़के एवं लड़कियों के बैठने की संभव व्यवस्था को दर्शाता है।

∴ 4 लड़के 4 जगहों पर $^4P_4 = 4!$ एवं 5 लड़कियाँ 5 जगहों पर 5! तरीकों से बैठाए जा सकते हैं।

∴ अभीष्ट तरीकों की संख्या $= 4! \times 5! = 24 \times 120 = 2880$

उदा. 16: 4 लड़के एवं 4 लड़कियाँ हैं। एक कतार में इनको इस तरह से बैठाया जाता है कि सभी लड़कियाँ एक साथ बैठती हैं। इस तरह से बैठाने के कितने तरीके हो सकते हैं?

हल: कुल व्यक्तियों (persons) की संख्या $= 4 + 4 = 8$; जब किसी तरह की कोई पाबंदी नहीं हो तो इन सभी को कतार में 8! तरीकों से बैठाया जा सकता है। परन्तु जब सभी लड़कियाँ एक साथ बैठती हों तो हम 4 लड़कियों के समूह को एक व्यक्ति मान सकते हैं। इसलिए हमारे पास केवल 4 (लड़कों की संख्या) + 1 = 5 व्यक्ति हैं। इन सभी को एक कतार में 5! तरीकों से व्यवस्थित किया जा सकता है। परंतु 4 लड़कियों को आपस में $^4P_4 = 4!$

yoursmahboob

तरीकों से व्यवस्थित (arranged) किया जा सकता है।

∴ जब सभी लड़कियाँ एक साथ हों तो तरीकों की संख्या = 5! × 4!

∴ जब सभी लड़कियाँ एक साथ नहीं बैठती हों तो तरीकों की संख्या

$$= 8! - 5! \times 4!$$
$$= 8 \times 7 \times 6 \times 5! - 5! \times 24$$
$$= 5!(336 - 24)$$
$$= 120 \times 312 = 37440$$

उदा. 17: 'EQUATION' शब्द के अक्षरों से, स्वरों (vowels) एवं व्यंजनों (consonants) के आपेक्षिक क्रम (relative order) भिन्न बदले, कितने विभिन्न शब्द बनाए जा सकते हैं?

हल: 'EQUATION' शब्द में, पाँच स्वर (vowels) E, U, A, I एवं O क्रमशः पाँच जगहों 1, 3, 4, 6 एवं 7 को घेरता है जबकि 3 व्यंजन (consonants) Q, T एवं N क्रमशः 3 जगहों 2, 5, एवं 8 को घेरता है शब्द के सभी अक्षर भिन्न-भिन्न है अर्थात् किसी भी अक्षर की पुनरावृत्ति (repetition) नहीं हुई है।

5 स्वर 5 जगहों पर $^5P_5 = 120$ तरीकों से व्यवस्थित किए जा सकते हैं जबकि 3 व्यंजन के 3 जगहों पर $^3P_3 = 3! = 6$ तरीकों से व्यवस्थित किए जा सकते हैं

∴ अपेक्षित संख्या $= 120 \times 6 = 720$

उदा. 18: 'BANANA' शब्द के अक्षरों से कैसे कितने शब्द बनाए जा सकते हैं जिनके व्यंजन सम स्थानों को घेरते हों?

हल:

1	2	3	4	5	6

शब्द 'BANANA' में कुल 6 अक्षर हैं जिसमें A तीन बार आता है तथा N दो बार। 3 व्यंजनों B एवं N (जो दो बार आता है) को 3 सम स्थानों 2, 4 एवं 6 पर $\left(\frac{3!}{2!}=\right)$ 3 तरीकों से व्यवस्थित किया जा सकता है।

शेष तीन विषम स्थानों को 3 A से $\frac{3!}{3!} = 1$ तरीका से व्यवस्थित किया जा सकता है।

∴ अपेक्षित शब्दों की कुल संख्या $= 3 \times 1 = 3$

उदा. 19: 6 एकरूप (identical) बक्सों में 4 एकरूप गेंदों को कितने तरीके से डाला जा सकता है, यदि एक बक्सा में एक से अधिक गेंदें नहीं रखी जा सकती हों?

हल: एकरूप गेंदों की संख्या = 4 एवं एकरूप बॉक्सों की संख्या = 6

अब, 4 एकरूप गेंदों को 6 एकरूप बॉक्स में जहाँ एक बॉक्स में एक से अधिक गेंदें नहीं जा सकते हैं डालने का मतलब है 6 बॉक्सों में से 4 बॉक्सों का चयन करना (select), जो कि $^6C_4 = \frac{6!}{4!2!} = 15$ तरीकों से किया जा सकता है।

उदा. 20: 12 भुजाओं वाले एक बहुभुज के शीर्षों (vertices) को मिलाने से बने त्रिभुजों की कुल संख्या ज्ञात करें।

yoursmahboob

हल: m भुजाओं को एक बहुभुज के m शीर्ष होते हैं। बहुभुज के किसी भी तीन शीर्षों के मिलाने से एक त्रिभुज बनेगा।

$\therefore$ त्रिभुजों की संख्या $= {}^mC_3 = \dfrac{m!}{3!(m-3)!}$

$$= \frac{m\times(m-1)\times(m-2)\times(m-3)!}{6\times(m-3)!}$$

$$= \frac{m\times(m-1)\times(m-2)}{6}$$

अब $m = 12$ रखने पर,

त्रिभुजों की अभीष्ट संख्या $= \dfrac{12\times11\times10}{6} = 220$

उदा. 21: 12 भुजाओं के एक बहुभुज के विकर्णों की संख्या बताएँ।

हल: m भुज वाले बहुभुज के m शीर्ष होते हैं।

बहुभुज का एक विकर्ण या एक भुज बहुभुज के दो शीर्षों को मिलाने से बनता है।

बहुभुज के विकर्णों की संख्या + बहुभुज की भुजाओं की संख्या $(= m) = {}^mC_2$

$\therefore$ बहुभुज के विकर्णों की संख्या $= {}^mC_2 - m$

$$= \frac{m!}{2!(m-2)!} - m = \frac{m\times(m-1)}{2} - m$$

$$= \frac{m\times(m-1)-2m}{2} = \frac{m(m-3)}{2}$$

$m = 12$ रखने पर, विकर्णों की अभीष्ट संख्या $= \dfrac{12\times9}{2} = 54$

उदा. 22: एक पार्टी में प्रत्येक व्यक्ति प्रत्येक दूसरे व्यक्ति से हाथ मिलाता है। यदि पार्टी में कुल हस्तमिलापों (handshakes) की संख्या 210 हो तो पार्टी में उपस्थित व्यक्तियों की संख्या ज्ञात करें।

हल: प्रत्येक दो व्यक्तियों के चयन (selection) के लिए एक हस्तमिलाप (handshake) होगा। इसलिए, पार्टी में हस्तमिलापों की संख्या ${}^nC_2$ होगी; n = पार्टी में उपस्थित व्यक्तियों की संख्या

अब, ${}^nC_2 = 210$ (दिया हुआ है)

या, $\dfrac{n\times(n-1)}{2} = 210$

या, $n\times(n-1) = 2\times(2\times3\times5\times7) = 21\times20$

$\therefore n = 21$

उदा. 23: एक 5 सदस्यों की प्रतिनिधिमंडल (delegation) को विदेश भेजी जानी है। सदस्यों की कुल संख्या 10 है। चयन (selection) कितने तरीके से की जा सकती है ताकि एक खास

yoursmahbub

सदस्य हमेशा (i) शामिल हो तथा (ii) शामिल नहीं हो?

हल: एक खास सदस्य का चयन $^{1}C_{1} = 1$ तरीके से किया जा सकता है। किसी खास सदस्य के चयन के बाद हमारे पास 9 सदस्य बच जाते हैं तथा प्रतिनिधिमंडल के लिए हमें 4 और सदस्यों की आवश्यकता है इसलिए चयन $^{9}C_{4}$ तरीकों से किया जा सकता है।

$\therefore$ चयन करने के अभीष्ट तरीके $= {}^{1}C_{1} \times {}^{9}C_{4}$

$$= \frac{1 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6}{24} = 126$$

(ii) जब एक खास व्यक्ति को पाँच सदस्यीय प्रतिनिधिमंडल से हमेशा अलग रखा जाता है तो हमारे पास $(10-1=)$ 9 सदस्य बच जाते हैं।

इसलिए चयन $^{9}C_{5}$ तरीके से किया जा सकता है।

$\therefore$ अभीष्ट संख्या $= {}^{9}C_{5} = 126$

उदा. 24: एक समतल में दिए गए 11 बिन्दुओं (जिनमें से 5 एकरेखीय (collinear) हैं) से बनाए गए त्रिभुजों की संख्या ज्ञात करें

हल: माना कि 11 ऐसे बिन्दु हैं जिनका कोई भी 3 बिन्दु एक रेखीय नहीं हैं। अब, 11 बिन्दुओं में से किसी भी 3 बिन्दुओं को मिलाने से एक त्रिभुज बन सकता है।

इसलिए, 11 बिन्दुओं में से किसी भी 3 बिन्दुओं का चयन (selection) $^{11}C_{3}$ तरीकों से किया जा सकता है।

5 बिन्दुओं से बने त्रिभुजों की संख्या जब कोई भी 3 या उससे अधिक बिन्दु एक रेखीय (collinear) नहीं हों $= {}^{5}C_{3}$

परंतु 3 या उससे अधिक एकरेखीय बिन्दुओं से त्रिभुज नहीं बनाया जा सकता है।

$\therefore$ त्रिभुजों की अभीष्ट संख्या $= {}^{11}C_{3} - {}^{5}C_{3}$

$$= \frac{11 \times 10 \times 9}{6} - \frac{5 \times 4}{2}$$

$$= 165 - 10 = 155$$

उदा. 25: एक व्यक्ति के 12 दोस्त हैं जिनमें से 7 उसके रिश्तेदार हैं। 6 दोस्तों को जिनमें कम से कम 4 रिश्तेदार हों कितने तरीकों से आमंत्रित कर सकता है?

हल: ऐसे दोस्तों की संख्या जो रिश्तेदार नहीं हैं $= 12 - 7 = 5$

वह 6 दोस्तों को निम्नलिखित तरीकों से आमंत्रित कर सकता है।

I: 4 रिश्तेदार + 2 जो रिश्तेदार नहीं हैं

$\Rightarrow {}^{7}C_{4} \times {}^{5}C_{2}$

II: 5 रिश्तेदार + 1 जो रिश्तेदार नहीं हैं

$\Rightarrow {}^{7}C_{5} \times {}^{5}C_{1}$

III: 6 रिश्तेदार + 0 जो रिश्तेदार नहीं हैं

$\Rightarrow {}^{7}C_{6}$

$\therefore$ अभीष्ट संख्या $= {}^{7}C_{4} \times {}^{5}C_{2} + {}^{7}C_{5} \times {}^{5}C_{1} + {}^{7}C_{6}$

$= 35 \times 10 + 21 \times 5 + 7 = 462$

yourmahboob

उदा. 26: एक परीक्षा में सफल होने के लिए प्रत्येक 6 विषयों में एक न्यूनतम अंक प्राप्त करना आवश्यक है। एक विद्यार्थी कितने तरीके से असफल हो सकता है?

हल: एक विद्यार्थी असफल होगा यदि वह 6 विभिन्न विषयों में से एक या एक से अधिक विषयों में असफल होता है।

अर्थात् $^6C_1 + {}^6C_2 + {}^6C_3 + {}^6C_4 + {}^6C_5 + {}^6C_6$

$= (^6C_0 + {}^6C_1 + \ldots\ldots + {}^6C_6) - {}^6C_0 = 2^6 - 1 = 64 - 1 = 63$ तरीकों से

दूसरी विधि (Other Approach):

यदि वह किसी भी 6 विषयों में असफल होता है तो वह असफल हो जाता है। प्रत्येक विषय के लिए दो सम्भावनाएँ हैं या तो सफल या असफल। इस प्रकार, 6 विषयों के लिए सम्भावनाएँ

$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^6 = 64$ हैं।

यह उस स्थिति, जब वह सभी 6 विषयों में सफल होता है, को भी शामिल करता है। इसलिए, वह असफल $(64 - 1) = 63$ तरीके से हो सकता है।

नोट : एक प्रश्नपत्र में 6 प्रश्न हैं। एक विद्यार्थी एक या एक से अधिक प्रश्नों को कितने तरीके से हल कर सकता है? यह उपर्युक्त प्रश्न की तरह ही है इसलिए अभीष्ट उत्तर है 63।

उदा. 27: 12 विभिन्न पुस्तकों को बराबर-बराबर कितने तरीकों से निम्नलिखित में बाँटा जा सकता है :

a) 4 व्यक्तियों के बीच एवं

b) 3 व्यक्तियों के बीच ?

हल: (a) प्रत्येक व्यक्ति को $12 \div 4 = 3$ किताबें मिलेंगी अब, पहले व्यक्ति को 12 किताबों में से 3 किताबें $^{12}C_3$ तरीकों से दिया जा सकता है। दूसरे व्यक्ति को 3 किताबें शेष $(12 - 3) = 9$ किताबों में से $^9C_3$ तरीकों से दिया जा सकता है। इसी प्रकार तीसरे व्यक्ति को $^6C_3$ एवं चौथे व्यक्ति को $^3C_3$ तरीकों से।

$\therefore$ तरीकों की अभीष्ट संख्या $= {}^{12}C_3 \times {}^9C_3 \times {}^6C_3 \times {}^3C_3$

$$= \frac{12!}{3!9!} \times \frac{9!}{3!6!} \times \frac{6!}{3!3!} \times \frac{3!}{3!0!}$$

$$= \frac{12!}{(3!)^4} = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3! \times 6 \times 6 \times 6} = 369600$$

(b) अब प्रत्येक व्यक्ति $12 \div 3 = 4$ किताबें प्राप्त करेगा।

इसी प्रकार, तरीकों की अभीष्ट संख्या $= {}^{12}C_4 \times {}^8C_4 \times {}^4C_4$

$$= \frac{12!}{4!8!} \times \frac{8!}{4!4!} \times \frac{4!}{4!0!} = \frac{12!}{(4!)^3}$$

$$= \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4!}{4! \times 24 \times 24} = 34650$$

yoursmahboob

उदा. 28: 12 विभिन्न किताबें बराबर-बराबर कितने तरह से निम्नलिखित में बाँटा जा सकता है?

a) 4 समूहों या दलों के बीच तथा

b) 3 समूहों या दलों के बीच

हल: (a) तरीकों की अभीष्ट संख्या = $\frac{{}^{12}C_3 \times {}^{9}C_3 \times {}^{6}C_3 \times {}^{3}C_3}{4!} = \frac{12!}{4!(3!)^4} = 15400$

(b) तरीकों की अभीष्ट संख्या = $\frac{{}^{12}C_4 \times {}^{8}C_4 \times {}^{4}C_4}{4} = \frac{12!}{3!\times(4!)^3} = 5775$

उदा. 29: 'EXTRA' शब्द के अक्षरों से ऐसे कितने शब्द बनाए जा सकते हैं जिसमें स्वर (vowels) हमेशा एक साथ हों?

हल: E एवं A को एक अक्षर मानते हुए, शब्द EXTRA में अक्षरों की कुल संख्या = 4 जो कि 'P_4' अर्थात् 4! तरीकों से व्यवस्थित किया जा सकता है एवं दो स्वरों के क्रमपरिवर्तन में 2 तरीकों से व्यवस्थित किए जा सकता है।

∴ अभीष्ट संख्या = $4! \times 2! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 2 \times 1 = 48$

उदा. 30: 'DIRECTOR' शब्द के अक्षरों को इस तरह से व्यवस्थित किया गया है कि सभी स्वर एक साथ आ गए हैं। इस तरह की व्यवस्था को बनाने के तरीकों की संख्या ज्ञात करें.

(1) 4320 (2) 2720 (3) 2160

(4) 1120 (5) इनमें से कोई नहीं

हल: सभी स्वरों (I, E, O) को एक अक्षर मानते हुए (चूँकि वे एक साथ आते हैं), अक्षरों की कुल संख्या 6 है तथा उसमें R दो बार आया है।

∴ व्यवस्थाओं (arrangements) की संख्या = $\frac{6!}{2!} \times 3! = 2160$

तीन स्वरों को आपस में 3! तरीके से व्यवस्थित किया जा सकता है, इसलिए 3! से गुणा किया गया है। इसलिए (3) उत्तर है।

उदा. 31: 'RECOVER' शब्द के अक्षरों से कितने विभिन्न शब्द बनाए जा सकते हैं?

हल: सम्भव व्यवस्थाएँ (arrangements) हैं:

$\frac{7!}{2!2!} = 1260$

2! से दो बार भाग दिया गया है क्योंकि E एवं R की पुनरावृत्ति (repetition) हुई है।

उदा. 32: एक कतार (row) में 4 लड़कों एवं 2 लड़कियों को इस प्रकार बैठाया जाता है कि दो लड़कियाँ हमेशा साथ बैठती हैं। कितने विभिन्न तरीकों से वे बैठाए जा सकते हैं?

1) 1200 2) 7200 3) 148 4) 240 5) इनमें से कोई नहीं

हल: एक साथ बैठने वाले दो छात्रों को 1 छात्र मानें। अब, 5 छात्र हैं।

उनको व्यवस्थित (arrange) करने के संभव तरीके हैं = 5! = 120

अब, वे (दो लड़कियाँ) आपस में 2! तरीकों से व्यवस्थित किए जा सकते हैं।

इसलिए, कुल तरीका = $120 \times 2 = 240$

yourshahboob

उदा. 33: एक सभा में प्रत्येक सदस्य दूसरे सदस्यों के साथ हाथ मिलाते हैं यदि हस्तमिलापों (handshakes) की कुल संख्या 28 थी तो सभा में कितने सदस्य उपस्थित थे?

1) 14 2) 7 3) 9 4) 8 5) इनमें से कोई नहीं

हल: जब दो व्यक्ति हाथ मिलाते हैं तो एक हस्तमिलाप (handshake) प्राप्त होता है। यदि हम मान लें कि सभा में कुल x व्यक्ति उपस्थित थे तो हस्तमिलापों की कुल संख्या $= {}^xC_2 = 28$

या, $\frac{x(x-1)}{2!} = 28$ या $x(x-1) = 56 = 7 \times 8$ $\therefore x = 8$

उदा. 34: अंक 3, 1, 7, 0, 9, 5 से 6 अंकों की कितनी विभिन्न संख्याएँ (बिना अंकों की पुनरावृत्ति के) बनाई जा सकती हैं?

(i) कितनी संख्याओं में इकाई स्थान पर '0' होगा?

(ii) कितनी संख्याएँ 5 से विभाज्य होंगी?

(iii) कितनी संख्याएँ 5 से विभाज्य नहीं होंगी?

हल: 6 अंकों की संख्याओं की कुल संख्या $= 6! - 5! = 600$

(नोट: 5! वे संख्याएँ हैं जिनके पहले स्थान पर 0 है तथा इन्हें शामिल नहीं किया जाएगा।)

(i) $5! = 120$

(ii) संख्याएँ जो 5 से विभाज्य हैं:

(a) जब इकाई स्थान पर 0 हो तब शेष 5 अंकों को $5! = 120$ तरीकों से व्यवस्थित किया जा सकता है।

(b) अब अंतिम स्थान पर 5 हो तथा ऊपर की तरह हम इसे $5! = 120$ तरीकों से व्यवस्थित कर सकते हैं। ऐसी संख्याएँ जिनके प्रथम स्थान पर 0 हो (अर्थात पाँच अंकों वाली संख्या) को भी शामिल किया जाता है। इसलिए वे संख्याएँ जिनका पहला अंक 0 हो तथा इकाई अंक 5 हो $4!$ होंगे।

$\therefore$ 6 अंकों की वैसी संख्याएँ जिसके अंत में 5 हो $= 5! - 4! = 120 - 24 = 96$

इसलिए 6 अंकों की संख्याओं जो 5 से विभाज्य हैं की कुल संख्या $= 120 + 96 = 216$

(iii) जो 5 से विभाज्य नहीं हैं

कुल − (5 से विभाज्य) $= 600 - 216 = 384$

उदा. 35: 9 अंकों की वैसी संख्याएँ, जिनके सभी अंक भिन्न भिन्न हैं, की संख्या ज्ञात करें

हल: 9 अंकों की संख्याओं की कुल संख्या $= {}^{10}P_9 - {}^9P_8 = \frac{10!}{1!} - \frac{9!}{1!}$

$= 9!(10-1) = 9(9!)$

$= 9 \times (9 \times 8 \times 7 \times 6!)$

$= 81 \times 56 \times 720 = 3265920$

वैकल्पिक विधि (Alternative Method):

संख्या 9 अंकों की है। पहला स्थान (बाईं ओर से) केवल 9 तरीकों से भरा जा सकता

yoursmahboob

है। क्योंकि पहले स्थान पर 0 नहीं हो सकता है। पहले स्थान के भरने के बाद शेष 9 जगहों को बचे हुए 9 अंकों से $^9P_9 = 9!$ तरीकों से भरा जा सकता है।

इसलिए, कुल $= 9 \times 9!$

उदा. 36: 'MATHEMATICS' शब्द के सभी अक्षरों का प्रयोग करते हुए कितनी विभिन्न व्यवस्थाएँ (arrangements) बनायी जा सकती हैं?

(a) उनमें से कितने C से शुरू होते हैं तथा उनमें से कितने T से शुरू होते हैं?

(b) 'MATHEMATICS' शब्द के अक्षरों में 4 अक्षरों को एक साथ लेकर कितने शब्द बनाए जा सकते हैं?

हल: (a) कुल 11 अक्षर हैं ; दो M, दो A, दो T, H, E, I, C, S

सभी अक्षरों को एक साथ लेकर बनाए गए शब्दों की संख्या

$$= \frac{11!}{2! \times 2! \times 2!} = \frac{11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6!}{2 \times 2 \times 2} = 990 \times 7 \times 720 = 990 \times 5040 = 4989600$$

C से शुरू करने पर,

C को पहले स्थान पर रखने पर हमारे पास शेष 10 अक्षर हैं जिसमें दो M हैं, दो A हैं, तथा दो T हैं एवं शेष 4 भिन्न-भिन्न अक्षर हैं

$$\text{bl fy, } \text{'kCnksa dh la[;k} = \frac{10!}{2!\,2!\,2!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6!}{2 \times 2 \times 2} = 90 \times 7 \times 720$$

$$= 630 \times 720 = 453600$$

T से शुरू करने पर,

T को पहले स्थान पर रखने पर हमारे पास केवल 10 अक्षर बच जाते हैं जिसमें दो M हैं, एवं दो A हैं तथा शेष 6 हैं H, E, I, C, S तथा T

$\therefore$ शब्दों की संख्या है $\frac{10!}{2! \times 2!} = 907200$

(b) हमलोग भाग (a) में उल्लिखित 11 अक्षरों में से 4 अक्षरों को निम्नलिखित तरीकों से चुन सकते हैं।

सभी चार भिन्न-भिन्न हैं :

हमारे पास 8 भिन्न-भिन्न प्रकार के अक्षर हैं जिसमें से 4 को $^8P_4 = \frac{8!}{4!}$

$= 8 \times 7 \times 6 \times 5 = 1680$ तरीके से चुन सकते हैं।

दो भिन्न-भिन्न तथा दो एक समान

हमारे पास एक समान अक्षरों के तीन जोड़े हैं जिसमें से एक जोड़ा को $^3C_1 = 3$ तरीकों से चुना जा सकता है। अब हमें शेष 7 भिन्न भिन्न अक्षरों में से दो को चुनना है जो कि

$^7C_2 = \frac{7!}{5!2!} = \frac{7 \times 6}{2} = 21$ तरीकों से किया जा सकता है इसलिए अक्षरों (जिसमें 2

yoursmahboob

भिन्न भिन्न है तथा 2 एक तरह के हैं) के समूहों की संख्या $= 3 \times 21 = 63$

मान लिया इस प्रकार का एक समूह = M, I, M, I

इस प्रकार के प्रत्येक समूह में 4 अक्षर हैं जिसमें दो एक समान हैं तथा उन्हें आपस में

$\frac{4!}{2!} = 12$ तरीकों से व्यवस्थित किया जा सकता है।

$\therefore$ शब्दों की कुल संख्या $= 63 \times 12 = 756$

एक प्रकार का दो एकसमान तथा दूसरे प्रकार का दो एकसमान :

एक तरह के अक्षरों के तीन जोड़ों में से दो जोड़ों को $^3C_2 = 3$ तरीकों से चुना जा सकता है।

इस प्रकार का एक समूह MMAA है

ये चार अक्षर जिसमें एक प्रकार के दो एकसमान हैं तथा दूसरे प्रकार के दो एकसमान हैं,

को $\frac{4!}{2!2!} = 6$ तरीकों से व्यवस्थित (arranged) किया जा सकता है।

इसलिए इस प्रकार के शब्दों की कुल संख्या $= 3 \times 6 = 18$

$\therefore$ 4 अक्षर के शब्दों की कुल संख्या $= 1680 + 756 + 18 = 2454$

अभ्यास प्रश्न

1. यदि $^nC_{n-1} : {}^nC_n = 5 : 1$ है तो n ज्ञात करें।
2. यदि $^nC_{n-6} = 462$ हो तो ज्ञात करें
3. 0, 1, 2, 4, 5 एवं 6 अंकों से पाँच अंकों की कितनी संख्याएँ बनायी जा सकती हैं?
4. 0, 1, 2, 3, 4, 5 एवं 6 अंकों से तीन अंकों की कितनी विषम संख्याएँ बनायी जा सकती हैं?
5. 0, 2, 5, 6 एवं 9 अंकों से 4 अंकों की ऐसी संख्याएँ जो 5 से विभाज्य हों कितनी बनायी जा सकती हैं?
6. EQUATION शब्द के अक्षरों से 4 अक्षरों का ऐसा शब्द जिसके प्रारंभ में या तो A हो या E कितने शब्द बनाए जा सकते हैं?
7. INTERMEDIATE शब्द के अक्षरों को कितने तरीकों से व्यवस्थित (arranged) किया जा सकता है?
8. ARTICLE शब्द के अक्षरों से वैसे कितने शब्द बनाए जा सकते हैं जिनके सम स्थानों (even places) पर स्वर (vowels) हों?
9. EQUATION शब्द में प्रयुक्त अक्षरों से कितने शब्द बनाए जा सकते हैं जबकि किसी भी अक्षर की पुनरावृत्ति कितनी बार भी हो सकती है?
10. EQUATION शब्द के अक्षरों से पाँच अक्षरों के ऐसे कितने शब्द जिनके विषम स्थानों पर स्वर (vowels) हों बनाए जा सकते हैं?
11. यदि 7 समानान्तर रेखाओं को दूसरी 7 समान्तर रेखाएँ काटती हों तो इस प्रकार बने समान्तर चतुर्भुजों (parallelograms) की संख्या ज्ञात करें?
12. A, B, C, D एवं E कुल 5 विद्यार्थी हैं।

youtubehoob

(i) वे कितने तरीके से बैठ सकते हैं जिसमें B एवं C एक साथ नहीं बैठते हों?

(ii) तीन सदस्यों की समिति, जिसमें A हमेशा समिति में शामिल हो तथा E कभी समिति से बाहर हो, कितने तरीके से बनाया जा सकता है?

13. एक समतल (plane) में 12 बिन्दु हैं जिसमें 5 एकरेखीय (collinear) हैं। इन बिन्दुओं को मिलाने से बनी सीधी रेखाओं (straight lines) को ज्ञात करें

14. एक छात्र के 10 प्रश्न, जो कि समूहों में विभाजित हैं तथा प्रत्येक समूह में 5 प्रश्न हैं, में से 5 प्रश्नों का उत्तर देना अनिवार्य है। यदि उसे एक समूह से 4 से अधिक प्रश्नों के उत्तर देने की अनुमति नहीं हो तो वह कितने तरीके से प्रश्नों का उत्तर दे सकता है?

15. 5 लड़कों एवं 8 लड़कियों में से 8 सदस्यों की एक समिति बनानी है। इस तरह की कितनी समितियाँ बनाई जा सकती हैं जिसमें लड़कियों की संख्या लड़कों की संख्या से कम नहीं हो?

16. 6 पुरुषों एवं 5 महिलाओं में से 5 सदस्यों की एक समिति बनानी है। इस तरह की कितनी समितियाँ बनाई जा सकती हैं जिसमें कम-से-कम एक महिला अवश्य हो?

17. 4 महिलाओं एवं 3 पुरुषों में से टेनिस खेलने के लिए कितने प्रकार की भिन्न-भिन्न दलें (groups) बनायी जा सकती हैं जिसमें प्रत्येक ओर एक महिला एवं एक पुरुष हो?

उत्तर

1. उत्तर = 5
2. उत्तर = 11
3. संख्याओं की अभीष्ट संख्या $= 5 \times {}^5P_4 = 5 \times 5! = 5 \times 120 = 600$
4. संख्याओं की अभीष्ट संख्या $= 5 \times 5 \times 3 = 75$
5. 5 से विभाजित होने के लिए किसी संख्या के इकाई अंक या तो 0 होता है या 5

   जब इकाई स्थान पर 0 हो तो संख्याओं की

   संख्या $= {}^4P_3 \times 1 = 24$

   जब 5 इकाई स्थान पर हो तो संख्याओं की

   संख्या $= 3 \times {}^3P_2 \times 1 = 3 \times 6 \times 1 = 18$

   $\therefore$ कुल अभीष्ट संख्या $= 24 + 18 = 42$
6. इस प्रकार के शब्दों की अभीष्ट संख्या $= {}^7P_1 \times {}^6P_3 = 2 \times (7 \times 6 \times 5) = 420$
7. प्रदत्त शब्द में 12 अक्षर हैं, जिसमें B तीन बार आता है, I एवं T प्रत्येक दो बार आता है तथा शेष केवल एक बार आता है।

   $\therefore$ इस प्रकार के शब्दों की कुल संख्या $= \dfrac{12!}{3! \times 2! \times 2!} = 19958400$
8. तीन स्वर एवं चार व्यंजन हैं। इसलिए तीन स्वरों को 3 सम स्थानों पर ${}^3P_3 = 6$ तरीकों से रखा जा सकता है। तथा 4 व्यंजनों को 4 विषम स्थानों पर ${}^4P_4 = 24$ तरीकों से रखा जा सकता है।

   $\therefore$ शब्दों की कुल संख्या $= 6 \times 24 = 144$
9. शब्दों की अभीष्ट संख्या $= 8 \times 8 \times 8 \times 8 \times 8 \times 8 \times 8 \times 8$
10. तीन विषम स्थानों को 5 स्वरों से ${}^5P_3 = 5 \times 4 \times 3 = 60$ तरीकों से भरा जा सकता है।

yoursmahboob

दो सम स्थानों को 3 व्यंजनों से $^3P_2 = 3 \times 2 = 6$ तरीकों से भरा जा सकता है।

$\therefore$ शब्दों की अभीष्ट संख्या $= 60 \times 6 = 360$

11. इस प्रकार के समान्तर चतुर्भुजों की संख्या $= {}^7C_2 \times {}^7C_2 = 21 \times 21 = 441$

12. (i) A एवं B को एक साथ बैठने के तरीकों की संख्या $= 2 \times 4! = 48$

$\therefore$ A एवं B को एक साथ नहीं बैठने के तरीकों की संख्या $= 5! - 48 = 120 - 48 = 72$

(ii) A के चुनने के बाद, हमारे पास 3 व्यक्ति बच जाते हैं (B को शामिल नहीं करते हुए) जिनमें से 2 को चुना जाता है।

$\therefore$ अभीष्ट तरीकों की कुल संख्या $= 1 \times {}^3C_2 = 1 \times 3 = 3$

13. सीधी रेखाओं (straight lines) की अभीष्ट संख्या $= {}^{12}C_2 - {}^5C_2 + 1 = 57$

14. तरीकों की कुल संख्या $= ({}^3C_2 \times {}^3C_1)(({}^3C_2 \times {}^4C_1) + ({}^3C_1 \times {}^5C_2) = 200$

15. तरीकों की कुल संख्या $= {}^3C_1 + ({}^3C_1 \times {}^8C_1) + ({}^3C_2 \times {}^8C_2) + ({}^3C_3 \times {}^8C_3) + ({}^3C_4 \times {}^8C_4)$
$= 1230$

16. 5 सदस्यों की एक समिति में 6 पुरुष एवं 4 महिलाएँ हैं।

कम-से-कम एक महिला को शामिल करने के लिए, संचयों (combinations) की संख्या है:
(1L, 4G), (2L, 3G), (3L, 2G), (4L, 1G)

$${}^4C_1 \times {}^6C_4 + {}^4C_2 \times {}^6C_3 + {}^4C_3 \times {}^6C_2 + {}^4C_4 \times {}^6C_1 = 60 + 120 + 60 + 6 = 246$$

द्रुत विधि (Quicker Method):

[(समितियों की कुल संख्या (6 पुरुषों एवं 6 स्त्रियों से)]

[बिना महिला के समितियों की कुल संख्या (केवल पुरुष)]

$$= {}^{12}C_5 - {}^6C_4 = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5} - \frac{6}{1} = 252 - 6 = 246$$

17. 4 महिलाएँ 4 पुरुष

A B

1 म., 1 पु. 1 म., 1 पु.

A का चयन $= {}^4C_1 \times {}^3C_1 = 4 \times 3 = 12$

A का चयन करने के बाद, हमारे पास 3 महिलाएँ एवं 4 पुरुष रह जाते हैं तथा प्रत्येक में से एक सदस्य को B के लिए चुनना है।

B का चयन $= {}^3C_1 \times {}^4C_1 = 3 \times 2 = 6$

$\therefore$ दल के चयन के तरीकों की कुल संख्या $= 12 \times 6 = 72$

yoursmahboob

प्रायिकता
(Probability)

अनिश्चितता (uncertainty) का माप (measurement) प्रायिकता या सम्भाविता या probability कहलाता है. इस अध्याय में हम घटनाओं के घटित होने की संभावनाओं का अध्ययन करेंगे

पारिभाषिक शब्दावली (Terminology)

यदृच्छ प्रयोग (Random Experiment)

यह एक ऐसा प्रयोग है जिसे यदि समान स्थितियों (homogeneous conditions) में बार-बार किया जाए तो एक ही परिणाम प्राप्त नहीं होता है. परिणाम बहुत सारे संभव प्रतिफलों (outcomes) में से कोई एक हो सकता है। यहाँ परिणाम अद्वितीय (unique) नहीं होता है। (या हर बार एक ही नहीं आता है.)

उदाहरण के लिए यदि हम एक पासे (dice) को फेंकें, तो यह निश्चित रूप से नहीं कहा जा सकता है कि उसके ऊपर हमेशा एक खास संख्या ही होगी छः संख्याओं में से कोई भी एक संख्या ऊपर आ सकती है।

परीक्षण एवं घटना (Trial and Event):

यदृच्छ प्रयोग (random experiment) का निष्पादन (performance) परीक्षण (trial) कहलाता है तथा प्रतिफल (outcome) घटना (event) कहलाती है। इस प्रकार एक पासे को फेंकने की क्रिया परीक्षण (trial) कहलाती है तथा परिणाम (6 अंकों 1, 2, 3, 4, 5, एवं 6 में से किसी एक का आना) घटना कहलाती है।

घटनाएँ या तो साधारण (simple) होती हैं या मिश्र (compound या composite)। एक घटना सामान्य या साधारण (या simple) कहलाती है यदि इससे केवल एक ही सम्भव प्रतिफल (possible event) प्राप्त होता है। इस प्रकार एक पासे को फेंकने में 3 प्राप्त करने की सम्भावना एक साधारण घटना कहलाती है. (क्योंकि एक पासे में 3 केवल एक बार आता है) जबकि विषम संख्या आने की संभावना को मिश्र घटना या Compound Event कहते हैं (क्योंकि विषम संख्याएँ एक से अधिक हैं अर्थात् 1, 3 एवं 5)

सम्पूर्ण घटनाएँ (Exhaustive Events)

किसी घटना के सभी प्रतिफलों (outcomes) को सम्पूर्ण (exhaustive) घटना कही जाती है। एक पासे (dice) को फेंकने पर सम्पूर्ण घटनाएँ 6 हैं क्योंकि एक पासे के 6 सतह होते हैं तथा प्रत्येक सतह पर भिन्न भिन्न संख्याएँ लिखी होती हैं. जब दो पासों को फेंका जाता है तो सम्पूर्ण घटनाएँ 36 (6×6) होगी। उसी प्रकार जब दो सिक्कों को उछाला (toss) जाता है तो संपूर्ण घटनाओं की संख्या (2×2 =) 4 होगी अर्थात् HH, TT, HT एवं TH (जहाँ H, Head के लिए तथा T, Tail के लिए प्रयुक्त हुआ है।)

yoursmahboob

स्वीकारात्मक घटनाएँ (Favourable Events)

किसी अभीष्ट घटना के घटित होने पर प्रतिफलों को सख्या स्वीकारात्मक घटना कहलाती है। इस प्रकार यदि किसी पासे को एक बार फेंका जाए तो विषम संख्या प्राप्त करने की स्वीकारात्मक घटनाएँ तीन हैं अर्थात् 1, 3, एवं 5। उसी प्रकार एक ताश की गड्डी में से एक पत्ता (a card from a pack) खींचने पर हुकुम का पत्ता (spade) आने की स्वीकारात्मक घटनाएँ (favourable events) 13 हैं क्योंकि एक ताश की गड्डी (pack) में 13 हुकुम के पत्ते (spade) होते हैं।

परस्पर अपवर्जी घटनाएं (Mutually Exclusive Events)

शब्द 'mutually exclusive' से हमलोग यह समझते हैं कि एक ही प्रयोग में यदि कोई घटना घटित हो जाती है तो दूसरा परिणाम या घटना उसके समय घटित नहीं हो सकती है। इस प्रकार एक पासे को फेंकने पर 5 एवं 6 आने की घटना 'mutually exclusive' है क्योंकि यदि पासे में 5 आने की घटना घटित होती है तो उसी प्रयोग में दूसरी कोई भी घटना घटित होने की संभावना नहीं है। यहाँ एक समय में एक और केवल एक ही घटना घटित हो सकती है

सम सम्भावी घटनाएँ (Equally Likely Events)

दो या दो से अधिक घटनाओं को समसम्भावी (equally likely) कहा जाता है यदि उनके घटित होने की संभावनाएँ बराबर हो अर्थात् किसी एक घटना को दूसरे की तुलना में तरजीह (preference) नहीं दी जाती हो। इस प्रकार एक पासे को फेंकने पर 1, 2, 3, 4, 5 या 6 आना समसम्भावी (equally likely) है। एक सिक्का को उछालने पर Head या Tail आना समसंभावी है।

स्वतंत्र तथा परतंत्र घटनाएँ (Independent and Dependent Events):

एक घटना स्वतंत्र (independent) कही जाती है यदि इसका घटित होना दूसरी घटना से प्रभावित नहीं होती हो तथा इसके घटित होने से दूसरी घटना भी प्रभावित नहीं होती हो। इस प्रकार एक पासे को बार बार फेंकने पर पहली बार 5 आना दूसरी बार फिर 5 आने से बिल्कुल स्वतंत्र है।

यदि ताश की एक गड्डी से पत्ते को एक के बाद एक निकाला जाता है। (बिना प्रतिस्थापन या replacement के) तो घटनाएँ परतंत्र (dependent) होंगी। पहली बार पत्ता खींचने पर बादशाह (king) आने की संभावना $\frac{4}{52}$ होगी (क्योंकि एक ताश की गड्डी में 4 बादशाह होते हैं) यदि दूसरी बार पत्ता खींचने से पहले उस पत्ते को प्रतिस्थापित (replace) नहीं किया जाता हो तो बादशाह (king) आने की संभावना $\frac{3}{51}$ है क्योंकि अब ताश की गड्डी में केवल 51 पत्ते ही बच जाते हैं एवं बादशाह (king) की संख्या 3 रह जाती है।

यदि पहली बार पत्ता खींचने के बाद अर्थात् दूसरी बार खींचने से पहले ताश की गड्डी में पुनः उस पत्ते को प्रतिस्थापित (replace) कर दिया जाए तो घटना स्वतंत्र कही जाती है। किसी भी दो बार यदि पत्ते को निकाला जाए तो बादशाह (king) आने की संभावना $\frac{4}{52}$ होगी.

जब हम किसी सिक्का को उछालते हैं तो यह निश्चित नहीं होता है कि Head आएगा या Tail, फिर भी हम इतना तो अवश्य कह सकते हैं कि दोनों में से कोई एक होगा: या तो Head या Tail।

yoursmanbooks

निम्नलिखित Trials को देखते हैं:

(i) एक सिक्का उछाला जाता है। प्रतिफल (H, T) हो सकता है जहाँ H सिक्के के Head के लिए तथा T सिक्के के Tail के लिए प्रयुक्त हुआ है।

(ii) दो सिक्कों को उछाला जाता है तो प्रतिफल (outcomes) {(H, H), (H, T), (T, H) (T, T)} हो सकता है।

(iii) एक पासा (dice) फेंका जाता है तो प्रतिफल (1, 2, 3, 4, 5, 6) हो सकता है।

(iv) एक व्यक्ति को यों ही चुना जाता है एवं उससे जिस दिन वह पैदा हुआ था वह दिन सप्ताह का कौन-सा दिन था पूछा जाता है। प्रतिफल (outcomes) {रविवार, सोमवार, मंगलवार, बुधवार, बृहस्पतिवार, शुक्रवार, शनिवार} हो सकता है।

(v) एक छात्र एक खास परीक्षा में बैठता है। प्रतिफल (सफल, असफल) हो सकता है.

(vi) एक व्यक्ति को 4 अ-एकरेखीय (non-collinear) बिन्दुओं A, B, C एवं D से कुछ त्रिभुज बनाने हैं प्रतिफल (ΔABC, ΔABD, ΔACD, ΔBCD) हो सकता है।

(vii) एक व्यक्ति को प्रदत्त चार अंकों 1, 2, 3, एवं 4 से 3 अंकों की संख्या बनाने है। प्रतिफल (123, 132, 124, ...) हो सकता है

किसी यादृच्छ प्रयोग (random experiment) के लिए, प्रतिदर्श समष्टि (sample space), इस प्रयोग के द्वारा प्राप्त होने वाले सभी सम्भव परिणामों (results) का समुच्चय (set) है उल्लिखित trial (i) के लिए, प्रतिदर्श समष्टि (sample space) की संख्या n (s) = 1 (H के लिए) + 1 (T के लिए) = 2

अभी प्रकार, trial (ii) के लिए, n (s) = 1+1+1+1 = 4

(iii) के लिए, n(s) = 6

(iv) के लिए यह 7 है

(v) के लिए यह 2 है

(vi) के लिए यह $^4C_3 = 4$ है

(vii) के लिए यह $^4P_3 = 4\times3\times2=24$ है

एक प्रतिदर्श समष्टि (sample space) का प्रत्येक प्रतिफल (outcome) एक घटना (event) कहलाती है। इस प्रकार प्रयोग (iv) में {रविवार}, {सोमवार}, {.....}, {शनिवार} घटनाएँ हैं।

घटनाओं की कुल संख्या = n(s)

उल्लिखित सभी प्रयोगों में यह मानना तर्क संगत है कि एकेक प्रतिफल की प्राप्त करने की संभावना उतनी ही है जितनी दूसरे प्रतिफल को प्राप्त करने की।

जब एक सिक्का को उछाला जाता है तो Head आने की उतनी ही संभावना है जितनी Tail आने की।

अब घटना (E) की सम्भाविता या प्रायिकता या probability को P(E) से निर्दिष्ट किया जाता है तथा इसकी परिभाषा निम्नलिखित है:

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{\text{अभीष्ट घटनाओं की संख्या}}{\text{घटनाओं की कुल संख्या (अर्थात् प्रतिदर्श समष्टि की संख्या)}}$$

yoursmahboob

जब एक सिक्का को उछाला जाता है, उदाहरण के लिए, तो Head आने की प्रायिकता (probability), P(H) = 1/2 = P(T) = Tail आने की प्रायिकता।

जब दो सिक्कों को उछाला जाता है, Head आने की प्रायिकता (दोनों सिक्कों पर) = $\frac{1}{4}$

कम-से-कम एक Tail आने की प्रायिकता $= \frac{1-1+1}{4} = \frac{3}{4}$

हल किए हुए प्रश्न

उदा. 1: एक पासे को फेंका जाता है। पासे पर वैसी संख्या आने कि प्रायिकता क्या है जो

(i) एक सम संख्या (even number) हो?

(ii) एक विषम संख्या (odd number) हो?

(iii) संख्या 2 से विभाज्य हो?

(iv) संख्या 3 से विभाज्य हो?

(v) संख्या 4 से छोटी हो?

(vi) संख्या 4 से छोटी या उसके बराबर हो?

(vii) संख्या 6 से बड़ी हो?

(viii) संख्या 6 से छोटी या बराबर हो?

हल: उपर्युक्त सभी स्थितियों में

$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, n(S) = 6$

(i) E (एक सम संख्या) = $\{2, 4, 6\}$, $n(E) = 3$

$$\therefore P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

(ii) E (एक विषम संख्या) = $\{1, 3, 5\}$, $n(E) = 3$

$$\therefore P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

(iii) E (एक संख्या जो दो से विभाज्य हो) = $\{2, 4, 6\}$, $n(E) = 3$

$$\therefore P(E) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

(iv) E (संख्या जो तीन से विभाज्य हो) = $\{3, 6\}$, $n(E) = 2$

$$\therefore P(E) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

(v) E (संख्या जो चार से छोटी हो) = $\{1, 2, 3\}$, $n(E) = 3$

$$\therefore P(E) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

(vi) E (संख्या जो चार से छोटी या बराबर हो) = $\{1, 2, 3, 4\}$, $n(E) = 4$

$$\therefore P(E) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

yousmahboob

(vii) E (संख्या जो 6 से बड़ी हो) = { } अर्थात् प्रतिदर्श समष्टि में 6 से बड़ी कोई संख्या नहीं है।

$$\therefore P(E) = \frac{0}{6} = 0$$

असंभव घटना की प्रायिकता = 0

(viii) E (संख्या जो 6 से छोटी या बराबर हो) = {1, 2, 3, 4, 5, 6}, n(E) = 6

$$\therefore P(E) = \frac{6}{6} = 1$$

एक निश्चित घटना (certain event) की प्रायिकता = 1

नोट: $0 \le$ घटना की प्रायिकता ≤ 1

उदा. 2: दो सिक्कों को उछाला जाता है।

(i) अधिक से-अधिक एक Head आने की प्रायिकता क्या है?

(ii) अधिक-से-अधिक दो Head आने की प्रायिकता क्या है?

हल: n(S) = 4 = {(T, T), (H, T), (T, H), (H, H)}

(i) के लिए, E (अधिक से अधिक एक Head आना) = (HT, TH, TT), n(E) = 3

$$\therefore P(E) = \frac{3}{4}$$

(ii) के लिए, E (अधिक-से अधिक दो Head आना) = (HH, HT, TH, TT), n(E) = 4

$$\therefore P(E) = \frac{4}{4} = 1$$

उदा. 3: एक धनात्मक पूर्णांक (positive integer) यदृच्छया (at random) चुना जाता है तथा उसमें 7 से भाग दिया जाता है तो प्रायिकता (probability) क्या होगी (i) 1 शेष बचने की (ii) 1 शेष नहीं बचने की?

हल: जब एक धनात्मक पूर्णांक में 7 से भाग दिया जाता है तो शेष 0 या 1 या 2 या 3 या 4 या 5 या 6 बच सकता है: n(S) = 7

(i) के लिए, E(1) = {1}, n(E) = 1

$$\therefore P(E) = \frac{1}{7}$$

(ii) के लिए, E(1 नहीं) = {0, 2, 3, 4, 5, 6}, n(E) = 6

$$\therefore P(E) = \frac{6}{7}$$

नोट : हम देखते हैं कि $E(1) + E(1 \text{ नहीं}) = \frac{1}{7} + \frac{6}{7} = 1$

यदि हम एक घटना को A से निरूपित करते हैं तो घटना "A नहीं" को हम A′ या $\overline{A}$ या A^c से निरूपित करते हैं और यह 'घटना A का पूरक' (complement of an event A) कहलाता है।

yoursmahboob

$P(A) + P(A') = 1$

या $P(A') = 1 - P(A)$

उदा. 4: एक पासा फेंका जाता है। पासे के ऊपर वाली संख्या 3 से विभाज्य नहीं है के आने की प्रायिकता (probability) क्या है?

हल: $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}; n(S) = 6$

E(3 से विभाज्य नहीं है) $= \{1, 2, 4, 5\}; n(E) = 4$

$\therefore P$(3 से विभाज्य नहीं है) $= \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

दूसरी विधि (Other Method) :

E(3 से विभाज्य है) $= \{3, 6\}, n(E) = 2$

$\therefore P$(3 से विभाज्य है) $= \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

$\therefore P$(3 से विभाज्य नहीं है) $= 1 - P$(3 से विभाज्य है)

$= 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

उदा. 5: (i) यदृच्छया (randomly) चुने गए एक अधिवर्ष (leap year) में 53 रविवार होने की संभावना क्या है?

(ii) चुने गए वर्ष के अधिवर्ष (leap year) नहीं होने की क्या संभावना है?

हल : (i) एक अधिवर्ष में 366 दिन होते हैं इसलिए इसमें 52 पूर्ण सप्ताह एवं 2 अधिक दिन होते हैं। दो दिन {रविवार एवं सोमवार, सोमवार एवं मंगलवार, मंगलवार एवं बुधवार, बुधवार एवं बृहस्पतिवार, बृहस्पतिवार एवं शुक्रवार, शुक्रवार एवं शनिवार, शनिवार एवं रविवार} अर्थात् $n(S) = 7$

इन 7 स्थितियों में, अधिक रविवार होने की अनुकूल स्थितियाँ हैं: {रविवार एवं सोमवार, शनिवार एवं रविवार} अर्थात् $n(E) = 2$

$\therefore P(E) = \frac{2}{7}$

(ii) जब वर्ष अधिवर्ष नहीं होता है, इसमें 52 पूर्ण सप्ताह एवं 1 अधिक दिन होता है जो {रविवार, सोमवार, मंगलवार, बुधवार, बृहस्पतिवार, शुक्रवार, शनिवार}, $n(S) = 7$

इन 7 स्थितियों में, एक और रविवार होने की अनुकूल स्थिति है: {रविवार}, $n(E) = 1$

$\therefore P(E) = \frac{1}{7}$

आर्टिकल 1: जब दो पासे को फेंका जाता है :

$S = \{(1, 1), (1, 2), \ldots, (1, 6), (2, 1), (2, 2), \ldots, (2, 6), (3, 1), (3, 2), \ldots, (3, 6), (4, 1), \ldots, (4, 6), (5, 1), \ldots, (5, 6), (6, 1), \ldots, (6, 6)\}$

$n(S) = 6 \times 6 = 36$

yoursmahboob

दो पासों की संख्याओं का योगफल		n(S)	बतायें	
(i)	(ii)		(i)	(ii)
2	12	1	{1, 1}	{6, 6}
3	11	2	{1, 2}, {2, 1}	{6, 5}, {5, 6}
4	10	3	{1, 3}, {3, 1}, {2, 2}	{6, 4}, {4, 6}, {5, 5}
5	9	4	{1, 4}, {4, 1}, {2, 3}, {3, 2}	{6, 3}, {3, 6}, {5, 4}, {4, 5}
6	8	5	{1, 5}, {5, 1}, {2, 4}, {4, 2}, {3, 3}	{6, 2}, {2, 6}, {5, 3}, {3, 5}, {4, 4}
7		6	{1, 6}, {6, 1}, {2, 5}, {5, 2}, {4, 3}, {3, 4}	

चार्ट 2: ताश की एक गड्डी में कुल 52 पत्ते होते हैं:

लाल (Red Suit) (26)		काला (Black Suit) (26)	
ईंट के पत्ते (Diamond) (13)	पान के पत्ते (Heart) (13)	हुकुम के पत्ते (Spade) (13)	चिड़ी के पत्ते (Club) (13)

ईंट का पत्ते (Diamond), पान का पत्ते (Heart), हुकुम का पत्ता (Spade) एवं चिड़ी का पत्ता (Club) प्रत्येक में 9 अंक पत्ते (digit-cards) होते हैं:

2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 एवं 10 (कुल $9 \times 4 = 36$) तथा शेष में इक्का (Ace), बादशाह (King), बेगम (Queen) एवं गुलाम (Jack) (कुल $4 \times 4 = 16$) होते हैं। इन्हें Honours-cards भी कहा जाता है।

उदा. 6: जब दो पासों को फेंका जाता है तो प्रायिकता क्या होगी यदि,

(i) पासों के ऊपर आए हुए संख्याओं का योग 6 एवं 7 हो?

(ii) पासों के ऊपर आए हुए संख्याओं का योग 8 हो?

(iii) पासों के ऊपर आए हुए संख्याओं का योग एक विषम संख्या हो?

(iv) पासों के ऊपर आए हुए संख्याओं का योग 3 का अपवर्त्य (multiple) हो?

(v) दोनों पासों पर एक ही संख्या हो?

(vi) पासों के ऊपर आये हुए संख्याओं के बीच का अंतर 2 हो?

हल: **संकेत:** चार्ट 1 का प्रयोग करें:

(i) 6 के लिए, अभीष्ट प्रायिकता $\frac{n(E)}{n(S)} = \frac{5}{36}$

7 के लिए, अभीष्ट प्रायिकता $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

yoursmahboob

(ii) संख्याओं के वांछित (desired) योगफल हैं: 2, 3, 4, 5, 6, 7 एवं 8;
$n(S) = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 5 = 26$

$\therefore$ अभीष्ट प्रायिकता $= \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

(iii) संख्याओं के वांछित योगफल हैं: 7, 5, 3, 9 एवं 11;
$n(S) = 2 + 4 + 6 + 4 + 2 = 18$

$\therefore$ अभीष्ट प्रायिकता $= \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$

(iv) संख्याओं के वांछित योगफल हैं: 3, 6, 9 एवं 12;
$n(S) = 2 + 5 + 4 + 1 = 12$

$\therefore$ अभीष्ट प्रायिकता $= \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$

(v) घटनाएँ $= \{1,1\}, \{2,2\}, \{3,3\}, \{4,4\}, \{5,5\}, \{6,6\}$; $n(S) = 6$

$\therefore P(E) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

(vi) घटनाएँ $= \{3,1\}, \{4,2\}, \{5,3\}, \{6,4\}, \{4,6\}, \{3,5\}, \{2,4\}, \{1,3\}$ व $n(S) = 8$

$\therefore P(E) = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$

उदा. 7: यदि ताश की गड्डी से एक पत्ता खींचा जाता है तो निम्नलिखित घटनाओं की प्रायिकता ज्ञात करें।

(i) ताश का पत्ता एक काला पत्ता (Black Suit) हो

(ii) ताश का पत्ता एक हुकुम का पत्ता (Spade) हो.

(iii) ताश का पत्ता एक लाल रंग (Red Suit) का एक honours-card हो।

(iv) ताश का पत्ता एक चिड़ी (club) का एक honours card हो।

(v) ताश का एक पत्ता जिसकी संख्या 7 से कम हो।

(vi) ताश का एक पत्ता जिसकी संख्या 3 का अपवर्त्य हो।

(vii) ताश का पत्ता एक बादशाह हो या एक बेगम।

(viii) ताश का पत्ता पान के पत्ता (heart) का एक अंक-पत्ता (digit-card) हो।

(ix) ताश का पत्ता काले रंग (Black suit) का एक गुलाम (Jack) हो।

हल: संकेत: चार्ट II का प्रयोग करें।

माना कि घटना E, n(S) $= {}^{52}C_1 = 52$

(i) $\frac{26}{52} = \frac{1}{2}\left[\frac{{}^{26}C_1}{{}^{52}C_1} = \frac{26}{52} (\because {}^{n}C_1 = n)\right]$

(ii) $\frac{13}{52} = \frac{1}{4}$

(iii) $\frac{4 \times 2}{52} = \frac{2}{13}$

(iv) $\frac{4}{52} = \frac{1}{13}$

(v) $\frac{5 \times 4}{52} = \frac{5}{13}$

(vi) $\frac{3 \times 4}{52} = \frac{4}{13}$

yoursmahboob

(vii) P (एक बादशाह) $= \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$; P (एक बेगम) $= \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$

$\therefore$ P (एक बादशाह या एक बेगम) $= \frac{1}{13} + \frac{1}{13} = \frac{2}{13}$

(viii) $\frac{9}{52}$ (ix) $\frac{2}{52} = \frac{1}{26}$

उदा. 8: 52 पत्तों की ताश की एक गड्डी में 2 पत्ते खींचे जाते हैं निम्नलिखित घटनाओं की प्रायिकता (probability) ज्ञात करें।

(i) ताश के दोनों पत्ते इक्का (Ace) हों।

(ii) ताश का तीन एक पत्ता बेगम हो।

(iii) ताश का कोई भी पत्ता honours-card नहीं हो।

(iv) ताश का कोई भी पत्ता digit-card नहीं हो।

(v) ताश का एक पत्ता बादशाह हो एवं एक बेगम।

हल: उपर्युक्त सभी स्थितियों के लिए

$n(S) = {}^{52}C_2 = \frac{52 \times 51}{2} = 26 \times 51$

(i) इक्कों (Aces) की कुल संख्या = 4

$\therefore n(E) = {}^4C_2 = \frac{4 \times 3}{2} = 6$

$\therefore P(E) = \frac{6}{26 \times 51} = \frac{1}{221}$

(ii) बेगमों (Queens) की कुल संख्या = 4

4 बेगम के पत्तों में से एक पत्ता $({}^4C_1 =)$ 4 तरीकों से चुना जा सकता है।

वह शेष एक पत्ता शेष (52 4=) 48 पत्तों में से चुन सकता है। चुनने का कुल तरीका ${}^{48}C_1 = 48$

$\therefore n(E) = 4 \times 48$

$\therefore P(E) = \frac{4 \times 48}{26 \times 51} = \frac{32}{221}$

(iii) Honours-card की कुल संख्या = 16

एक भी Honours-card नहीं होने के लिए, उसे शेष 52 16 = 36 पत्तों में से दो पत्ते चुनना है जिसे हम निम्नलिखित तरीकों से कर सकते हैं:

${}^{36}C_2 = \frac{36 \times 35}{2} = 18 \times 35$ तरीके

$\therefore P(E) = \frac{18 \times 35}{26 \times 51} = \frac{105}{221}$

yoursmahboob

(iv) $P(E) = \frac{{}^{16}C_2}{26 \times 51} = \frac{8 \times 15}{26 \times 51} = \frac{20}{221}$

(v) $n(E) = {}^4C_1 \times {}^4C_1 = 4 \times 4 = 16$

$\therefore P(E) = \frac{16}{26 \times 51} = \frac{8}{663}$

उदा. 9: 52 पत्तों की ताश की एक गड्डी से 3 पत्ते खींचे जाते हैं। निम्नलिखित घटनाओं की प्रायिकता ज्ञात करें।

(i) सभी तीन पत्ते इक्का (aces) हों।

(ii) कोई भी पत्ता बेगम (queen) नहीं हो।

(iii) एक इक्का एक बादशाह एवं एक बेगम हों।

(iv) एक इक्का एवं दो गुलाम (jack) हों।

(v) दो digit-cards एवं एक काले रंग (black suit) का honours-card हो।

हल: उपर्युक्त सभी स्थितियों के लिए,

$n(S) = {}^{52}C_3 = \frac{52 \times 51 \times 50}{3 \times 2} = 26 \times 17 \times 50$

(i) $n(E) = {}^4C_3 = 4$

$\therefore P(E) = \frac{4}{26 \times 17 \times 50} = \frac{1}{5525}$

(ii) $n(E) = {}^{48}C_3 = 8 \times 47 \times 46$

$\therefore P(E) = \frac{8 \times 47 \times 46}{26 \times 17 \times 50} = \frac{4324}{5525}$

(iii) $n(E) = {}^4C_1 \times {}^4C_1 \times {}^4C_1 = 4 \times 4 \times 4$

$\therefore P(E) = \frac{4 \times 4 \times 4}{26 \times 17 \times 50} = \frac{16}{5525}$

(iv) $n(E) = {}^4C_1 \times {}^4C_2 = 4 \times 6$

$\therefore P(E) = \frac{4 \times 6}{26 \times 17 \times 50} = \frac{6}{5525}$

(v) $n(E) = {}^{26}C_2 \times {}^8C_1 = 18 \times 35 \times 8$

$\therefore P(E) = \frac{18 \times 35 \times 8}{26 \times 17 \times 50} = \frac{252}{1105}$

उदा. 10: एक थैला में 3 लाल, 5 पीले एवं 4 हरे रंग की गेंदें हैं। 3 गेंदें यदृच्छया (randomly) निकाली जाती हैं। निम्नलिखित घटनाओं की प्रायिकता ज्ञात करें।

(i) गेंदें भिन्न-भिन्न रंगों के हों।

(ii) ठीक दो गेंदें हरे रंग के हों।

(iii) कोई भी गेंद पीला रंग का नहीं हो।

yoursmahboob

हल: गेंदों की कुल संख्या $= 3+5+4=12$

$$n(S) = {}^{12}C_3 = \frac{12\times11\times10}{3\times2} = 220$$

(i) 3 अलग-अलग रंगों की गेंदों के लिए प्रत्येक रंग की एक गेंद को चुनना होगा।

$$n(E) = {}^3C_1\times{}^5C_1\times{}^4C_1 = 3\times5\times4$$

$$\therefore P(E) = \frac{3\times5\times4}{220} = \frac{3}{11}$$

(ii) 4 हरे गेंदों में से दो हरे गेंदों को ${}^4C_2$ तरीकों से चुना जा सकता है तथा शेष 1 गेंद को शेष $(12-4=)$ 8 गेंदों में से ${}^8C_1$ तरीकों से चुना जा सकता है।

$$n(E) = {}^4C_2\times{}^8C_1 = 6\times8 = 48$$

$$\therefore P(E) = \frac{48}{220} = \frac{12}{55}$$

(iii) 3 लाल + 4 हरे = 7 गेंदों में से 3 गेंदों को ${}^7C_3$ तरीकों से चुना जा सकता है

$$n(E) = {}^7C_3 = \frac{7\times6\times5}{3\times2} = 35$$

$$\therefore P(E) = \frac{35}{220} = \frac{7}{44}$$

उदा. 11: यदि 'EQUATION' शब्द के अक्षरों को यदृच्छया (at random) व्यवस्थित किया जाए तो निम्नलिखित घटनाओं की प्रायिकता ज्ञात करें।

(i) N एवं E के बीच ठीक 6 अक्षर हों।

(ii) सभी स्वर एक साथ हों।

(iii) सभी स्वर एक साथ नहीं हों।

हल: प्रदत्त संज्ञा में 8 भिन्न-भिन्न अक्षर हैं।

$\therefore$ व्यवस्थाओं (arrangements) की कुल संख्या $= n(S) = {}^8P_8 = 8!$

यदि N पहले स्थान पर होता है तो E को अवश्य ही अंतिम स्थान पर होना चाहिए तथा इसका विलोम भी सत्य है। साथ ही N एवं E के बीच ठीक 6 अक्षर हैं। N एवं E को ${}^2P_2 = 2$ तरीकों से व्यवस्थित किया जा सकता है तथा शेष 6 जगहों को शेष 6 अक्षरों (Q, U, A, T, I एवं O) से ${}^6P_6 = 6!$ तरीकों से व्यवस्थित किए जा सकते हैं।

$\therefore n(E) = 2\times6!$

$$\therefore P(E) = \frac{2\times6!}{8!} = \frac{2}{8\times7} = \frac{1}{28}$$

(ii) सभी 5 स्वरों को एक अक्षर मानते हुए कुल अक्षरों की संख्या 3 (व्यंजन) + 1 = 4 जो कि ${}^4P_4 = 4!$ तरीकों से व्यवस्थित किए जा सकते हैं। परन्तु 5 स्वरों को आपस में 5! तरीकों से व्यवस्थित किया जा सकता है। इसलिए $4!\times5!$ तरीकों से अक्षरों को व्यवस्थित किया जा सकता है ताकि सभी स्वर एक साथ हों। अर्थात् $n(E) = 4!\times5!$

$$\therefore P(E) = \frac{4!\times5!}{8!} = \frac{4\times3\times2}{8\times7\times6} = \frac{1}{14}$$

yoursmahboob

(iii) P(सभी स्वर एक साथ नहीं हों) = 1 − P (सभी स्वर एक साथ हों)

$$= 1 - \frac{1}{14} = \frac{13}{14}$$

उदा. 13: 1, 3, 6, 4 एवं 5 अंकों से यदृच्छया (at random) तीन अंकों की एक संख्या बनाई जाती है। निम्नलिखित घटनाओं की संभाविता ज्ञात करें।

(i) संख्या 2 से विभाज्य हो।

(ii) संख्या 2 से विभाज्य नहीं हो।

(iii) संख्या 5 से विभाज्य हो।

हल: 5 प्रदत्त अंकों से तीन अंकों की एक संख्या $^5P_3$ तरीकों से बनाई जा सकती है।

अर्थात् $n(S) = {}^5P_3 = 5 \times 4 \times 3$

(i) 4 एवं 6 में से कोई भी एक अंक इकाई स्थान पर आना चाहिए जिसे 2 तरीकों से किया जा सकता है। इकाई स्थान को भरने के बाद शेष दो जगहों को शेष चार अंकों से $^4P_2$ तरीकों से भरा जा सकता है।

$n(E) = 2 \times {}^4P_2 = 2 \times 4 \times 3$

$$\therefore P(E) = \frac{2 \times 4 \times 3}{5 \times 4 \times 3} = \frac{2}{5}$$

(ii) P(दो से विभाज्य नहीं है) = 1 − P (2 से विभाज्य है)

$$= 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$$

(iii) एक संख्या 5 से विभाज्य होगा जब उसके इकाई स्थान पर 0 या 5 हो। हमारे पास यहाँ 0 नहीं है। इसलिए इकाई स्थान को हम केवल 5 से भर सकते हैं अर्थात् 1 तरीका से। शेष दो स्थानों को शेष 4 अंकों से $^4P_2$ तरीकों से भरा जा सकता है।

$n(E) = 1 \times {}^4P_2 = 4 \times 3$

$$\therefore P(E) = \frac{4 \times 3}{5 \times 4 \times 3} = \frac{1}{5}$$

उदा. 13: 4 लड़के एवं 5 लड़कियाँ हैं। वे कतार में यदृच्छया (randomly) बैठते हैं। सभी लड़कियाँ एक साथ नहीं बैठें इसकी क्या संभाविता है?

हल: [illegible] इसे करें। उत्तर $= \frac{13}{14}$

उदा. 14: 'ARTICLE' शब्द के अक्षरों को विभिन्न तरीकों से यदृच्छया (randomly) व्यवस्थित किए जाते हैं। स्वरों को सम-स्थानों पर आने की क्या सम्भाविता है?

हल: 'ARTICLE' शब्द के 7 भिन्न-भिन्न अक्षरों को 7! तरीकों से व्यवस्थित किया जा सकता है अर्थात् $n(S) = 7!$

$n(E) = {}^3P_3 \times {}^4P_4 = 3! \times 4! = 6 \times 24$

$$\therefore P(E) = \frac{6 \times 24}{7!} = \frac{1}{35}$$

yousufmahboob

उदा. 15: 4 लड़कियों एवं 5 लड़कों से 4 सदस्यों की एक समिति बनानी है। समिति में लड़कों की संख्या लड़कियों की संख्या से कम होने की क्या प्रायिकता (probability) है?

हल: 1 लड़का एवं 3 लड़कियों का चयन $^5C_1 \times {}^4C_3 = 5 \times 4 = 20$ तरीकों से

4 लड़कियों एवं 0 लड़का का चयन $^5C_0 \times {}^4C_4 = 1 \times 1 = 1$ तरीका से

$\therefore n(E)$ = तरीकों की कुल संख्या = 21

4 लड़कियों एवं 5 लड़कों में से 4 सदस्यों की एक समिति

$^9C_4 = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6}{4 \times 3 \times 3} = 9 \times 7 \times 2$ तरीकों से बनायी जा सकती है।

$\therefore P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{21}{9 \times 7 \times 2} = \frac{1}{6}$

उदा. 16: एक बॉक्स में 4 काली गेंदें, 3 लाल गेंदें एवं 5 हरी गेंदें हैं। बॉक्स से 2 गेंदें यदृच्छया (at random) निकाली जाती हैं। दोनों गेंदों के एक ही रंग होने की प्रायिकता (probability) क्या है?

1) $\frac{47}{48}$ 2) $\frac{1}{6}$ 3) $\frac{19}{66}$ 4) $\frac{2}{11}$ 5) इनमें से कोई नहीं।

हल: गेंदों की कुल संख्या = 4 + 3 + 5 = 12

$n(S) = {}^{12}C_2 = \frac{12 \times 11}{2} = 66$

$n(E) = {}^4C_2 + {}^3C_2 + {}^5C_2 = \frac{4 \times 3}{2} + \frac{3 \times 2}{2} + \frac{5 \times 4}{2} = 6 + 3 + 10 = 19$

$\therefore$ अभीष्ट प्रायिकता, $P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{19}{66}$

उदा. 17: एक बॉक्स में एक दर्जन संतरे हैं जिसका एक-तिहाई खराब हो चुका है। यदि 3 संतरे बॉक्स से यदृच्छया (at random) बाहर निकाले जाते हैं तो तीन संतरों में से कम से कम एक संतरा अच्छा होने की क्या प्रायिकता है?

1) $\frac{1}{55}$ 2) $\frac{54}{55}$ 3) $\frac{45}{55}$ 4) $\frac{3}{55}$ 5) इनमें से कोई नहीं।

हल: 2: P(कम-से-कम एक अच्छा) = 1 − P (सारे खराब) .....(*)

$= 1 - \frac{^4C_3}{^{12}C_3} = 1 - \frac{4}{220} = 1 - \frac{1}{55} = \frac{54}{55}$

नोट (*): 8 अच्छा एवं 4 खराब संतरों में से 3 संतरे का चयन निम्नलिखित ढंग से किया जा सकता है।

yoursmahboob

(i) सभी 3 खराब हैं एवं 0 अच्छा है

(ii) 1 खराब 2 अच्छा

(iii) 2 खराब 1 अच्छा

(iv) 0 खराब 3 अच्छा

(ii), (iii) एवं (iv) के संयोजन (combination) को "कम-से कम एक अच्छा" कहा जा सकता है।

अतः $P(i) + \{p(ii) + p(iii)\} = 1$

या, $P(i) + P$ (कम-से-कम एक अच्छा) $= 1 - P$ (सभी 3 खराब)

उदा. 18: एक बॉक्स में 5 हरा, 4 पीला एवं 3 उजला मार्बल है। 3 मार्बल को यदृच्छया (at random) निकाला जाता है। ये सभी एक ही रंग के नहीं हों इसकी क्या प्रायिकता (probability) है?

1) $\frac{13}{44}$ 2) $\frac{41}{44}$ 3) $\frac{13}{55}$ 4) $\frac{12}{55}$ 5) इनमें से कोई नहीं

हल: 2: मार्बल की कुल संख्या $= 5 + 4 + 3 = 12$

$n(S) = {}^{12}C_3 = \frac{12 \times 11 \times 10}{1 \times 2 \times 3} = 220$

अर्थात् 12 मार्बल में से 3 मार्बल 220 तरीकों से निकाला जा सकता है।

यदि सभी 3 मार्बल एक ही रंग के हों तो यह

${}^5C_3 + {}^4C_3 + {}^3C_3 = 10 + 4 + 1 = 15$ तरीकों से किया जा सकता है।

अब, P (सभी 3 मार्बल एक ही रंग के हैं) + P (सभी 3 मार्बल एक रंग के नहीं हैं) = 1

$\therefore$ P (सभी 3 मार्बल एक रंग के नहीं हैं) $= 1 - \frac{15}{220} = \frac{205}{220} = \frac{41}{44}$

उदा. 19: एक कक्षा के 15 विद्यार्थियों में से 7 महाराष्ट्र के हैं, 5 कर्नाटक के हैं, तथा 3 गोवा के हैं। 4 छात्रों को यदृच्छया (at random) चुना जाता है। कम-से-कम एक कर्नाटक का हो इसकी क्या प्रायिकता है?

(1) $\frac{12}{13}$ (2) $\frac{11}{13}$ (3) $\frac{100}{15}$ (4) $\frac{51}{15}$ (5) इनमें से कोई नहीं

हल: 2: P(कम से कम एक कर्नाटक का) $= 1 - P$ (कर्नाटक का कोई नहीं)

$$= 1 - \frac{{}^{10}C_4}{{}^{15}C_4} = 1 - \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{15 \times 14 \times 13 \times 12} = 1 - \frac{2}{13} = \frac{11}{13}$$

उदा. 20: एक थैला में 5 लाल एवं 8 काली गेंदें हैं। थैला में से दो बार तीन-तीन गेंदें निकाली जाती हैं। पहली बार गेंदें निकालने के बाद इसे प्रतिस्थापित (replaced) कर दिया जाता है। पहली बार में लाल गेंद तथा दूसरी बार में काली गेंद निकलने की क्या प्रायिकता है?

yoursmahboob

हल: अभीष्ट प्रायिकता $= \frac{{}^5C_3}{{}^{12}C_3} \times \frac{{}^8C_3}{{}^{12}C_3} = \frac{140}{20449}$

उदा. 21: एक थैला में 5 काली एवं 7 उजली गेंदें हैं। थैला में से एक गेंद निकाली जाती है तथा उसकी जगह पर दूसरी गेंद डाल दी जाती है। पुनः एक गेंद निकाली जाती है। निम्नलिखित घटनाओं की प्रायिकता ज्ञात करें।

(i) दोनों निकाली हुई गेंदें काली हों।

(ii) दोनों उजली हों।

(iii) पहली गेंद उजली हो तथा दूसरी गेंद काली।

(iv) पहली गेंद काली तथा दूसरी गेंद उजली।

हल: घटनाएँ स्वतंत्र हैं तथा एक ही साथ घटित होने में सक्षम हैं। गुणा के नियम (Rule of Multiplication) का प्रयोग होगा।

(i) दोनों गेंदें काली हों की प्रायिकता $= \frac{5}{12} \times \frac{5}{12} = \frac{25}{144}$

(ii) दोनों गेंदें उजली हों की प्रायिकता $= \frac{7}{12} \times \frac{7}{12} = \frac{49}{144}$

(iii) पहली गेंद उजली एवं दूसरी काली हो की प्रायिकता $= \frac{7}{12} \times \frac{5}{12} = \frac{35}{144}$

(iv) पहली गेंद काली तथा दूसरी गेंद उजली हो की प्रायिकता $= \frac{5}{12} \times \frac{7}{12} = \frac{35}{144}$

उदा. 22: एक थैला में 6 लाल एवं 4 उजली गेंदें हैं। एक एक करके 4 गेंदें निकाली जाती हैं तथा उसे प्रतिस्थापित (replaced) नहीं किया जाता है। बारी-बारी से ये भिन्न भिन्न रंग के होंगे इसकी क्या प्रायिकता है?

हल: निम्नलिखित क्रम में गेंदों को बारी-बारी से निकाला जा सकता है।

लाल, उजला, लाल, उजला या उजला, लाल, उजला, लाल

यदि पहली बार लाल गेंद निकाली जाती है तो गेंदों को बारी-बारी से निकालने की प्रायिकता

$$= \frac{6}{9} \times \frac{3}{8} \times \frac{5}{7} \times \frac{2}{6} \text{ .....(I)}$$

यदि पहली बार उजली गेंद निकाली गई हो तो गेंदों को बारी बारी से निकालने की प्रायिकता

$$= \frac{3}{9} \times \frac{6}{8} \times \frac{2}{7} \times \frac{5}{6} \text{ .....(II)}$$

अभीष्ट प्रायिकता = (I) + (II) ..... (*)

$$= \frac{6}{9} \times \frac{3}{8} \times \frac{5}{7} \times \frac{2}{6} + \frac{3}{9} \times \frac{6}{8} \times \frac{2}{7} \times \frac{5}{6} = \frac{5}{84} + \frac{5}{84} = \frac{5}{42}$$

महत्वपूर्ण नोट: उदा.-20 एवं उदा.-21 में दो घटनाएँ स्वतंत्र हैं तथा वे एक ही साथ घटित हो सकती हैं। इसलिए हम 'गुणा' या 'multiplication' का प्रयोग करते हैं। दूसरे शब्दों में,

yourmanhood

चूँकि दो घटनाओं के बीच शब्द 'एवं' का प्रयोग हुआ है इसलिए हम गुणा का प्रयोग करते हैं। ध्यान दें दोनों का मतलब पहला एवं दूसरा भी है। उदा. 22 में (*) में हमने जोड़ (addition) का प्रयोग किया है क्योंकि दो घटनाएँ 'या' से जुड़ी हुई हैं।

उदा. 23: एक थैला में 4 उजली एवं 6 लाल गेंदें हैं बिना प्रतिस्थापन (replacement) के दो बार एक एक गेंद निकाली जाती है। एक को लाल एवं दूसरे को उजली होने की क्या प्रायिकता है?

हल: इस प्रकार के प्रश्नों को क्रमचय एवं संचय (Permutation and Combination) की सहायता से आसानी से हल किया जा सकता है।

10 गेंदों में से दो गेंदें $^{10}C_2$ या $\frac{10!}{2!8!}$ या $\frac{10\times9}{2}$ या 45 तरीकों से निकाली जा सकती है।

4 उजली गेंदों में से एक उजली गेंद $^4C_1$ या $\frac{4!}{1!3!}$ या 4 तरीकों से निकाली जा सकती है।

6 लाल गेंदों में से एक लाल गेंद $^6C_1$ या 6 तरीकों से निकाली जा सकती है।

एक उजली एवं एक लाल गेंद निकालने के तरीकों की कुल संख्या है

$^4C_1\times{}^6C_1$ या $4\times6=24$ (उपर्युक्त महत्वपूर्ण नोट को देखें)

$$\text{अभीष्ट प्रायिकता} = \frac{\text{घटना के अनुकूल स्थितियों की संख्या}}{\text{घटना घटित होने के तरीकों की कुल संख्या}} = \frac{24}{45} = \frac{8}{15}$$

उदा. 24: एक थैला में 7 उजली एवं 9 काली गेंदें हैं दो गेंदें यदृच्छया (at random) एक के बाद एक करके निकाली जाती हैं। उनमें से एक उजली एवं दूसरी काली होने की प्रायिकता ज्ञात करें।

हल: $(7+9=)$ 16 गेंदों में से 2 गेंदें निकालने के तरीकों की कुल संख्या

$$= {}^{16}C_2 = \frac{16!}{2!14!} = \frac{16\times15}{2} = 120$$

7 में से एक उजली गेंद निकालने के तरीकों की संख्या $= {}^7C_1 = \frac{7!}{1!6!} = 7$

9 में से एक काली गेंद निकालने के तरीकों की संख्या $= {}^9C_1 = \frac{9!}{1!8!} = 9$

एक उजली एवं एक काली गेंद निकालने के तरीकों की कुल संख्या

$= {}^7C_1\times{}^9C_1 = 7\times9 = 63$

$$\therefore \text{अभीष्ट प्रायिकता} \quad \frac{{}^7C_1\times{}^9C_1}{{}^{16}C_2} = \frac{7\times9}{120} = \frac{21}{40}$$